Statistik I für Betriebswirte
Vorlesung 2

Dr. Andreas Wünsche

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

8. April 2019

1.4 Stochastische Unabhängigkeit

- **Definition:** Zwei zufällige Ereignisse A und B zu einem Zufallsversuch heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\,.$$

- **Beispiel:** (Zweifacher Münzwurf mit fairer Münze)

  $A = \{1.\,\text{Wurf Zahl}\}, \quad B = \{2.\,\text{Wurf Zahl}\}\,.$

  $$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

- **Satz:** A und B seien unabhängige Ereignisse zu einem zufälligen Versuch. Dann sind auch die zufälligen Ereignisse A und das Komplement von B, also $\overline{B}$, unabhängig. Ebenso sind in diesem Fall $\overline{A}$ und B sowie auch $\overline{A}$ und $\overline{B}$ jeweils unabhängige Ereignisse.

Unabhängigkeit von mehr als 2 Ereignissen

- Zufällige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ zu einem Zufallsversuch heißen paarweise unabhängig, falls alle Paare von ausgewählten Ereignissen unabhängig sind, d.h.

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \text{ für alle } i \neq j\,.$$

- Diese Ereignisse heißen in Gesamtheit oder total oder vollständig (stochastisch) unabhängig, falls eine entsprechende Formel für alle möglichen Auswahlen (nicht nur von Paaren) gilt, d.h. für alle

$$2 \leq k \leq n,\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \quad \text{gilt}$$
$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})\,.$$

- Aus der totalen Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ folgt die paarweise Unabhängigkeit der Ereignisse, aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Summenformel

- **Summenformel für unabhängige Ereignisse** $A_1, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)) \ .$$

- Die Unabhängigkeit von Ereignissen wird der Einfachheit halber häufig vorausgesetzt, oft auch dann, wenn sie sachlich schwer begründbar ist. Oft beziehen sich unabhängige Ereignisse auf Versuchswiederholungen etc., die sich (scheinbar) nicht gegenseitig beeinflussen.

Anwendung in Zuverlässigkeitstheorie

Betrachten die Serien- und Parallelschaltung von Bauteilen, Teilsystemen (z.B. in Produktionslinien) etc., die unabhängig voneinander ausfallen oder funktionstüchtig sind.

- 2 Bauteile T_1, T_2, $F_i = \{\text{Bauteil } T_i \text{ funktioniert}\}$, $P(F_i) = p_i$, F_i stochastisch unabhängig $(i = 1, 2)$.
- Serien- oder Reihenschaltung funktioniert, wenn sowohl T_1 als auch T_2 funktionieren:

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2) = p_1 p_2 \,.$$

- Parallelschaltung funktioniert, wenn T_1 oder T_2 oder beide Bauteile funktionieren (also mindestens eines der Bauteile funktioniert):

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \,.$$

- n Bauteile $T_1, \ldots, T_n$, $F_i = \{\text{Bauteil } T_i \text{ funktioniert}\}$ F_i vollständig stochastisch unabhängig $(i = 1, \ldots, n)$.

Serien- oder Reihenschaltung

- 

Serien- oder Reihenschaltung

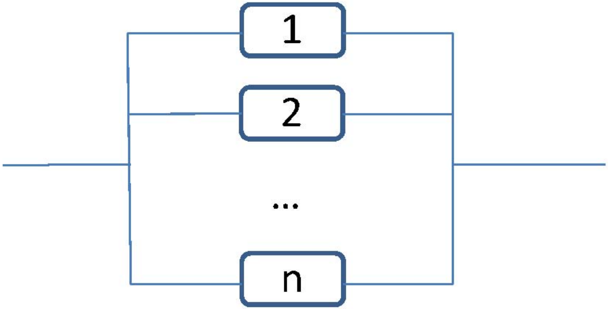
  funktioniert (Ereignis S), wenn alle Bauteile $T_1, T_2, \ldots, T_n$ funktionieren:

$$\begin{aligned} S &= F_1 \cap F_2 \ldots \cap F_n \\ \Longrightarrow \quad P(S) &= P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot \ldots \cdot P(F_n). \end{aligned}$$

- Serien- oder Reihenschaltung funktioniert nicht, wenn mindestens eines der Bauteile $T_1, T_2, \ldots, T_n$ nicht funktioniert:

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2 \ldots \cup \overline{F}_n \\ P(\overline{S}) &= 1 - P(S) \\ &= 1 - P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot \ldots \cdot P(F_n) \\ &= 1 - \left((1 - P(\overline{F}_1)) \cdot (1 - P(\overline{F}_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(\overline{F}_n))\right). \end{aligned}$$

Parallelschaltung



Parallelschaltung funktioniert (Ereignis S), wenn mindestens ein Bauteil $T_1, T_2, \ldots, T_n$ funktioniert:

$$\begin{aligned} S &= F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n \\ \Longrightarrow \quad P(S) &= 1 - ((1 - P(F_1)) \cdot (1 - P(F_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(F_n))) \,. \end{aligned}$$

Parallelschaltung

- Parallelschaltung funktioniert nicht, wenn alle Bauteile $T_1, T_2, \ldots, T_n$ nicht funktionieren:

$$\begin{aligned} & \overline{S} &=& \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \ldots \cap \overline{F}_n \\ \Longrightarrow \quad & P(\overline{S}) &=& P(\overline{F}_1) \cdot P(\overline{F}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{F}_n) \\ & &=& (1 - P(F_1)) \cdot (1 - P(F_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(F_n)). \end{aligned}$$

- Bei komplizierteren Schaltungen Zerlegung in einfachere Teilsysteme (reine Serien- und Parallelschaltungen).

Übungsbeispiel 1.6

Ein System besteht aus vier Komponenten. Dabei sei F_i $(i = 1, \ldots, 4)$ das Ereignis, dass die i-te Komponente des Systems nicht ausfällt. Diese Ereignisse sind vollständig unabhängig und haben folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(F_1) = 0.95\,, P(F_2) = 0.85\,, P(F_3) = 0.9 \text{ und } P(F_4) = 0.9.$$

Das System funktioniert, falls von den Komponenten 1 und 2 und von den Komponenten 3 und 4 mindestens jeweils eine Komponente funktioniert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System funktioniert?

1.5 Zufallsgrößen

1.5.1 Zufallsgrößen und deren Verteilung

- Oft sind Ergebnisse von Zufallsversuchen in Form von Zahlen gegeben oder es ist für eine mathematische Behandlung günstig, den elementaren Versuchsausgängen Zahlen zuzuordnen. Diese „vom Zufall abhängigen Zahlenwerte“ werden durch eine Zufallsgröße X (oder mehrere Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$) modelliert.
- *Beispiele:*
  - Zufällige Anzahl X (von Schadensfällen, Konkursen,...) mit möglichen Werten $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
  - Zufällige Zeit X (Lebensdauer, Ausfallzeit,...) mit möglichen Werten $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
  - Messergebnis X (Geldmenge, Temperatur, ...) mit entsprechenden Zahlenwerten (ohne Maßeinheit) als möglichen Werten.
  - Augenzahl X beim Würfeln mit möglichen Werten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Mathematische Definition einer Zufallsgröße

- Mathematische **Definition** einer Zufallsgröße:
  Eine Abbildung (Funktion) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsgröße (reelle Zufallsvariable, kurz: ZG), falls für jedes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}, a < b$ die Menge $\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\}$ ein zufälliges Ereignis ist (dies ist die sogenannte Messbarkeitsbedingung, dabei wird ein System $\mathcal{A}$ von zufälligen Ereignissen mit den Eigenschaften aus den Axiomen als gegeben vorausgesetzt).

- Sind X, Y Zufallsgrößen zu einem Zufallsversuch, dann sind auch $X + Y,\ \ X - Y,\ \ X \cdot Y,\ \ X/Y$ falls $Y \neq 0,\ \ a \cdot X$ mit $a \in \mathbb{R}$ und ähnliche durch mathematische Operationen gebildete Größen Zufallsgrößen.

Grundtypen von Zufallsgrößen

- Für Zufallsgrößen interessieren vor allem Wahrscheinlichkeiten der Art $P(X \leq b)$, $P(a < X < b)$ oder $P(a \leq X \leq b)$ für reelle Zahlen $a < b$ (diese bilden die „Verteilung“ der Zufallsgröße) sowie abgeleitete Kenngrößen, wie Erwartungswerte, Varianzen usw.
- Es gibt zwei wichtige Grundtypen von Zufallsgrößen, die sich zum Teil mit unterschiedlichen mathematischen Hilfsmitteln untersuchen lassen:
  - „diskrete Zufallsgrößen“ (Zufallsgrößen mit diskreter Verteilung) und
  - „stetige Zufallsgrößen“ (Zufallsgrößen mit (absolut) stetiger Verteilung).

Diskrete Zufallsgrößen

- **Definition:** Eine Zufallsgröße X heißt diskret, wenn sie nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte $x_1, x_2, \ldots$ annehmen kann.

  Die Zuordnung $p_i := P(X = x_i), i = 1, 2, \ldots$ heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Zufallsgröße. Sie wird meistens durch eine Verteilungstabelle gegeben:

Werte	x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
Wahrscheinlichkeiten	p_i	p_1	p_2	p_3	$\ldots$

- Für die Wahrscheinlichkeiten p_i gelten:
  1. $0 \leq p_i \leq 1$
  2. $\sum_i p_i = 1$

- **Beispiel 1.1:** Gerechtes Würfeln

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

Die Verteilung diskreter Zufallsgrößen

- Es gelten z.B.

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i\,:\,a \leq x_i \leq b} p_i$$

  für reelle Zahlen $a \leq b$ bzw. allgemein für eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}$

$$P(X \in B) = \sum_{i\,:\,x_i \in B} p_i \,.$$

- Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten p_i erfolgt durch Berechnung aus Grundannahmen (oft für typische Situationen bzw. Verteilungen) oder experimentell mittels statistischer Methoden.

Zufallsgrößen mit stetiger Verteilung

- *Definition:* Eine Zufallsgröße X heißt stetig, wenn es eine integrierbare reelle Funktion $f_X(x)$ gibt, so dass

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

für beliebige reelle Zahlen $a \leq b$ gilt.

- Die Funktion f_X heißt Dichtefunktion (oder Verteilungsdichte) der Zufallsgröße X und besitzt die Eigenschaften:
  1. $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

- Sie gibt die Verteilung der „Wahrscheinlichkeitsmasse“ auf der reellen Achse an.

Beispiel: Zufallsgröße mit stetiger Verteilung

- **Beispiel 1.2:** Rein zufällige Auswahl eines Punktes (Wertes) X aus dem Intervall $[0,1]$ („auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte oder gleichmäßig verteilte Zufallsgröße").
- Für $0 \leq a < b \leq 1$ gilt $P(a \leq X \leq b) = b - a$.
- Die Dichtefunktion ist $f_X(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{für } 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$