1. Aufgabe: Der E-Commerce-Umsatz (in Millionen Euro) der fünf größten Online-Shopping-Clubs liegt wie folgt vor:

Club Nr.	Umsatz
1	120
2	72
3	54
4	30
5	24

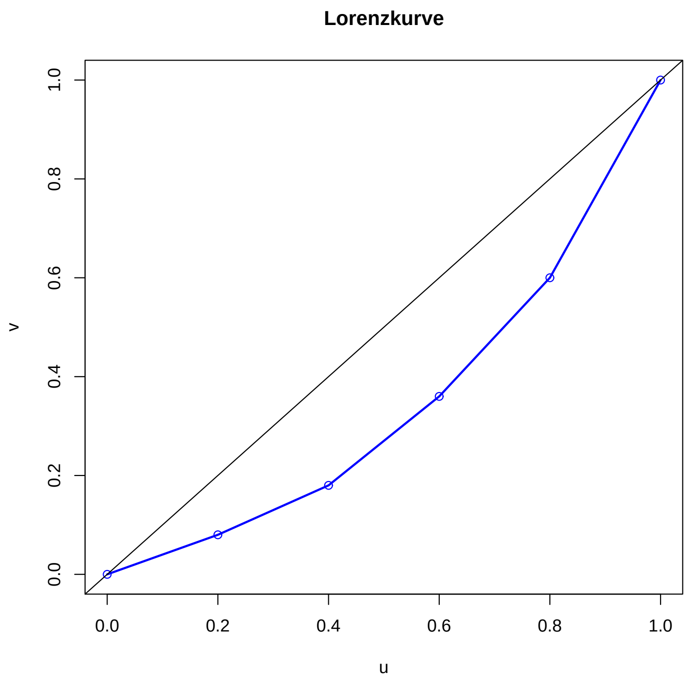
a) Bestimmen Sie den Ginikoeffizienten.

b) Zeichnen Sie die Lorenzkurve.

Lösung:

i	u_i	x_i	$\sum_{k=1}^{i} x_k$	v_i
1	0,2	24	24	0,08
2	0,4	30	54	0,18
3	0,6	54	108	0,36
4	0,8	72	180	0,60
5	1,0	120	300	1,00
				$\underline{\underline{2{,}22}}$

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i \\ &= 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot 2,22 = \underline{0,312} \end{aligned}$$



2. Aufgabe: Drei Lokalzeitungen teilen den Markt in einer Stadt unter sich auf. Dabei hat Zeitung A 45% Marktanteil, Zeitung B 37%, und bei Zeitung C sind es 18%. Bei Zeitung A erfolgten 10% des Verkaufs an Abonnenten, bei Zeitung B sind dies 60% und bei Zeitung C 75%.

Ein Bürger dieser Stadt liest zum Frühstück seine abonnierte Lokalzeitung.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um die Zeitung C? Formulieren Sie vor der Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit relevante Ereignisse und geben Sie dafür die aus dem Text folgenden Wahrscheinlichkeiten an.

Lösung:
A_1 - ein zufällig ausgewählter Zeitungsleser liest die Zeitung A
A_2 - ein zufällig ausgewählter Zeitungsleser liest die Zeitung B
A_3 - ein zufällig ausgewählter Zeitungsleser liest die Zeitung C

B - ein zufällig ausgewählter Zeitungsleser ist Abonnent
B^c- ein zufällig ausgewählter Zeitungsleser ist kein Abonnent

$$P(A_1) = 0,45, \quad P(A_2) = 0,37 \quad \text{und} \quad P(A_3) = 0,18.$$
$$P(B|A_1) = 0,1, \quad P(B|A_2) = 0,6 \quad \text{und} \quad P(B|A_3) = 0,75.$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) \\ &= 0,45 \cdot 0,1 + 0,37 \cdot 0,6 + 0,18 \cdot 0,75 = \underline{0,402} \end{aligned}$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{0,75 \cdot 0,18}{0,402} = \frac{0,135}{0,402} = \underline{0,3358}$$

3. Aufgabe: Die Nutzstrecke eines neu entwickelten Reifens ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 44000 km und der Standardabweichung 4000 km.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nutzstrecke 50000 km überschreitet?

b) Welche Nutzstrecke wird von 10% der Reifen unterschritten?

Lösung: $X \sim \mathcal{N}(44000, 4000^2)$

a)

$$\begin{aligned} P(X > 50000) &= 1 - P(X \leq 50000) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{50000 - 44000}{4000}\right) \\ &= 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = \underline{0,0668} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(X < x_{0,1}) &= 0,1 \\
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_{0,1} - 44000}{4000}\right) &= 0,1 \\
\Phi\left(\frac{x_{0,1} - 44000}{4000}\right) &= 0,1 \\
\frac{x_{0,1} - 44000}{4000} &= z_{0,1} = -z_{0,9} = -1,2816 \\
x_{0,1} &= -1,2816 \cdot 4000 + 44000 = \underline{38873,6}
\end{aligned}$$

4. Aufgabe: Beim Roulette setzt ein Spieler bei 10 aufeinanderfolgenden Spielen immer auf die roten Zahlen. Die Spielergebnisse sind unabhängig voneinander und in jedem Spiel ist die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$.

a) Wie ist die Anzahl X der gewonnenen Spiele verteilt? (Parameter nicht vergessen!)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mehr als 2 Spiele gewinnt?

c) Der Spieler setzt in jedem der 10 Spiele 5 € ein. Gewinnt der Spieler ein Spiel, so erhält er 10 € ausgezahlt. Verliert er hingegen ein Spiel, so erhält er nichts. Der Gesamtgewinn des Spielers ist die Diffenz zwischen Auszahlungen und eingesetztem Geld.

Wie groß ist der erwartete Gesamtgewinn bei den 10 Spielen? Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

Lösung:

a) X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{18}{37}$. $X \sim \mathbf{Bin}(10, \frac{18}{37})$

b)

$$\begin{aligned}
P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\
&= 1 - [P(X=0) + ... + P(X=2)] \\
&= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^0 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{10} + ... + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^2 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^8\right] \\
&= 1 - 0,0648 \\
&= \underline{0,9352}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
G &= 10\,€ \cdot X - 10 \cdot 5\,€ \\
\mathbf{E}G &= 10\,€ \cdot \mathbf{E}X - 10 \cdot 5\,€ \\
&= 10\,€ \cdot 10 \cdot \frac{18}{37} - 10 \cdot 5\,€ \\
&= -\frac{50}{37}\,€ \approx \underline{-1,35\,€}
\end{aligned}$$

Es ist Verlust von rund 1,35 € zu erwarten.

5. Aufgabe: Die Wartezeit in einem Restaurant ist exponentialverteilt. Es liegt folgende Stichprobe von 10 unabhängig voneinander beobachteten Wartezeiten vor.

$$\begin{array}{lllll} x_1 = 6,2\,\text{min} & x_2 = 1,8\,\text{min} & x_3 = 1,5\,\text{min} & x_4 = 14,9\,\text{min} & x_5 = 4,3\,\text{min} \\ x_6 = 4,8\,\text{min} & x_7 = 2,4\,\text{min} & x_8 = 5,4\,\text{min} & x_9 = 5,5\,\text{min} & x_{10} = 3,2\,\text{min} \end{array}$$

a) Schätzen Sie den Parameter λ der Exponentialverteilung.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit zwischen einer und zehn Minuten liegt? Rechnen Sie mit dem in a) geschätzten Parameter. Falls Sie a) nicht gelöst haben, dann verwenden Sie für die Rechnung $\lambda = 0,25\,\text{min}^{-1}$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{10}(6,2\,\text{min} + ... + 3,2\,\text{min}) = \underline{5\,\text{min}} \\ \hat{\lambda} &= \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{5\,\text{min}} = \underline{0,2\,\text{min}^{-1}} \end{aligned}$$

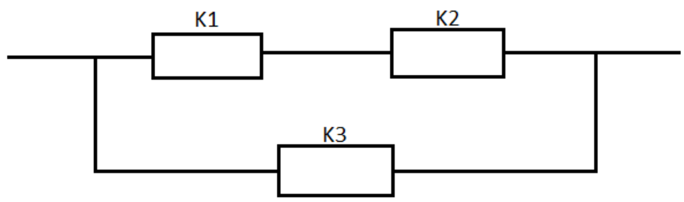
b)

$$\begin{aligned} P(1\,\text{min} < X < 10\,\text{min}) &= F_X(10\,\text{min}) - F_X(1\,\text{min}) \\ &= 1 - e^{-0,2\cdot 10} - (1 - e^{-0,2\cdot 1}) \\ &= e^{-0,2} - e^{-2} \approx \underline{0,6834} \end{aligned}$$

Rechnung mit $\lambda = 0,25$:

$$\begin{aligned} P(1\,\text{min} < X < 10\,\text{min}) &= F_X(10\,\text{min}) - F_X(1\,\text{min}) \\ &= 1 - e^{-0,25\cdot 10} - (1 - e^{-0,25\cdot 1}) \\ &= e^{-0,25} - e^{-2,5} \approx \underline{0,6967} \end{aligned}$$

6. Aufgabe: Das unten skizzierte System fällt aus, falls die Komponente K_3 sowie zusätzlich mindestens eine der Komponenten K_1 oder K_2 ausfallen.



Innerhalb einer gewissen Betriebsdauer fallen K_1 mit Wahrscheinlichkeit 0,05, K_2 mit Wahrscheinlichkeit 0,15 und K_3 mit Wahrscheinlichkeit $0,01$ aus. Berechnen Sie unter der Annahme unabhängiger Defekte an den einzelnen Komponenten die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der Betriebsdauer das System nicht ausfällt.

Lösung: K_i - K_i fällt $i = 1, ..., 3$, S- System fällt aus.

$$P(K_1) = 0,05, \quad P(K_2) = 0,15 \quad \text{und} \quad P(K_3) = 0,01.$$

$$S = (K_1 \cup K_2) \cap K_3$$

$$
\begin{aligned}
P(S) &= P\left((K_1 \cup K_2) \cap K_3\right) \\
&= P\left((K_1 \cup K_2)\right) \cdot P(K_3) \\
&= (P(K_1) + P(K_2) - P(K_1 \cap K_2)) \cdot P(K_3) \\
&= (P(K_1) + P(K_2) - P(K_1) \cdot P(K_2)) \cdot P(K_3) \\
&= (0,05 + 0,15 - 0,05 \cdot 0,15) \cdot 0,01 = \underline{0,001925} \\
P(S^c) &= 1 - P(S) = \underline{0,998075}
\end{aligned}
$$

oder auch so

$$
\begin{aligned}
P(S) &= P\left((K_1 \cup K_2) \cap K_3\right) \\
&= P\left((K_1 \cup K_2)\right) \cdot P(K_3) \\
&= (1 - ((1 - P(K_1)) \cdot (1 - P(K_2))) \cdot P(K_3) \\
&= (1 - (1 - 0,05) \cdot (1 - 0,15)) \cdot 0,01 = \underline{0,001925} \\
P(S^c) &= 1 - P(S) = \underline{0,998075}
\end{aligned}
$$

7. Aufgabe:

a) Bei einer Lotterie befinden sich unter 100000 Losen 10 Hauptgewinne. Bisher wurden keine Lose verkauft. Jemand kauft 150 Lose.

i. Wie ist die zufällige Anzahl X der Hauptgewinne unter den 150 gekauften Losen verteilt?

ii. Geben Sie eine einparametrige Verteilung, die die Verteilung von X gut approximiert, einschließlich dem konkreten Parameter an und begründen Sie dies kurz.

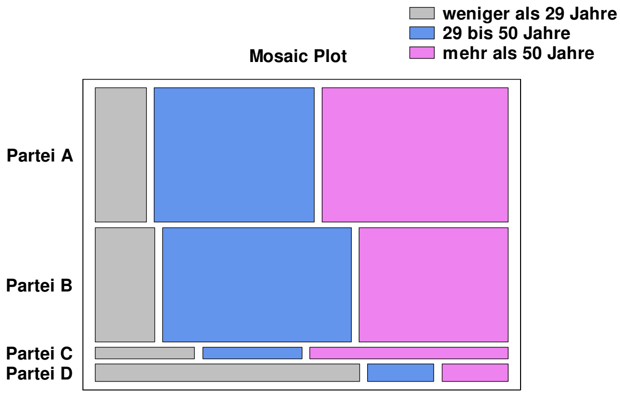
<u>Lösung:</u>

i. X ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 100000$, $M = 10$ und $n = 150$.

ii. Die hypergeometrische Verteilung kann durch die Binomialverteilung ($n/N = 0,0015 < 0,05$) approximiert werden. X ist näherungsweise binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = \frac{M}{N} = \frac{10}{100000} = 10^{-4}$.

Die Binomialverteilung kann durch die Poissonverteilung ($n = 150 > 30$ und $p = 10^{-4} < 0,05$) approximiert werden. X ist näherungsweise poissonverteilt mit $\lambda = n \cdot p = 150 \cdot 10^{-4} = \underline{0,015}$

b) Bei einer Untersuchung über Lebensalter und Wählerverhalten erhält man aus den Angaben von 1000 Personen folgenden Plot.

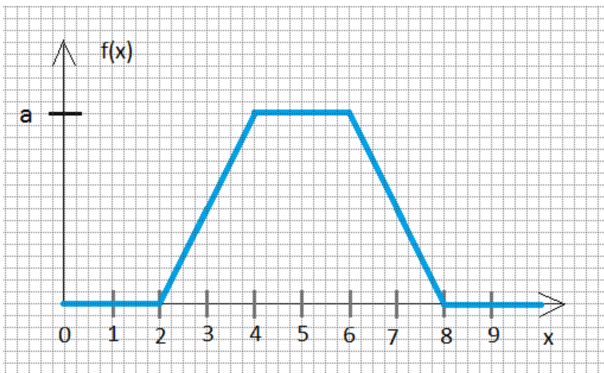


Sind die Parteienprefärenz und die Altersgruppe unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
Lösung: Die Parteienprefärenz ist von der Altergruppe abhängig. So ist z.B. bei der Partei D der Anteil der jungen Wähler deutlich größer.

c) Die erwartete Körpergröße der Studenten soll durch eine Stichprobe geschätzt werden. Es gibt zwei Vorschläge, die Studenten in Schichten einzuteilen. Der erste Vorschlag ist eine Einteilung nach Geschlecht, d.h. in der ersten Schicht sind die Frauen und in der zweiten die Männer. Der zweite Vorschlag ist, die Studienfächer als Schichten zu wählen. (1. Schicht: BWL-Studenten, 2. Schicht: WIW-Studenten und 3. Schicht: B&L-Studenten). Begründen Sie, welcher der beiden Vorschläge besser ist.

Löung: Der erste Vorschlag ist besser. Dort gibt es Unterschiede zwischen den Schichten hinsichtlich der mittleren Körpergröße. Beim zweiten Vorschlag hingegen erwartet man keine Unterschiede hinsichtlich der mittleren Körpergröße zwischen den 3 Schichten. Beim ersten Vorschlag gibt es einen deutlich positiven Schichtungseffekt, beim zweiten Vorschlag wird der Schichtungseffekt nahe 0 sein.

d) Bestimmen Sie a so, dass f die Dichte einer stetigen Zufallsvariable ist.



Lösung:

$$\int_2^8 f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot a + 2\cdot a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot a = 4\cdot a = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{a = \frac{1}{4} = 0,25}$$