

7. Übungsserie Statistik I SoSe 2018: Lösung

3. Aufgabe Bei einem Explorationsprojekt für die Nutzung geothermischer Energien soll eine 3 km tiefe Probebohrung gemacht werden. Ein Bohrkopf kostet 30.000€ und hält durchschnittlich 30m durch, aber das variiert. Der Variationskoeffizient ist 3.

Wie hoch sollte Ihr Budget für Bohrköpfe sein, damit Sie das Bohrprojekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% auch bis zu Ende durchführen können?

Lösung: Es gelte die folgende Bezeichnung

X – „zufällige Tiefe eines Bohrkopfes.“

Gemäß der Aufgabe gilt

$$\mu_X := \mathbf{E}[X] = 30 \quad (\text{durchschnittliche Bohrlänge in } m)$$

Desweiteren soll für den Variationskoeffizient gelten

$$\begin{aligned} V_X = \frac{\sigma_X}{\mathbf{E}[X]} = 3 &\implies \sigma_X = 3 \cdot \mathbf{E}[X] = 90 \quad (\text{in } m) \\ &\implies \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = 8100 \quad (\text{in } m^2) \end{aligned}$$

Es sei nun Angenommen, dass n Bohrköpfe zur Verfügung stehen. Die Zufallsgrößen

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

sollen unabhängig sein und die gleiche Verteilung wie X haben ($X_i \sim X$). Sie beschreiben die Anzahl der Meter, mit denen die einzelnen Bohrköpfe, welche zur Verfügung stehen, bohren bevor sie ausfallen. Dann beträgt die Gesamttiefe der Bohrungen

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i.$$

Um das notwendige Budget bestimmen zu können benötigen wir die kleinste Anzahl der Bohrköpfe n , so dass die folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\underbrace{\mathbf{P}(S_n \geq 3000)}_{\text{Gesamttiefe ist mindestens 3km}} \geq 0,99$$

Problem: Es ist nicht bekannt, wie die Zufallsgröße X (und somit auch S_n) exakt verteilt ist.

Lösung: Anwendung des *zentralen Grenzwertsatzes*¹. Dieser sagt, dass für große n das Folgende gilt.

¹vgl. z.B. Folien zu Vorlesung 5, Seite 17

$$P(S_n < x) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu_X}{\sqrt{n\sigma_X^2}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 30n}{\sqrt{8100n}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 30n}{90\sqrt{n}}\right)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 3000) \geq 0,99 &\iff 1 - P(S_n < 3000) \geq 0,99 \\ &\iff P(S_n < 3000) \approx \Phi\left(\frac{3000 - 30n}{90\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{100 - n}{3\sqrt{n}}\right) \leq 0,01 \\ &\iff \frac{100 - n}{3 \cdot \sqrt{n}} \leq z_{0,01} \end{aligned}$$

Da $z_{0,01} = -z_{1-0,01} = -z_{0,99} = -2,326$ gilt auch das Folgende.

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 3000) \geq 0,99 &\iff \frac{100 - n}{3 \cdot \sqrt{n}} \leq -2,326 \\ &\iff 100 - n + 6,978\sqrt{n} \leq 0 \end{aligned}$$

Zu lösen ist nun die Gleichung

$$100 - n + 6,978\sqrt{n} = 0. \quad (0-1)$$

Durch die Substitution $y = \sqrt{n}$ und multiplizieren mit -1 erhält man eine quadratische Gleichung.

$$y^2 - 6,978y - 100 = 0.$$

Deren Lösungen y_1 und y_2 lassen sich z.B. mit Hilfe der p-q-Formel bestimmen.

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{6,978}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6,978}{2}\right)^2 + 100} \\ \implies y_1 &= 14,0802 \implies \sqrt{n_1} = 14,0802 \implies n_1 \approx 198,25 \\ \implies y_2 &= -7,1 < 0 \implies \sqrt{n_2} = -7,1 \implies \text{Lösung } n_2 \text{ entfällt} \\ \implies n_1 &= 198,25 \text{ ist einzigste Lösung der Gleichung (0-1)} \end{aligned}$$

D.h. damit die erforderlichen 3km mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gebohrt werden können benötigt man mindestens 199 Bohrköpfe. Das erforderliche Budget sollte also mindestens

$$199 \cdot 30.000\text{€} = 5.970.000\text{€}$$

betragen. □