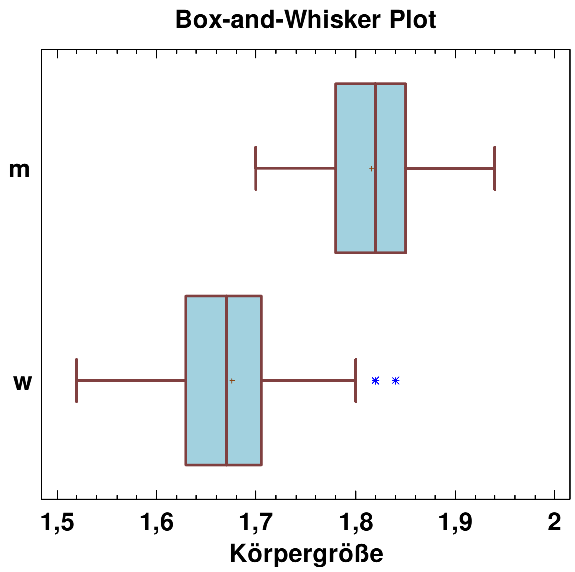
1. Aufgabe: 72 Studenten (m) und 56 Studentinnen (w) wurden nach ihrer Körpergröße befragt. Aus den Daten erhält man die folgenden Boxplots.



a) Vergleichen Sie beide bezüglich der Lage und der Streuung.

b) Bestimmen Sie den oberen Viertelwert (oberes Quartil) bei der Gruppe der Frauen und den unteren Viertelwert (unteres Quartil) bei der der Männer.

Lösung:

a) Die Männer sind größer als die Frauen. So ist z.B. der Minimalwert bei den Männern der obere Viertelwert bei den Frauen. In beiden Gruppen streuen die Werte nahezu gleich.

b) obere Viertelwert bei den Frauen: 1,71,
untere Viertelwert bei den Männern: 1,78.

2. Aufgabe: Eine Familie fährt jedes Jahr am 1. Juli an den gleichen Urlaubsort. Die Sonnenscheindauer an diesem Ort am 1. Juli ist normalverteilt mit Erwartungswert 10,5 Stunden und Standardabweichung 2,5 Stunden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonnenscheindauer zwischen 10 und 13 Stunden liegt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonnenscheindauer weniger als 7,5 Stunden beträgt?

Lösung: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 10,5\,h$ und $\sigma = 2,5\,h$.

a)

$$\begin{aligned} P\,(10 < X < 13)) &= P\left(\frac{10-10,5}{2,5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{13-10,5}{2,5}\right) \\ &= P(-0,2 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-0,2) \\ &= \Phi(1) - (1-\Phi(0,2)) = 0,841 - (1-0,579) = \underline{0,42} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
P\left(X < 7.5)\right) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{7.5-10,5}{2,5}\right) \\
&= P(Z < -1.2) = \Phi(-1,2) \\
&= 1-\Phi(1,2) = 1-0,885 = \underline{0,115}
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe: Betrachtet man nur die folgenden 7 überregionalen Tageszeitungen und vernachlässigt die restlichen, so erhält man folgende Anteile der verkauften Print-Auflage (4. Quartal 2012):

Zeitung	Anteil in %
Bild	66
Süddeutsche Zeitung	10
Frankfurter Allgemeine Zeitung	9
Die Welt (inkl. Welt Kompakt)	7
Handelsblatt	4
Frankfurter Rundschau	3
die tageszeitung	1

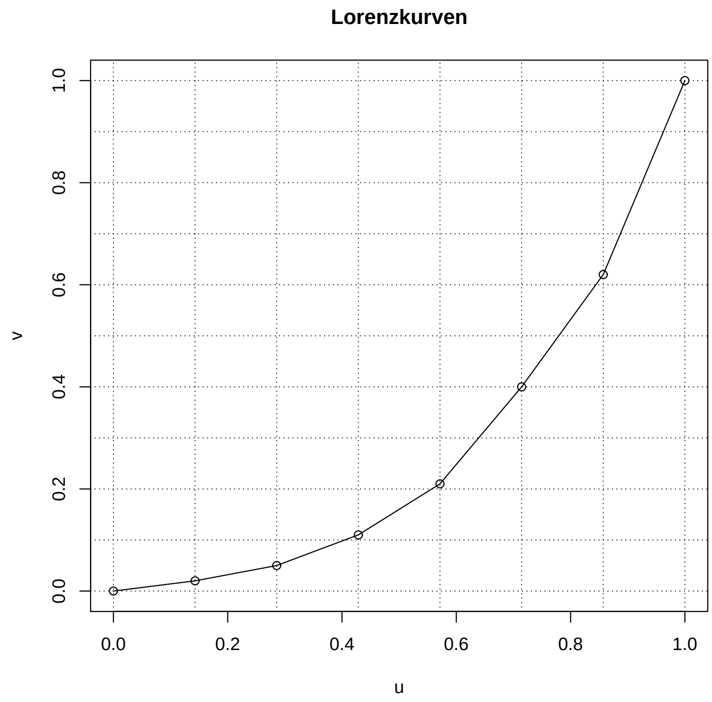
a) Bestimmen Sie den Gini-Koeffizienten.

Lösung:

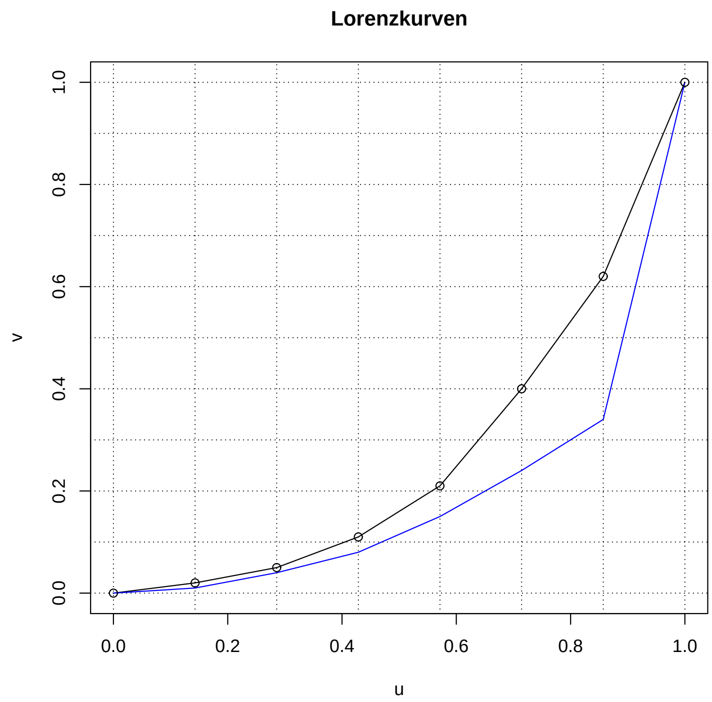
i	u_i	v_i
1	$\frac{1}{7}$	0,01
2	$\frac{2}{7}$	0,04
3	$\frac{3}{7}$	0,08
4	$\frac{4}{7}$	0,15
5	$\frac{5}{7}$	0,24
6	$\frac{6}{7}$	0,34
7	1	1
		$\underline{1{,}86}$

$$G = 1 - \frac{1}{n}\left(2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i - 1\right) = 1 - \frac{1}{7}(2 \cdot 1,86 - 1) = \underline{0,611}$$

b) Betrachtet man die E-Paper-Auflagen dieser 7 Tageszeitungen, so erhält man die folgende Lorenzkurve.



Tragen Sie in diese Grafik die Lorenzkurve der Print-Auflage mit ein. In welcher der beiden Ausgabevarianten ist die Konzentration größer, Print-Auflage oder E-Paper-Auflage? Lösung:



Die Konzentration bei der Print-Auflage ist offensichtlich größer.

4. **Aufgabe:** Ein Fahrzeughersteller hat für eine neue Komponente 3 Zulieferer. Um nicht nur von einem Zulieferer abhängig zu sein, bestehen mit allen 3 Lieferanten Lieferverträge. Leider liefert keiner der Zulieferer nur Komponenten ohne Mängel. Der Lieferanteil und die Mängelquote sind in der folgenden Tabelle zu finden:

Zulieferer	Lieferanteil	Mängelquote
1	70%	1%
2	25%	3%
3	5%	7%

Die Gesamtlieferung besteht aus den Lieferungen der 3 Lieferanten. Dieser Gesamtlieferung wird zufällig eine Komponente entnommen.

a) Bezeichnen Sie die gegebenen Ereignisse und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die entnommene Komponente ohne Mängel ist?

c) Die entnommene Komponente ist ohne Mängel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie von Lieferant 1?

Lösung:

a) A_i = Die entnommene Komponente stammt von Zulieferer i.
B = Die entnommene Komponente ist ohne Mängel.

$$P(A_1) = 0,7 \quad P(A_2) = 0,25 \text{ und } P(A_3) = 0,05.$$
$$P(B|A_1) = 0,99 \quad P(B|A_2) = 0,97 \text{ und } P(B|A_3) = 0,93.$$

b)

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) \\ &= 0,99 \cdot 0,7 + 0,97 \cdot 0,25 + 0,93 \cdot 0,05 \\ &= \underline{0,982} \end{aligned}$$

c)

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0,99 \cdot 0,7}{0,982} = \underline{0,7057}$$

5. **Aufgabe:** Eine Familie bucht ihren Jahresurlaub in einem Hotel. Im Hotel sind zur gewünschten Zeit noch 12 Zimmer frei. 7 dieser 12 Zimmer besitzen einen direkten Meerblick. Die Familie bucht 3 der 12 Zimmer rein zufällig. Sie achtet also auch nicht darauf, ob das Zimmer Meerblick hat oder nicht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindesten 2 Zimmer mit Meerblick gebucht wurden?

b) Wie groß ist die erwartete Anzahl der gebuchten Zimmer mit Meerblick?

Lösung:
X = zufällige Anzahl der Zimmer mit Meerblick.
X ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 12$ $M = 7$ und $n = 3$.

a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} \\ &= 0,4773 + 0,1591 \\ &= \underline{0,6364} \end{aligned}$$

b)

$$\mathbf{E}X = n \cdot \frac{M}{N} = 3 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{4} = \underline{1,75}$$

6. Aufgabe: Bei einem Eisverkäufer ist das Gewicht einer Eiskugel normalverteilt. Eine Stichprobe von 21 Eiskugeln ergab einen Mittelwert von $50,2\ g$ und eine empirische Varianz von $2,89\ g^2$.

a) Wie lauten die Punktschätzungen für den Erwartungswert und die Standardabweichung des Eiskugelgewichts?

b) Bestimmen Sie eine zentrale (zweiseitige) Konfidenzschätzung für das erwartete Gewicht einer Eiskugel zum Konfidenzniveau 95%.

c) Bestimmen Sie eine obere Konfidenzgrenze für die Standardabweichung des Gewichts zum Konfidenzniveau 90%.

Lösung:

a) Punktschätzung für den Erwartungswert: $\hat{\mu} = \overline{x} = 50,2g$.
Punktschätzung für die Standardabweichung: $\hat{\sigma} = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,89g^2} = 1,7g$.

b) zentrale Konfidenzschätzung für Erwartungswert μ (σ^2 ist unbekannt):
$\overline{x} = 50,2g$, $s = 1,7g$ und $1 - \alpha = 0,95 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0,05$
$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{20,0.975} = 2,086$

$$\begin{aligned} \overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \ & \mu \ \leq \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \\ 50,2g - \frac{1,7g}{\sqrt{21}} \cdot 2,086 \leq \ & \mu \ \leq 50,2\,g + \frac{1,7g}{\sqrt{21}} \cdot 2,086 \\ 49,426\,g \leq \ & \mu \ \leq 50,974\,g \end{aligned}$$

c) obere Konfidenzgrenze für die Standardabweichung σ (μ ist unbekannt):
$s^2 = 2,89\,g^2$ und $1 - \alpha = 0,9 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0,1$
$\chi^2_{n,\alpha} = \chi^2_{20,0.1} = 12,443$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\leq \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n,\alpha}} \\ \sigma^2 &\leq \frac{20 \cdot 2,89\,g^2}{12,443} = 4,6452 \\ \sigma &\leq \underline{2,16} \end{aligned}$$

7. Aufgabe:

a) Die Wartezeit X an einer Supermarktkasse sei exponentialverteilt. Das 40% Quantil dieser Verteilung ist 3 min. Wie groß ist der Parameter λ?
Lösung:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= 1 - \exp(\lambda \cdot t) \\ 0,4 &= 1 - \exp(-\lambda \cdot 3\,\text{min}) \\ \lambda &= -\frac{\ln(0,6)}{3\,\text{min}} = \underline{0,1703\,\text{min}^{-1}} \end{aligned}$$

b) Ein Absolvent rechnet bei jeder Bewerbung, unabhängig von den anderen Bewerbungen, mit einer Erfolgschance von 25%. Er bewirbt sich so lange, bis er erfolgreich war. Wie ist die zufällige Anzahl X der Bewerbungen verteilt?
Lösung:
X ist geometrisch verteilt mit $p = 0,25$.

c) Für eine in 3 Schichten unterteilte Grundgesamtheit werden Srichprobenumfänge für eine kostenoptimale Stichprobe bestimmt. Unmittelbar vor Beginn der Stichprobennahme ergab sich, dass sich die Kosten in der ersten und in der zweiten Schicht erhöht haben. Alle anderen Größen, also auch die Kosten in der dritten Schicht, sind unverändert geblieben. Begründen Sie, warum damit der Stichprobenumfang in der dritten Schicht kleiner wird.
Lösung:

$$n_3 = \frac{c}{\sum\limits_{j=1}^{3} p_j \sigma_j \sqrt{c_j}} \cdot \frac{p_3 \sigma_3}{\sqrt{c_3}}$$

Nur c_1 und c_2 wird größer, also wird n_3 kleiner.

d) Eine diskrete Zufallsgröße X kann die Werte 1, 3, 5 und 7 annehmen.

k	1	3	5	7
$P(X = k)$	0,3	0,2		

Die Wahrscheinlichkeiten für $X = 5$ und $X = 7$ sind unbekannt.
In welchem Bereich kann der Erwartungswert von X höchstens liegen?
Lösung:

$$\begin{aligned} P(x = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) &= 1 \\ \Longrightarrow \qquad P(X = 5) + P(X = 7) &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}X = 1 \cdot P(X = 1) + 3 \cdot P(X = 3) + 5 \cdot P(X = 5) + 7 \cdot P(X = 7) \\ \Longrightarrow \quad & \mathbf{E}X \le 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0,5 = \underline{4,4} \\ \Longrightarrow \quad & \mathbf{E}X \ge 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0 = \underline{3,4} \end{aligned}$$

e) Eine Fertigungsstraße besteht aus 2 Maschinen vom Typ I und 2 Maschinen vom Typ II. Die Fertigungsstraße funktioniert, falls mindestens eine Maschine vom Typ I und beide Maschinen vom Typ II funktionieren. Weiterhin seien folgende Ereignisse gegeben:

$$
\begin{aligned}
A_i &= \text{„}i\text{-te Maschine vom Typ I funktioniert.“} \quad i = 1,2 \\
B_i &= \text{„}i\text{-te Maschine vom Typ II funktioniert.“} \quad i = 1,2 \\
C &= \text{„Die Fertigungsstraße funktioniert.“}
\end{aligned}
$$

Die Maschinen fallen unabhängig voneinander aus.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(C)$ für das Eintreten des Ereignisses C mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(B_1)$ und $P(B_2)$ an.
Lösung:

$$
\begin{aligned}
C &= (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cap B_2) \\
P(C) &= P(A_1 \cup A_2) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) \\
&= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) \\
&= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2)
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
C &= (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cap B_2) \\
&= (A_1^c \cap A_2^c)^c \cap (B_1 \cap B_2) \\
P(C) &= P((A_1^c \cap A_2^c)^c) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) \\
&= (1 - (P(A_1^c \cap A_2^c))) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) \\
&= (1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) \\
&= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2)
\end{aligned}
$$