Modul Stochastik für Mathematiker

(Teil 1: Maß- und Integrationstheorie)

Studienjahr 2021/22

Dr. Udo Lorz

TU Bergakademie Freiberg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Stand: 3. Februar 2022

Modul Stochastik für Mathematiker

- Im Wintersemester: Maß- und Integrationstheorie,
  zwei SWS Vorlesung und eine SWS Übung,
  Zwischenprüfung von 20 min Dauer mit Wichtungsfaktor 1.
- Im Sommersemester: Wahrscheinlichkeitstheorie,
  drei SWS Vorlesung und zwei SWS Übung,
  Modulprüfung von 30 min Dauer mit Wichtungsfaktor 2.
- Große Teile der Wahrscheinlichkeitstheorie bauen auf den allgemeinen Aussagen der Maß- und Integrationstheorie auf.
- Die Maß- und Integrationstheorie ist aber auch in der Analysis wichtig, z.B. der Begriff des Lebesgue-Maßes.

Links

- Lesender: Dr. Udo Lorz
- Website des Lesenden:
  https://tu-freiberg.de/fakult1/organisation/dekanat/udo-lorz
  Kontaktdaten: Abschnitt „Kontakt“
  Materialien zur Vorlesung: Abschnitt „Wintersemester 2021/22“
- Übungsleiter: PD Dr. Felix Ballani
- Kontaktdaten: https://tu-freiberg.de/fakult1/sto/ballani

Literatur

- Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie.*
  Springer-Verlag, 7., korrigierte und aktualisierte Auflage, 2011.
- Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie.*
  Verlag Walter de Gruyter, 2. Auflage, 1992.

Bezeichnungen

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen.
- $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

- $X \neq \varnothing$ ist eine nichtleere Grundmenge.
- $A^c := X \backslash A \subseteq X$ bezeichnet das Komplement der Menge $A \subseteq X$.
- $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet die Potenzmenge der Menge X.

1.1 Definition

Unter einem Mengensystem $\mathfrak{M}$ über (auf, in) X versteht man eine nichtleeres System von Teilmengen $A \subseteq X$, d.h.

$$\varnothing \subset \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Man beachte: Die Elemente eines Mengensystems sind Mengen!

1.2 Definitionen

Ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ über X heißt ...

- durchschnittsabgeschlossen (durchschnittsstabil), falls für beliebige Mengen $A, B \in \mathfrak{M}$ gilt
$$A \cap B \in \mathfrak{M}.$$
- vereinigungsabgeschlossen (vereinigungsstabil), falls für beliebige Mengen $A, B \in \mathfrak{M}$ gilt
$$A \cup B \in \mathfrak{M}.$$
- abgeschlossen bezüglich der Komplementbildung (komplementstabil), falls für eine beliebige Menge $A \in \mathfrak{M}$ gilt
$$A^c \in \mathfrak{M}.$$

1.3 Definition

Unter einer Algebra $\mathfrak{A}$ über X versteht man ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften.

(A1) $X \in \mathfrak{A}$.

(A2) Für $A \in \mathfrak{A}$ ist $A^c \in \mathfrak{A}$ (komplementstabil).

(A3) Für $A, B \in \mathfrak{A}$ ist $A \cup B \in \mathfrak{A}$ (vereinigungsstabil).

1.4 Beispiele

(1) Die kleinstmögliche Algebra

$$\mathfrak{A} = \{\varnothing, X\}.$$

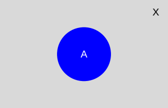
(2) Die größtmögliche Algebra

$$\mathfrak{A} = \mathcal{P}(X).$$

1.5 Beispiel

Die nächst größere Algebra als die Kleinste

$$\mathfrak{A} = \{\varnothing, A, A^c, X\} \quad \text{für} \quad \varnothing \subset A \subset X.$$

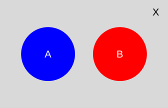


1.6 Beispiel

Etwas größer...

$$\mathfrak{A} = \{\varnothing, A, A^c, B, B^c, A \cup B, A^c \cap B^c, X\} \quad \text{für}$$

$$\varnothing \subset A, B \subset X, A \cap B = \varnothing.$$



1.7 Beispiel und Definition

Sei $\mathfrak{Z}_n = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine endliche Zerlegung von X, d.h. die Mengen $A_i \subset X$, $i = 1, \ldots, n$, sind paarweise disjunkt, und es gilt $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$.

Dann ist das Mengensystem

$$\mathfrak{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \colon I \in \mathcal{P}(I_n) \right\}, \quad \text{wobei} \quad I_n = \{1, \ldots, n\},$$

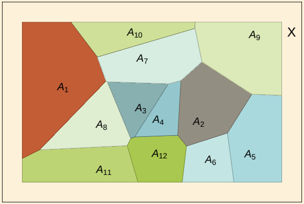
eine Algebra über X.

Die Algebra $\mathfrak{A}$ besteht aus allen möglichen Vereinigungen von Mengen A_i.

Wegen $\operatorname{card}(\mathcal{P}(I_n)) = 2^n$ ist auch $\operatorname{card}(\mathfrak{A}) = 2^n$.

Für $\varnothing \in \mathcal{P}(I_n)$ ist $\bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing \in \mathfrak{A}$.

Beipiel für eine endliche Zerlegung



1.8 Beispiel

Sei

$$X = [a, b), \quad -\infty < a < b < \infty, \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{M} = \{[c, d) \colon a \leqslant c \leqslant d \leqslant b\}.$$

Das Mengensystem $\mathfrak{M}$ ist weder vereinigungs- noch komplementstabil und daher keine Algebra über X.
Jedoch ist das Mengensystem $\mathfrak{A}_{a,b}$ aller Vereinigungen von endlich vielen, paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{A}_{a,b} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i) \colon a \leqslant c_i \leqslant d_i \leqslant b, [c_i, d_i) \cap [c_j, d_j) = \varnothing, \forall i \neq j, n \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Algebra über $[a, b)$.

1.9 Definition

Unter einer σ-Algebra $\mathfrak{X}$ über X versteht man ein Mengensystem $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften.

(S1) $X \in \mathfrak{X}$.

(S2) Für $A \in \mathfrak{X}$ ist $A^c \in \mathfrak{X}$.

(S3) Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{X}$ ist $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

1.10 Beispiele

(1) Jede endliche Algebra ist eine σ-Algebra (vgl. Beispiele 1.4 bis 1.7).

(2) Die größtmögliche σ-Algebra $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$.

(3) Sei X eine überabzählbare Menge. Dann ist das Mengensystem

$$\mathfrak{X} = \{A \subseteq X \colon A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra über X.

1.11 Aufgabe

Zeigen Sie, dass ein Mengensystem $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau dann eine σ-Algebra über X ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(S1') $\varnothing \in \mathfrak{X}$.

(S2) Für $A \in \mathfrak{X}$ ist $A^c \in \mathfrak{X}$.

(S3') Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{X}$ ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{X}$.

1.12 Satz und Definition

Sei $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra über X und $X_0 \subseteq X$. Dann ist das Mengensystem

$$\mathfrak{X} \cap X_0 := \{A \cap X_0 \colon A \in \mathfrak{X}\}$$

eine σ-Algebra über X_0.

Die σ-Algebra $\mathfrak{X} \cap X_0$ über X_0 wird Spur-σ-Algebra bzw. kurz Spur von $\mathfrak{X}$ auf X_0 genannt.

1.13 Beispiel

Wir betrachten die σ-Algebra

$$\mathfrak{X} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

über $X = \{a,b,c\}$, und es sei $X_0 = \{a,c\}$. Dann ist

$$\mathfrak{X} \cap X_0 = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}.$$

1.14 Satz

Sei $I \neq \varnothing$ eine beliebige Indexmenge. Für $i \in I$ sei $\mathfrak{X}_i$ eine σ-Algebra über X. Dann ist

$$\mathfrak{X} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i$$

eine σ-Algebra über X.

1.15 Definitionen

Sei $\mathfrak{E}$ ein Mengensystem über X und

$$\mathscr{X}(\mathfrak{E}) := \{\mathfrak{X} \colon \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } X\}$$

das System der $\mathfrak{E}$ umfassenden σ-Algebren, dann heißt

$$\sigma(\mathfrak{E}) := \bigcap_{\mathfrak{X} \in \mathscr{X}(\mathfrak{E})} \mathfrak{X}$$

die von $\mathfrak{E}$ erzeugte σ-Algebra.
Das Mengensystem $\mathfrak{E}$ wird Erzeugendensystem, erzeugendes System bzw. Erzeuger von $\sigma(\mathfrak{E})$ genannt.

1.16 Beispiele

(1) Sei $\mathfrak{E} = \{\varnothing\}$ oder $\mathfrak{E} = \{X\}$. Dann ist, vgl. Beispiel 1.4 (1),

$$\sigma(\mathfrak{E}) = \{\varnothing, X\}.$$

(2) Sei $\varnothing \subset A \subset X$ beliebig und $\mathfrak{E} = \{A\}$. Dann ist, vgl. Beispiel 1.5,

$$\sigma(\mathfrak{E}) = \{\varnothing, A, A^c, X\}.$$

(3) Seien $\varnothing \subset A, B \subset X$ mit $A \cap B = \varnothing$ beliebig und $\mathfrak{E} = \{A, B\}$.
Dann ist, vgl. Beispiel 1.6,

$$\sigma(\mathfrak{E}) = \{\varnothing, A, A^c, B, B^c, A \cup B, A^c \cap B^c, X\}.$$

(4) Sei $\mathfrak{Z}_n = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine endliche Zerlegung von X.
Dann ist, vgl. Beispiel 1.7,

$$\sigma(\mathfrak{Z}_n) = \left\{\bigcup_{i \in I} A_i \colon I \in \mathcal{P}(I_n)\right\}, \quad \text{wobei} \quad I_n = \{1, \ldots, n\}.$$

1.17 Satz

Die von einem Mengensystem $\mathfrak{E}$ über X erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{E})$ ist die kleinste σ-Algebra über X, die $\mathfrak{E}$ umfasst und damit eindeutig bestimmt.

1.18 Aufgabe

Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, falls $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra über X ist.

1.19 Satz

(1) Für jedes Mengensystem $\mathfrak{E}$ über X gilt $\sigma(\sigma(\mathfrak{E})) = \sigma(\mathfrak{E})$.

(2) Für Mengensysteme $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ über X mit $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}_2$ folgt $\sigma(\mathfrak{E}_1) \subseteq \sigma(\mathfrak{E}_2)$.

(3) Für Mengensysteme $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ über X mit $\mathfrak{E}_1 \subseteq \sigma(\mathfrak{E}_2)$ und $\mathfrak{E}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{E}_1)$ folgt $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_2)$.

(4) Für Mengensysteme $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ über X mit $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{E}_1)$ folgt $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_2)$.

1.20 Anmerkung

Unterschiedliche Erzeugendensysteme können dieselbe σ-Algebra erzeugen. Das Erzeugendensystem einer σ-Algebra ist somit nicht eindeutig bestimmt.

1.21 Definitionen

- Unter einem messbaren Raum versteht man ein Tupel $(X, \mathfrak{X})$, wobei X eine nichtleere Grundmenge und $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra über X ist.
- Die Mengen $A \subseteq X$ mit $A \in \mathfrak{X}$ heißen $\mathfrak{X}$-messbare Mengen bzw. kurz messbare Mengen.

1.22 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum (oder noch allgemeiner (X, τ) ein topologischer Raum) und $\mathfrak{O}$ das System der offenen Teilmengen $O \subseteq X$. Dann wird

$$\mathfrak{B}(X) := \sigma(\mathfrak{O})$$

die σ-Algebra der Borel-Mengen über X genannt.

Bezeichnungen für Spezialfälle

- $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, messbarer Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$
- $X = \mathbb{R}^d$, $\mathfrak{B}_d := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, messbarer Raum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$

1.23 Satz

Die σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathfrak{B}$ über $\mathbb{R}$ wird durch die folgenden Mengensysteme erzeugt

(1) $\mathfrak{M}_a := \{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen}\}$ abgeschlossene Mengen,
(2) $\mathfrak{I}_o := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ offene Intervalle,
(3) $\mathfrak{I}_{a,o} := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ rechts offene Intervalle.

1.24 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathfrak{B}$ über $\mathbb{R}$ durch die folgenden Mengensysteme erzeugt wird

(4) $\mathfrak{I}_{\infty,o} := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ linksseitig unendliche offene Intervalle,
(5) $\mathfrak{I}_{o,a} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ links offene Intervalle,
(6) $\mathfrak{I}_a := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ abgeschlossene Intervalle,
(7) $\mathfrak{I}_{o,\mathbb{Q}} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ offene Intervalle mit rationalen Endpunkten,
(8) $\mathfrak{I}_{a,o,\mathbb{Q}} := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ rechts offene Intervalle mit rationalen Endpunkten,

1.24 Aufgabe (Fortsetzung)

(9) $\mathfrak{I}_{\infty,a} := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$ linksseitig unendliche abgeschlossene Intervalle,
(10) $\mathfrak{I}_{\infty,o,\mathbb{Q}} := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}$ linksseitig unendliche offene Intervalle mit rationalem Randpunkt,
(11) $\mathfrak{I}_{o,\infty} := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ rechtsseitig unendliche offene Intervalle,
(12) $\mathfrak{I}_{a,\infty} := \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ rechtsseitig unendliche abgeschlossene Intervalle.

1.25 Anmerkung

Beispiele für Erzeugendensysteme für $\mathfrak{B}_d$, $d \in \mathbb{N}$,

(1) $\mathfrak{K}_o^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| < r, x_0 \in \mathbb{R}^d, r > 0\}$
offene d-dimensionale Kugeln,

(2) $\mathfrak{I}_o^d := \left\{ \bigtimes_{i=1}^{d} (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i = 1, \ldots, d \right\}$
offene d-dimensionale Intervalle (Quader),

(3) $\mathfrak{I}_{a,o}^d := \left\{ \bigtimes_{i=1}^{d} [a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i = 1, \ldots, d \right\}$
rechts offene d-dimensionale Intervalle (Quader),

(4) $\mathfrak{I}_{\infty,o}^d := \left\{ \bigtimes_{i=1}^{d} (-\infty, b_i) : b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d \right\}$
linksseitig unendliche offene d-dimensionale Intervalle,

(5) $\mathfrak{I}_{\infty,a,\mathbb{Q}}^d := \left\{ \bigtimes_{i=1}^{d} (-\infty, b_i] : b_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \ldots, d \right\}$ linksseitig unendliche abgeschlossene d-dimensionale Intervalle mit rationalen Randpunkten.

2.1 Definitionen

Sei $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

- Die durch
$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \quad \text{für} \quad B \subseteq Y$$
definierte Abbildung
$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$
wird Urbildabbildung bzgl. f genannt.
- Die Menge $f^{-1}(B)$ heißt Urbild der Menge $B \subseteq Y$ bzgl. f.
- Für $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ wird
$$f^{-1}(\mathfrak{N}) := \left\{ f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{N} \right\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$
das Mengensystem der Urbilder von $\mathfrak{N}$ bzgl. f genannt.

2.2 Satz

Die Urbildabbildung f^{-1} hat folgende Eigenschaften.

(1) $f^{-1}(Y) = X$.

(2) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$ mit $B_1 \subseteq B_2$ gilt $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(3) $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$ für $B \in \mathcal{P}(Y)$.

(4) Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge. Dann gilt
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{für} \quad B_i \in \mathcal{P}(Y), i \in I.$$

2.3 Aufgabe

Beweisen Sie diese weiteren Eigenschaften der Urbildabbildung.

(5) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(6) Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge. Dann gilt
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{für} \quad B_i \in \mathcal{P}(Y), i \in I.$$

(7) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$ gilt $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

(8) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ gilt $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \emptyset$.

(9) Seien $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2 \subseteq \mathcal{P}(Y)$ Mengensysteme. Dann gilt
$$f^{-1}(\mathfrak{N}_1) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{N}_2) \subseteq \mathcal{P}(X).$$

2.4 Satz und Definition

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{Y}$ eine σ-Algebra über Y. Dann ist das Mengensystem

$$f^{-1}(\mathfrak{Y}) = \{f^{-1}(B)\colon B \in \mathfrak{Y}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

eine σ-Algebra über X.
Die σ-Algebra $f^{-1}(\mathfrak{Y})$ über X wird Urbild-σ-Algebra von $\mathfrak{Y}$ bzgl. f genannt.

2.5 Aufgabe

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra über X. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathfrak{G} = \{B \subseteq Y\colon f^{-1}(B) \in \mathfrak{X}\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

eine σ-Algebra über Y ist.

2.6 Definitionen

Seien $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ messbare Räume.

- Die Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbar, falls

  $$f^{-1}(\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X},$$

  d.h.

  $$f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{Y}$$

  (die Urbilder $\mathfrak{Y}$-messbarer Mengen bzgl. f sind $\mathfrak{X}$-messbar).
- Man nennt f eine Abbildung messbarer Räume und schreibt dafür

  $$(X, \mathfrak{X}) \xrightarrow{f} (Y, \mathfrak{Y}),$$

  falls $f\colon X \to Y$ eine $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbare Abbildung ist.

2.7 Beispiele

(1) Konstante Abbildungen $f\colon X \to Y$ sind bezüglich beliebiger σ-Algebren $\mathfrak{X}$ über X und $\mathfrak{Y}$ über Y $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbar.

(2) Sei $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$. Dann sind alle Abbildungen $f\colon X \to Y$ bezüglich beliebiger σ-Algebren $\mathfrak{Y}$ über Y $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbar.

(3) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, die nur endlich viele Werte $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$ annimmt und $\{y_i\} \in \mathfrak{Y}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist f bezüglich jeder σ-Algebra $\mathfrak{X}$ über X $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbar, die alle Urbilder $f^{-1}(\{y_i\})$, $i = 1, \ldots, n$, enthält.

2.8 Satz

Seien $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ messbare Räume und $\mathfrak{E}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{Y}$. Die Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbar, wenn

$$f^{-1}(\mathfrak{E}) \subseteq \mathfrak{X}.$$

2.9 Satz

Gegeben seien messbare Räume $(X, \mathfrak{X})$, $(Y, \mathfrak{Y})$ und $(Z, \mathfrak{Z})$. Ist die Abbildung

$$f\colon X \to Y \quad (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\text{-messbar}$$

und die Abbildung

$$g\colon Y \to Z \quad (\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})\text{-messbar},$$

so ist die Abbildung

$$g \circ f\colon X \to Z \quad (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})\text{-messbar}.$$

2.10 Definitionen

- Reellwertige Abbildungen $f\colon X \to \mathbb{R}$ werden als Funktionen bezeichnet.
- Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Für den Spezialfall $(Y, \mathfrak{Y}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ wird die $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$-messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ kurz $\mathfrak{X}$-messbar genannt.

2.11 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Für die $\mathfrak{X}$-Messbarkeit der Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend

(1) $\{x \in X\colon f(x) < c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(2) $\{x \in X\colon f(x) \leqslant c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(3) $\{x \in X\colon f(x) > c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(4) $\{x \in X\colon f(x) \geqslant c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

2.12 Beispiel und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Die Indikatorfunktion $I_A \colon X \to \mathbb{R}$ der Menge $A \subseteq X$ mit

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in A, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin A, \end{cases}$$

ist $\mathfrak{X}$-messbar, falls $A \in \mathfrak{X}$.

2.13 Definition

Für den noch spezielleren Fall $X = Y = \mathbb{R}$ und entsprechend $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{B}$ wird die $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-messbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kurz messbar genannt.

2.14 Beispiele

(1) Indikatorfunktionen I_B mit $B \in \mathfrak{B}$ sind messbar.

(2) Monotone Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind messbar.

(3) Stetige Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind messbar.

2.15 Definition

Die Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

wird Erweiterung (Kompaktifizierung) der reellen Zahlen genannt. Für $\overline{\mathbb{R}}$ wird vereinbart, dass

$$-(\pm\infty) = \mp\infty$$

und

$$|-\infty| = |\infty| = \infty$$

sowie

$$-\infty < x \quad \text{und} \quad x < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.15 Definition (Fortsetzung)

Für die Addition bzw. Subtraktion soll gelten

$$\begin{aligned} x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty \quad &\text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}, \\ x - (\pm\infty) = -(\pm\infty) + x = \mp\infty \quad &\text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \infty - (-\infty) &= \infty, \\ \pm\infty + (\pm\infty) &= \pm\infty, \\ \pm\infty + (\mp\infty) &\text{ ist nicht definiert}, \\ \pm\infty - (\pm\infty) &\text{ ist nicht definiert}, \end{aligned}$$

d.h. diese Operationen sind auf $\overline{\mathbb{R}}$ nicht vollständig definiert.

2.15 Definition (Fortsetzung)

Weiterhin soll für die Multiplikation gelten

$$\begin{aligned} x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty \quad &\text{für} \quad x > 0, \\ x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty \quad &\text{für} \quad x < 0, \\ 0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 &= 0, \\ \infty \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot (\infty) &= \pm\infty, \\ (-\infty) \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot (-\infty) &= \mp\infty, \end{aligned}$$

d.h. die Multiplikation ist im Unterschied zur Addition und Subtraktion auf $\overline{\mathbb{R}}$ vollständig definiert. Schließlich setzen wir noch

$$\infty^a = \infty \quad \text{für} \quad a > 0.$$

2.16 Satz

(1) Das Mengensystem

$$\overline{\mathfrak{B}} := \left\{B \subseteq \overline{\mathbb{R}} \colon B \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}\right\}$$

ist eine σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} &\cup \{B \cup \{\infty\} \colon B \in \mathfrak{B}\} \\ &\cup \{B \cup \{-\infty\} \colon B \in \mathfrak{B}\} \\ &\cup \{B \cup \{-\infty, \infty\} \colon B \in \mathfrak{B}\}. \end{aligned}$$

(3) Weiterhin gilt

$$\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathbb{R} = \left\{B \cap \mathbb{R} \colon B \in \overline{\mathfrak{B}}\right\} = \mathfrak{B},$$

d.h. die Spur-σ-Algebra von $\overline{\mathfrak{B}}$ auf $\mathbb{R}$ ist gerade die σ-Algebra $\mathfrak{B}$ der BOREL-Mengen über $\mathbb{R}$.

2.17 Definitionen

- Die σ-Algebra $\overline{\mathfrak{B}}$ über $\overline{\mathbb{R}}$ wird die erweiterte σ-Algebra der BOREL-Mengen über $\overline{\mathbb{R}}$ genannt.
- Eine Abbildung $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt numerische Funktion.
- Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Dann wird die $(\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{B}})$-messbare numerische Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ kurz $\mathfrak{X}$-messbar genannt.
- $(\mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}})$-messbare numerische Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ und $(\overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{B}})$-messbare numerische Funktionen $f \colon \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißen kurz messbar.

2.18 Satz

Die erweiterte σ-Algebra $\overline{\mathfrak{B}}$ der BOREL-Mengen über $\overline{\mathbb{R}}$ wird durch folgende Mengensysteme erzeugt

(1) $\overline{\mathfrak{I}}_{\infty,o} := \{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\}$,

(2) $\overline{\mathfrak{I}}_{\infty,a} := \{[-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$,

(3) $\overline{\mathfrak{I}}_{o,\infty} := \{(c, \infty] : c \in \mathbb{R}\}$,

(4) $\overline{\mathfrak{I}}_{a,\infty} := \{[c, \infty] : c \in \mathbb{R}\}$.

2.19 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Für die $\mathfrak{X}$-Messbarkeit von f ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend

(1) $\{x \in X : f(x) < c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(2) $\{x \in X : f(x) \leqslant c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(3) $\{x \in X : f(x) > c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(4) $\{x \in X : f(x) \geqslant c\} \in \mathfrak{X}$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

2.20 Beispiele

(1) Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$-messbare Funktion mit $\{f(x) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist f auch $\big(\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{B}}\big)$-messbar.

(2) Sei $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$. Dann sind alle numerischen Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbar.

(3) Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum, $A \in \mathfrak{X}$ und

$$f(x) = \infty \cdot I_A(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \in A, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist die numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbar.

(4) Monotone numerische Funktionen $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ sind messbar.

2.21 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktionen. Dann gilt

(1) $\{x \in X : f(x) < g(x)\} \in \mathfrak{X}$,

(2) $\{x \in X : f(x) \leqslant g(x)\} \in \mathfrak{X}$,

(3) $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathfrak{X}$ und

(4) $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \mathfrak{X}$,

d.h. die betrachteten Mengen sind $\mathfrak{X}$-messbar.

2.22 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktionen. Dann sind auch die numerischen Funktionen

(1) $af + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,

(2) $f + g$ und $f - g$, soweit auf ganz X definiert,

(3) $f \cdot g$ und

(4) f/g, falls $g(x) \notin \{-\infty, 0, \infty\}$ für alle $x \in X$,

$\mathfrak{X}$-messbar.

2.23 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktionen. Dann ist auch

$$af + bg,$$

soweit auf ganz X definiert, eine $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion.

2.24 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktionen. Dann sind auch die numerischen Funktionen

(1) $\min\{f, g\}$ und

(2) $\max\{f, g\}$

$\mathfrak{X}$-messbar.

2.25 Definitionen

Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion.

- Dann wird die numerische Funktion

  $$f^+ := \max\{f, 0\} \overset{!}{\geqslant} 0$$

  positiver Anteil von f bzw. Positivteil von f und
- die numerische Funktion

  $$f^- := \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\} \overset{!}{\geqslant} 0$$

  negativer Anteil von f bzw. Negativteil von f genannt.

2.26 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion. Dann sind auch der positive Anteil f^+ von f und der negative Anteil f^- von f $\mathfrak{X}$-messbar.

2.27 Satz

Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Dann gilt für alle $x \in X$

(1) $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ und

(2) $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Insbesondere sind somit $f^+ + f^-$ und $f^+ - f^-$ auf ganz X definiert.

2.28 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion. Dann ist auch die numerische Funktion $|f|$ $\mathfrak{X}$-messbar.

2.29 Aufgabe

Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Es gilt $f^+ \leqslant |f|$ und $f^- \leqslant |f|$.

(2) Für $a \geqslant 0$ gilt $(af)^+ = af^+$ und $(af)^- = af^-$.

(3) Für $a < 0$ gilt $(af)^+ = -af^-$ und $(af)^- = -af^+$.

(4) Sei $g\colon X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative numerische Funktion. Dann gilt $(fg)^+ = f^+g$ und $(fg)^- = f^-g$.

(5) Sei $h\colon Y \to X$ eine Abbildung. Dann gilt $(f \circ h)^+ = f^+ \circ h$ und $(f \circ h)^- = f^- \circ h$.

2.30 Aufgabe

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die numerischen Funktionen

(1) $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$,

(2) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$,

(3) $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \inf\limits_{k \geqslant n} f_k$ und

(4) $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n := \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \sup\limits_{k \geqslant n} f_k$

$\mathfrak{X}$-messbar sind.

2.31 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere punktweise. Dann ist auch

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

eine $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion.

3.1 Definitionen

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X. Unter einem Inhalt auf $\mathfrak{A}$ versteht man eine Mengenfunktion $\mu \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

(I1) $\mu(\varnothing) = 0$ und

(I2) μ ist endlich additiv, d.h. für beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$ (paarweise disjunkte Mengen) gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

3.2 Satz (Eigenschaften eines Inhalts) und Definitionen

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$.
Dann besitzt μ folgende Eigenschaften.

(1) μ ist monoton, d.h für $A, B \in \mathfrak{A}, A \subseteq B$, folgt $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

(2) μ ist subtraktiv, d.h für $A, B \in \mathfrak{A}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty$, folgt

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$$

(3) Für beliebige Mengen $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

3.2 Satz (Fortsetzung)

(4) μ ist endlich subadditiv, d.h. für beliebige Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Insbesondere gilt für $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) \quad \text{(Subadditivität)}.$$

3.3 Definitionen

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X. Unter einem Prämaß auf $\mathfrak{A}$ versteht man eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

(P1) $\mu(\varnothing) = 0$ und

(P2) μ ist σ-additiv, d.h. für eine beliebige Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$ (paarweise disjunkte Mengen) und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

3.4 Aufgabe und Definition

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass μ σ-subadditiv ist, d.h. für eine beliebige Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

3.5 Definitionen

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X.

- Ein Prämaß μ auf $\mathfrak{A}$ heißt endlich, falls $\mu(X) < \infty$.
- Ein Prämaß μ auf $\mathfrak{A}$ heißt σ-endlich, falls eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ existiert mit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \quad \text{und} \quad \mu(A_n) < \infty \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.6 Satz (Stetigkeitseigenschaften eines Prämaßes) und Definition

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$. Dann gilt für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $A_n \downarrow \varnothing$, d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, sowie $\mu(A_1) < \infty$, dass

$$\mu(A_n) \downarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. das Prämaß μ ist stetig von oben in der leeren Menge.

3.7 Satz

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X. Jede endliche Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty)$, die endlich additiv und stetig von oben in der leeren Menge ist, ist ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$.

3.8 Satz

Sei $X = [a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und

$$\mathfrak{A}_{a,b} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} [c_i,d_i) \colon a \leqslant c_i \leqslant d_i \leqslant b, [c_i,d_i) \cap [c_j,d_j) = \varnothing, \forall i \neq j, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die in Beispiel 1.8 eingeführte Algebra über $[a,b)$. Dann wird durch

$$\nu_{a,b}\left(\bigcup_{i=1}^{n} [c_i,d_i) \right) := \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)$$

ein endliches Prämaß auf $\mathfrak{A}_{a,b}$ definiert.

3.9 Definitionen

Sei $(X,\mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Unter einem Maß auf $(X,\mathfrak{X})$ versteht man eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathfrak{X} \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften

(M1) $\mu(\varnothing) = 0$ und

(M2) μ ist σ-additiv, d.h. für eine beliebige Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{X}$ mit $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$ (paarweise disjunkte Mengen) gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

3.10 Definitionen

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum.

- Ein Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ heißt endlich, falls $\mu(X) < \infty$.
- Ist $\mu(X) = 1$, so heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß.
- Ein Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ heißt σ-endlich, falls eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{X}$ existiert mit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \quad \text{und} \quad \mu(A_n) < \infty \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.11 Definitionen

- Unter einem Maßraum versteht man ein Tripel $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, wobei X eine nichtleere Grundmenge, $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra über X und μ ein Maß auf dem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ ist.
- Ein Maßraum $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ heißt endlich bzw. σ-endlich, wenn das Maß μ endlich bzw. σ-endlich ist.
- Der endliche Maßraum $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum, wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

3.12 Beispiel und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein beliebiger messbarer Raum. Dann wird durch

$$\mu(A) = 0 \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{X}$$

ein endliches Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ definiert und Nullmaß genannt.

3.13 Beispiel

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein beliebiger messbarer Raum. Dann wird durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad A = \varnothing, \\ \infty & \text{für} \quad A \neq \varnothing, \end{cases} \quad \text{für} \quad A \in \mathfrak{X},$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ definiert. Dieses Maß ist nicht σ-endlich.

3.14 Beispiel und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein beliebiger messbarer Raum. Dann wird durch

$$\eta(A) := \begin{cases} \operatorname{card}(A) & \text{für} \quad A \text{ endlich}, \\ \infty & \text{für} \quad A \text{ unendlich}, \end{cases} \qquad \text{für} \quad A \in \mathfrak{X},$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ definiert. Das Maß η wird Zählmaß genannt.
Ist die Grundmenge X endlich, so ist das Maß η endlich.
Ist X überabzählbar, so ist η nicht σ-endlich.

3.15 Beispiel und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein beliebiger messbarer Raum und $x \in X$ beliebig fest. Dann wird durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in A, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin A, \end{cases} \qquad \text{für} \quad A \in \mathfrak{X},$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ definiert. Das Maß δ_x wird DIRAC-Maß in $x \in X$ genannt. Es ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.
Es gilt, vgl. Beispiel 2.12,

$$\delta_x(A) = I_A(x) \quad \text{für} \quad A \in \mathfrak{X} \quad \text{und} \quad x \in X.$$

3.16 Satz (Stetigkeitseigenschaften eines Maßes) und Definitionen

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $\mu \colon \mathfrak{X} \to [0, \infty]$ eine endlich additive Mengenfunktion mit $\mu(\varnothing) = 0$. Wir betrachten die Eigenschaften

(1) μ ist σ-additiv, d.h. μ ist ein Maß.

(2) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$ mit $A_n \uparrow A$,

d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gilt

$$\mu(A_n) \uparrow \mu(A) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. μ ist stetig von unten.

3.16 Satz (Fortsetzung)

(3) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$ mit $A_n \downarrow A$,

d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, sowie $\mu(A_1) < \infty$ gilt

$$\mu(A_n) \downarrow \mu(A) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. μ ist stetig von oben.

(4) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$ mit $A_n \downarrow \varnothing$,

d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, sowie $\mu(A_1) < \infty$ gilt

$$\mu(A_n) \downarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. μ ist stetig von oben in der leeren Menge.

3.16 Satz (Fortsetzung)

Dann bestehen folgende Beziehungen

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4).$$

Ist die Mengenfunktion μ endlich, so sind alle vier Eigenschaften äquivalent.

Zusammenfassung: Eigenschaften eines Maßes

Ein Maß μ auf einem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ besitzt die folgenden Eigenschaften.

(1) $\mu(\varnothing) = 0$, siehe (I1).

(2) μ ist endlich additiv, siehe (I2).

(3) μ ist monoton, siehe 3.2 (1).

(4) μ ist subtraktiv, siehe 3.2 (2).

(5) μ ist endlich subadditiv, siehe 3.2 (4).

(6) μ ist σ-subadditiv, siehe 3.4.

(7) μ ist σ-additiv, siehe (M2).

(8) μ ist stetig von unten, siehe 3.16 (2).

(9) μ ist stetig von oben, siehe 3.16 (3).

(10) μ ist stetig von oben in der leeren Menge, siehe 3.16 (4).

3.17 Satz (Maßübertragungssatz) und Definition

Seien $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathfrak{Y})$ ein messbarer Raum und $f\colon X \to Y$ eine $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbare Abbildung. Dann wird durch

$$\nu(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right) \quad \text{für} \quad B \in \mathfrak{Y}$$

ein Maß ν auf $(Y, \mathfrak{Y})$ definiert.
Das Maß ν wird Bildmaß von μ bzgl. f bzw. das von μ durch f auf $(Y, \mathfrak{Y})$ übertragene bzw. induzierte Maß genannt und mit

$$\mu \circ f^{-1}$$

bezeichnet.

3.18 Anmerkung

Die $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbare Abbildung $f\colon X \to Y$ ist nicht nur eine Abbildung messbarer Räume, vgl. Definition 2.6, sondern kann auch als Abbildung von Maßräumen aufgefasst werden. Dafür schreibt man

$$(X, \mathfrak{X}, \mu) \xrightarrow{f} (Y, \mathfrak{Y}, \mu \circ f^{-1}).$$

Der Maßübertragungssatz ist von grundlegender Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie.

3.19 Beispiel

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum, $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X} \cap X_0$ die Spur von $\mathfrak{X}$ auf $X_0 \subseteq X$ und μ_0 ein Maß auf $(X_0, \mathfrak{X}_0)$.
Ist $f\colon X_0 \to X$ die identische Abbildung, dann ist f wegen

$$f^{-1}(A) = A \cap X_0 \in \mathfrak{X}_0 \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{X}$$

$(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X})$-messbar. Somit wird durch $\mu(A) = \left(\mu_0 \circ f^{-1}\right)(A) = \mu_0(A \cap X_0)$ ein Maß μ auf $(X, \mathfrak{X})$ erzeugt, und es gilt $\mu(X) = \mu_0(X_0)$.

3.20 Satz und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $X_0 \in \mathfrak{X}$. Dann wird durch

$$\mu_{|X_0}(B) := \mu(B) \quad \text{für} \quad B \in \mathfrak{X} \cap X_0$$

ein Maß $\mu_{|X_0}$ auf $(X_0, \mathfrak{X} \cap X_0)$ definiert, und es gilt $\mu_{|X_0}(X_0) \leqslant \mu(X)$.
Das Maß $\mu_{|X_0}$ wird Einschränkung bzw. Restriktion von μ auf $(X_0, \mathfrak{X} \cap X_0)$ genannt.

3.21 Satz

Seien $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Maße auf demselben messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, \infty]$. Dann wird durch

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \mu_n(A) \quad \text{für} \quad A \in \mathfrak{X}$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ definiert.

3.22 Satz (Satz von Caratheodory, Maßfortsetzungssatz)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über der nichtleeren Menge X und ν ein σ-endliches Prämaß auf $\mathfrak{A}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf $(X, \sigma(\mathfrak{A}))$ mit

$$\mu(A) = \nu(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Das Maß μ ist σ-endlich.

3.23 Beispiel

Sei $X = [a, b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und

$$\mathfrak{A}_{a,b} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i) : a \leqslant c_i \leqslant d_i \leqslant b, [c_i, d_i) \cap [c_j, d_j) = \varnothing, \forall i \neq j, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die in Beispiel 1.8 eingeführte Algebra über $[a, b)$. Nach Satz 3.8 wird durch

$$\nu_{a,b}\left(\bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) \quad \text{für} \quad \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i) \in \mathfrak{A}_{a,b}$$

ein endliches Prämaß $\nu_{a,b}$ auf $\mathfrak{A}$ definiert. Dieses Prämaß lässt sich gemäß Satz 3.22 zu einem Maß $\lambda_{a,b}$ auf $\sigma(\mathfrak{A}_{a,b}) = \mathfrak{B} \cap [a, b)$ fortsetzen.

3.24 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum und $\mathfrak{E}$ ein durchschnittsabgeschlossenes Erzeugendensystem für $\mathfrak{X}$. Dann sind zwei Maße μ_1 und μ_2 auf $(X, \mathfrak{X})$ gleich, wenn gilt

(1) $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathfrak{E}$ und

(2) es existiert eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{E}$ mit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X \quad \text{und} \quad \mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.25 Folgerung

Zwei endliche Maße μ_1 und μ_2 auf einem messbarem Raum $(X, \mathfrak{X})$ sind genau dann gleich, wenn sie auf einem durchschnittsabgeschlossenen Erzeugendensystem für $\mathfrak{X}$ übereinstimmen, das die Grundmenge X enthält.

3.26 Definitionen

- Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \in \mathfrak{X}$ heißt μ-Nullmenge, falls $\mu(A) = 0$.
- Ein Maßraum $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ heißt vollständig, falls alle Teilmengen von μ-Nullmengen $\mathfrak{X}$-messbar sind.

3.27 Beispiele

(1) Der Maßraum $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ ist für beliebiges Maß μ vollständig.

(2) Ist die leere Menge die einzige μ-Nullmenge eines Maßraumes $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, so ist $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ vollständig.
So sind z.B. die Maßräume in den Beispielen 3.13 und 3.14 vollständig.

3.28 Satz und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und

$$\mathfrak{N}_\mu := \{N \subseteq X : \exists\, \mu\text{-Nullmenge } A \in \mathfrak{X} \text{ mit } N \subseteq A\}$$

das Mengensystem der Teilmengen von μ-Nullmengen. Dann gilt

(1) $\mathfrak{X}_\mu^* := \{A \cup N : A \in \mathfrak{X}, N \in \mathfrak{N}_\mu\}$ ist σ-Algebra über X mit $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^*$.

(2) Es gibt genau ein Maß μ^* auf $(X, \mathfrak{X}_\mu^*)$ mit der Eigenschaft

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{X}.$$

(3) Der Maßraum $(X, \mathfrak{X}_\mu^*, \mu^*)$ ist vollständig und wird die Vervollständigung von $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ genannt.

(4) Ist $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ vollständig, so gilt $\mathfrak{X}_\mu^* = \mathfrak{X}$.

3.29 Definition

Es sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und E eine Eigenschaft, so dass für alle Elemente $x \in X$ definiert ist, ob x diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Dann sagt man, die Eigenschaft E gilt μ-fast überall (abgekürzt μ-f.ü.) auf X bzw. μ-fast alle $x \in X$ besitzen die Eigenschaft E, falls

$$\{x \in X : x \text{ besitzt Eigenschaft } E \text{ nicht}\} \in \mathfrak{N}_\mu.$$

Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so sagt man auch μ-fast sicher (μ-f.s.) anstelle von μ-fast überall.

3.30 Beispiele

Es sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ numerische Funktionen.

(1) Die für alle Elemente $x \in X$ definierte Eigenschaft E sei, dass $f(x) = 0$. Gilt

$$\{x \in X : x \text{ besitzt Eigensch. } E \text{ nicht}\} = \{x \in X : f(x) \neq 0\} \in \mathfrak{N}_\mu,$$

so sagt man, dass $f = 0$ μ-fast überall.

(2) Die für alle Elemente $x \in X$ definierte Eigenschaft E sei, dass f nur reelle Werte annehme, d.h. $f(x) \in \mathbb{R}$. Gilt

$$\{x \in X : x \text{ besitzt Eigensch. } E \text{ nicht}\} = \{x \in X : |f(x)| = \infty\} \in \mathfrak{N}_\mu,$$

so sagt man, dass f μ-fast überall reellwertig bzw. μ-fast überall endlich ist.

3.30 Beispiele (Fortsetzung)

(3) Die für alle Elemente $x \in X$ definierte Eigenschaft E sei, dass $f(x) \leqslant g(x)$. Gilt

$$\{x \in X : x \text{ besitzt Eigensch. } E \text{ nicht}\} = \{x \in X : f(x) > g(x)\} \in \mathfrak{N}_\mu,$$

so sagt man, dass $f \leqslant g$ μ-fast überall.

In allen drei Beispielen ist die Menge $\{x \in X : x \text{ besitzt Eigenschaft } E \text{ nicht}\}$ im allgemeinen nicht $\mathfrak{X}$-messbar. Sind die numerischen Funktionen f und g jedoch $\mathfrak{X}$-messbar, so gilt nach Satz 2.21 hingegen jeweils $\{x \in X : x \text{ besitzt Eigenschaft } E \text{ nicht}\} \in \mathfrak{X}$ und diese Menge muss selbst eine μ-Nullmenge sein, damit die Eigenschaft E μ-fast überall gilt.

3.31 Definition

Sei μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann heißt die Funktion

$$F_\mu : \mathbb{R} \to [0, \infty)$$

mit

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x)) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

Verteilungsfunktion von μ.

3.32 Satz

Die Verteilungsfunktion F_μ eines endlichen Maßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ hat folgende Eigenschaften

(V1) F_μ ist monoton wachsend,

(V2) F_μ ist linksseitig stetig,

(V3) $\lim_{x \to -\infty} F_\mu(x) = 0$ und

(V4) $\lim_{x \to \infty} F_\mu(x) = \mu(\mathbb{R}) < \infty$.

3.33 Beispiele

(1) Sei δ_c das Dirac-Maß in $c \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$F_{\delta_c}(x) = I_{(c,\infty)}(x).$$

(2) Es sei

$$\nu(B) = \lambda_{a,b}(B \cap [a, b)) \quad \text{für} \quad B \in \mathfrak{B},$$

wobei $\lambda_{a,b}$ das Maß aus Beispiel 3.23 auf dem messbaren Raum $([a, b), \mathfrak{B} \cap [a, b))$ bezeichnet. Dann ist (vgl. Beispiel 3.19 mit $X_0 = [a, b), -\infty < a < b < \infty$) ν ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, und es gilt

$$F_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqslant a, \\ x - a & \text{für} \quad a < x \leqslant b, \\ b - a & \text{für} \quad x > b. \end{cases}$$

3.34 Satz

Sei F_μ die Verteilungsfunktion eines endlichen Maßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann gilt

(1) $\mu([a,b)) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$ für $-\infty < a < b < \infty$,

(2) $\mu(\{x\}) = \lim\limits_{y \downarrow x} F_\mu(y) - F_\mu(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

(3) F_μ ist genau dann stetig, falls $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.35 Satz

Endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sind durch ihre Verteilungsfunktion eindeutig bestimmt.

3.36 Satz

Zu jeder Funktion $F\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften (V1) bis (V4) gibt es ein eindeutig bestimmtes endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $F_\mu = F$.

3.37 Satz und Definition

Es existiert genau ein Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$\lambda([a,b)) = b - a \quad \text{für} \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Dieses Maß wird Lebesgue-Borel-Maß genannt.

3.38 Anmerkung

Das Maß $\lambda_{a,b}$ in Beispiel 3.23 ist die Einschränkung des Lebesgue-Borel-Maßes λ auf $([a,b), \mathfrak{B} \cap [a,b))$, d.h. $\lambda_{a,b} = \lambda_{|[a,b)}$, vgl. Satz 3.20.

3.39 Satz und Definition

Das Lebesgue-Borel-Maß λ besitzt folgende Eigenschaften.

(1) Für jede beschränkte Menge $B \in \mathfrak{B}$ gilt $\lambda(B) < \infty$.

(2) λ ist σ-endlich.

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(\{x\}) = 0$.

(4) Für jede abzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\lambda(A) = 0$. Insbesondere ist $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

(5) λ ist translationsinvariant, d.h.

$$\lambda(B) = \lambda(B + y) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad y \in \mathbb{R},$$

wobei

$$B + y := \{x + y \colon x \in B\} \in \mathfrak{B} \quad \text{für} \quad y \in \mathbb{R}$$

die um $y \in \mathbb{R}$ verschobene Menge $B \in \mathfrak{B}$ bezeichnet.

3.40 Satz

Jedes translationsinvariante Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$\mu([0,1)) = c, \qquad 0 < c < \infty,$$

hat die Form

$$\mu = c\lambda.$$

3.41 Definitionen

- Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^*, \lambda^*)$ die Vervollständigung des Maßraumes $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ gemäß Satz 3.28 und λ das Lebesgue-Borel-Maß. Dann wird λ^* als Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^*)$ bezeichnet.
- Die Mengen $A \in \mathfrak{B}^*$ werden Lebesgue-messbare Mengen genannt.
- Eine numerische Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, die $(\mathfrak{B}^*, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar ist, wird Lebesgue-messbar genannt.

3.42 Anmerkung und Definition

Sei $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine linksseitig stetige, monoton wachsende Funktion. Weiterhin sei $X = [a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und

$$\mathfrak{A}_{a,b} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i) \colon a \leqslant c_i \leqslant d_i \leqslant b, [c_i, d_i) \cap [c_j, d_j) = \varnothing, \forall i \neq j, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die in Beispiel 1.8 eingeführte Algebra über X. Analog Satz 3.8 kann man zeigen, dass durch

$$\nu_G \left(\bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} [G(d_i) - G(c_i)] \quad \text{für} \quad \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i) \in \mathfrak{A}_{a,b}$$

ein endliches Prämaß ν_G auf $\mathfrak{A}_{a,b}$ definiert wird. Dieses Prämaß kann analog dem LEBESGUE-BOREL-Maß zu einem Maß μ_G auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ fortgesetzt werden. Die Vervollständigung μ_G^* dieses Maßes auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^*)$ wird als LEBESGUE-STIELTJES-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^*)$ bezeichnet.

3.43 Anmerkungen

(1) Für $G(x) = x$ erhält man das LEBESGUE-Maß λ^* auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^*)$.

(2) Ist μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, so ist μ^* gerade das LEBESGUE-STIELTJES-Maß seiner Verteilungsfunktion F_μ.

3.44 Anmerkungen zum LEBESGUE-BOREL-Maß λ_d auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$

(1) Es existiert genau ein Maß λ_d auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ mit

$$\lambda_d \left(\bigtimes_{i=1}^{d} [a_i, b_i) \right) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

für $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \ldots, d$.

(2) Für jede beschränkte Menge $B \in \mathfrak{B}_d$ gilt $\lambda_d(B) < \infty$.

(3) Es gilt $\lambda_d(B) = 0$ für alle niederdimensionalen Mengen $B \in \mathfrak{B}_d$, $\dim(B) \in \{0, \ldots, d-1\}$.

(4) λ_d ist translationsinvariant.

(5) λ_d ist bewegungsinvariant.

3.45 Definitionen

- Sei analog $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d^*, \lambda_d^*)$ die Vervollständigung des Maßraumes $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \lambda_d)$, wobei λ_d das LEBESGUE-BOREL-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ ist, so wird λ_d^* LEBESGUE-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d^*)$ genannt.
- Die Mengen $A \in \mathfrak{B}_d^*$ werden LEBESGUE-messbare Mengen genannt.
- Eine numerische Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$, die $(\mathfrak{B}_d^*, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar ist, wird LEBESGUE-messbar genannt.

4.1 Aufgabe

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von Indikatorfunktionen, vgl. 2.12.

(1) Für $A, B \subseteq X$ gilt $I_{A\cap B}(x) = I_A(x) \cdot I_B(x)$.

(2) Für $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \varnothing$ gilt $I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x)$.

(3) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$I_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}.$$

(4) Allgemein gilt für $A, B \subseteq X$ $I_{A\cup B}(x) = \max\{I_A(x), I_B(x)\}$.

(5) Ist $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum, so ist I_A genau dann $\mathfrak{X}$-messbar, wenn $A \in \mathfrak{X}$.

4.2 Definition

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Die Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt $\mathfrak{X}$-einfach, wenn sie sich als endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von $\mathfrak{X}$-messbaren Mengen darstellen lässt, d.h. f hat die Darstellung

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{X}, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}.$$

4.3 Anmerkungen und Definition

- Die Darstellung einer $\mathfrak{X}$-einfachen Funktion ist nicht eindeutig.
- Insbesondere existiert stets eine sogenannte Normaldarstellung, bei der die $\mathfrak{X}$-messbaren Mengen $A_i, i = 1, \dots, n$, eine endliche Zerlegung von X bilden.
- Jedoch ist auch die Normaldarstellung einer $\mathfrak{X}$-einfachen Funktion nicht eindeutig.

4.4 Beispiel

Seien $A_1, A_2 \in \mathfrak{X}$ mit $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f = c_1 I_{A_1} + c_2 I_{A_2}$$

keine Normaldarstellung der $\mathfrak{X}$-einfachen Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$.
Setzt man

$$B_1 = (A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c, \qquad B_2 = A_1 \backslash A_2 = A_1 \cap A_2^c,$$
$$B_3 = A_2 \backslash A_1 = A_1^c \cap A_2 \quad \text{und} \quad B_4 = A_1 \cap A_2,$$

so ist

$$f = 0\, I_{B_1} + c_1 I_{B_2} + c_2 I_{B_3} + (c_1 + c_2) I_{B_4}$$

eine Normaldarstellung von f. Weitere Normaldarstellungen von f erhält man, wenn man an Stelle der Mengen B_i, $i = 1, \dots, 4$, die Mengen $B_i \cap C$ und $B_i \cap C^c$ mit $C \in \mathfrak{X}$ verwendet.

4.5 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathfrak{X}$-einfach, wenn sie $\mathfrak{X}$-messbar und ihr Wertebereich W_f endlich ist.

4.6 Aufgabe

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum sowie f und g $\mathfrak{X}$-einfache Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch

(1) f^+ und f^-,

(2) $|f|$,

(3) $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$,

(4) $af + bg$ für $a, b \in \mathbb{R}$,

(5) $f \cdot g$,

(6) fI_A für $A \in \mathfrak{X}$ sowie

(7) f/g, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$,

$\mathfrak{X}$-einfache Funktionen sind.

4.7 Aufgabe

Seien $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ messbare Räume, $f\colon X \to Y$ eine $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbare Abbildung und $g\colon Y \to \mathbb{R}$ eine $\mathfrak{Y}$-einfache Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f$ eine $\mathfrak{X}$-einfache Funktion ist.

4.8 Definitionen

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E}^+$ die Menge der nichtnegativen $\mathfrak{X}$-einfachen Funktionen $f\colon X \to [0, \infty)$. Dann wird durch

$$J_\mu(f) := \sum_{y \in W_f} y \cdot \mu\left(f^{-1}(\{y\})\right)$$

ein Funktional $J_\mu\colon \mathcal{E}^+ \to [0, \infty]$ definiert. Das Funktional J_μ wird μ-Integral genannt. Weitere übliche Schreibweisen für das μ-Integral $J_\mu(f)$ von f sind

$$\int_X f \, d\mu \quad \text{bzw.} \quad \int_X f(x) \, \mu(dx).$$

4.9 Beispiele

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum.

(1) Für $A \in \mathfrak{X}$ gilt

$$\int_X I_A \, d\mu = \int_X I_A(x) \, \mu(dx) = \mu(A).$$

(2) Für $A \in \mathfrak{X}$ und $0 \leqslant c < \infty$ gilt

$$\int_X cI_A \, d\mu = \int_X cI_A(x) \, \mu(dx) = c \, \mu(A).$$

4.10 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Für $A_i \in \mathfrak{X}$ und $0 \leqslant c_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^n c_i I_{A_i} \right) d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}(x) \right) \mu(dx) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i).$$

4.11 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \mathcal{E}^+$ und $0 \leqslant a, b < \infty$. Dann gilt

$$\int_X (af + bg) \, d\mu = a \int_X f \, d\mu + b \int_X g \, d\mu \quad \text{bzw.}$$

$$\int_X (af(x) + bg(x)) \, \mu(dx) = a \int_X f(x) \, \mu(dx) + b \int_X g(x) \, \mu(dx).$$

4.12 Aufgabe

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \mathcal{E}^+$ mit $f \leqslant g$. Zeigen Sie, dass dann gilt

(1)
$$\int_X g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X (g - f) \, d\mu,$$

(2)
$$\int_X f \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu \quad \text{und}$$

(3)
$$\int_X (g - f) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu, \quad \text{falls} \quad \int_X f \, d\mu < \infty.$$

4.13 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $f_n \leqslant f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g \in \mathcal{E}^+$ mit $g \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt

$$\int_X g\,d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

4.14 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $f_n \leqslant f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $g_n \leqslant g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu.$$

4.15 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein messbarer Raum. Eine nichtnegative Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ ist genau dann $\mathfrak{X}$-messbar, wenn sie als Limes einer aufsteigenden Folge nichtnegativer $\mathfrak{X}$-einfacher Funktionen darstellbar ist.

4.16 Definitionen

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum.

- Es sei $\mathcal{M}^+$ die Menge der nichtnegativen $\mathfrak{X}$-messbaren Funktionen $f\colon X \to [0,\infty]$.
- Für $f \in \mathcal{M}^+$ wird
  $$\int_X f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$
  das μ-Integral der Funktion f bezüglich des Maßes μ auf dem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ genannt, wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ eine monoton aufsteigende Folge nichtnegativer $\mathfrak{X}$-einfacher Funktionen ist mit $f_n \uparrow f$ für $n \to \infty$.
- Eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ heißt μ-integrierbar, falls $\int_X f\,d\mu < \infty$.

4.17 Anmerkungen

- Die Definition 4.16 ist korrekt, da nach Satz 4.15 die Existenz einer approximierenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ gesichert ist und nach Folgerung 4.14 der Wert des Integrals unabhängig von der approximierenden Folge und damit eindeutig bestimmt ist.
- Für $f \in \mathcal{M}^+$ gilt
$$0 \leqslant \int\limits_X f\,d\mu \leqslant \infty.$$

4.18 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \mathcal{M}^+$ und $0 \leqslant a, b < \infty$. Dann gilt
$$\int\limits_X (af + bg)\,d\mu = a\int\limits_X f\,d\mu + b\int\limits_X g\,d\mu.$$

4.19 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \mathcal{M}^+$ mit $f \leqslant g$. Dann gilt
$$\int\limits_X f\,d\mu \leqslant \int\limits_X g\,d\mu.$$

4.20 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$. Dann ist
$$\int\limits_X f\,d\mu = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

4.21 Folgerung

(1) Die Aussage des Satzes 4.18 behält ihre Gültigkeit auch für den Fall, dass man
$$a, b \in [0, \infty]$$
zulässt.

(2) Die Aussage des Satzes 4.19 behält ihre Gültigkeit, wenn lediglich
$$f \leqslant g \quad \mu\text{-fast überall}$$
gilt.

4.22 Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Eine numerische Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ-integrierbar, wenn sie $\mathfrak{X}$-messbar ist und gilt
$$\int\limits_X |f| \, d\mu < \infty.$$

4.23 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Eine $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn gilt
$$\int\limits_X f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int\limits_X f^- \, d\mu < \infty.$$

4.24 Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Unter dem μ-Integral bzw. kurz Integral einer μ-integrierbaren Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ versteht man
$$\int\limits_X f \, d\mu := \int\limits_X f^+ \, d\mu - \int\limits_X f^- \, d\mu.$$

4.25 Anmerkungen

- Für eine nichtnegative μ-integrierbare Funktion f gilt
$$f^+ = f \quad \text{und} \quad f^- \equiv 0.$$
Folglich ist die Definition 4.24 konsistent mit Definition 4.16.
- Für eine μ-integrierbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt
$$\int_X f\, d\mu \in \mathbb{R}.$$

4.26 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Für eine μ-integrierbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt stets
$$\mu\left(\{x \in X\colon f(x) = \pm\infty\}\right) = 0,$$
d.h. f ist μ-fast überall endlich.

4.27 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

(1) af ist μ-integrierbar und

(2)
$$\int_X af\, d\mu = a \int_X f\, d\mu.$$

4.28 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbare Funktionen und $f + g$ auf ganz X definiert, so gilt

(1) $f + g$ ist μ-integrierbar und

(2)
$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

4.29 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbare Funktionen, $a, b \in \mathbb{R}$ und $af + bg$ auf ganz X definiert, so gilt

(1) $af + bg$ ist μ-integrierbar und

(2)
$$\int_X (af + bg)\, d\mu = a \int_X f\, d\mu + b \int_X g\, d\mu.$$

4.30 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion, so gilt
$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leqslant \int_X |f|\, d\mu.$$

4.31 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbare Funktionen mit $f \leqslant g$ μ-fast überall auf X, so gilt
$$\int_X f\, d\mu \leqslant \int_X g\, d\mu.$$

4.32 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktionen mit $f = g$ μ-fast überall auf X.

(1) Sind f und g nichtnegativ, so gilt
$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

(2) Ist f μ-integrierbar, so ist auch g μ-integrierbar, und es gilt
$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

4.33 Definitionen

- Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum, $N \in \mathfrak{X}$ ein μ-Nullmenge und $f\colon N^c \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{X} \cap N^c$-messbare numerische Funktion. Dann wird f eine μ-fast überall definierte $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion genannt.
- Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und f eine μ-fast überall definierte $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion. Dann heißt f μ-integrierbar, wenn sie zu einer auf ganz X definierten μ-integrierbaren Funktion $\widehat{f}$ fortgesetzt werden kann. Das Integral

$$\int_X f \, d\mu := \int_X \widehat{f} \, d\mu$$

wird μ-Integral von f genannt.

4.34 Anmerkung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und f eine μ-fast überall definierte $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion. Durch

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in N^c, \\ 0 & \text{für} \quad x \in N, \end{cases}$$

wird f zu einer $\mathfrak{X}$-messbaren numerischen Funktion auf ganz X fortgesetzt. Dabei bezeichnet $N^c \in \mathfrak{X}$ die Definitionsmenge von f. Für jede weitere Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf X gilt $\widetilde{f} = \widehat{f}$ μ-fast überall. Gemäß Satz 4.32 ist also keine oder jede solche Fortsetzung μ-integrierbar. Im letzteren Fall besitzen folglich alle Fortsetzungen dasselbe μ-Integral. Daher ist die Definition 4.33 des μ-Integrals einer μ-fast überall definierten $\mathfrak{X}$-messbaren numerischen Funktion korrekt.

4.35 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbare Funktionen, so gilt

(1) $f + g$ ist eine μ-fast überall definierte $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion,

(2) $f + g$ ist μ-integrierbar (im Sinne der Definition 4.33) und

(3)
$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

4.36 Satz (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levi)

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+$ eine monoton wachsende Folge. Dann gilt

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

4.37 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+$ eine beliebige Folge. Dann gilt

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} g_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X g_k \, d\mu.$$

4.38 Satz (Lemma von Fatou)

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+$ eine beliebige Folge. Dann gilt

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

4.39 Satz (Satz von der majorisierten Konvergenz, Satz von Lebesgue)

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Die numerischen Funktionen $f, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, seien $\mathfrak{X}$-messbar, und es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall. Ferner sei $g \geqslant 0$ eine μ-integrierbare Funktion, so dass $|f_n| \leqslant g$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann sind die Funktionen f und $f_n, n \in \mathbb{N}$, μ-integrierbar, und es gilt

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

4.40 Satz

Gegeben seien ein Maßraum $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, ein messbarer Raum $(Y, \mathfrak{Y})$ und eine $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbare Abbildung $h \colon X \to Y$.

(1) Ist $f \colon Y \to [0, \infty]$ eine nichtnegative $\mathfrak{Y}$-messbare Funktion, so gilt

$$\int_Y f \, d(\mu \circ h^{-1}) = \int_X (f \circ h) \, d\mu = \int_X f(h(x)) \, \mu(dx).$$

(2) Ist $f \colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige $\mathfrak{Y}$-messbare numerische Funktion, so ist f genau dann $(\mu \circ h^{-1})$-integrierbar, wenn $f \circ h$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt ebenfalls

$$\int_Y f \, d(\mu \circ h^{-1}) = \int_X (f \circ h) \, d\mu = \int_X f(h(x)) \, \mu(dx).$$

4.41 Anmerkung

Die $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-messbare Abbildung $h: X \to Y$ ist eine Abbildung von Maßräumen, vgl. die Anmerkung zum Maßübertragungssatz 3.17.

$$(X, \mathfrak{X}, \mu) \xrightarrow{h} (Y, \mathfrak{Y}, \mu \circ h^{-1}).$$

Das Bildmaß $\mu \circ h^{-1}$ wurde mit Hilfe des ursprünglichen Maßes μ erklärt. Analog verhält es sich mit dem Integral bezüglich des Bildmaßes $\mu \circ h^{-1}$. Es wird ebenfalls mit Hilfe des Integrals bezüglich μ erklärt.
Das ist die grundlegende Aussage dieses Satzes, der von großer Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist.

4.42 Definitionen

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Eine numerische Funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ-integrierbar über A für $A \in \mathfrak{X}$, wenn $f I_A$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_A f\, d\mu := \int_X f I_A\, d\mu$$

und nennt

$$\int_A f\, d\mu$$

das μ-Integral von f über A.

4.43 Aufgabe

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann für jede Menge $A \in \mathfrak{X}$ die Funktion f μ-integrierbar über A ist.

4.44 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbare Funktionen. Gilt für alle $A \in \mathfrak{X}$

$$\int_A f\, d\mu \leqslant \int_A g\, d\mu,$$

so ist $f \leqslant g$ μ-fast überall.

5.1 Satz und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$. Dann wird durch

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{für} \quad A \in \mathfrak{X}$$

ein Maß ν auf $(X, \mathfrak{X})$ definiert. Für das Maß ν verwendet man die Bezeichnung $f\mu$. Die Funktion f wird Dichtefunktion des Maßes ν bezüglich des Maßes μ bzw. kurz Dichte von ν bezüglich μ genannt.

5.2 Anmerkung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$. Für die Gesamtmasse von $f\mu$ gilt

$$(f\mu)(X) = \int_X f \, d\mu \in [0, \infty].$$

Auch bei endlichem Maß μ kann $f\mu$ ein unendliches Maß sein.

5.3 Beispiel

Sei speziell $(X, \mathfrak{X}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\lambda\!\!\lambda$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x) \quad \text{für} \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Dann ist

$$(f\lambda\!\!\lambda)(B) = \frac{1}{b-a} \lambda\!\!\lambda(B \cap [a, b]) \quad \text{für} \quad B \in \mathfrak{B}$$

und insbesondere

$$(f\lambda\!\!\lambda)(\mathbb{R}) = 1,$$

d.h. $f\lambda\!\!\lambda$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

5.4 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$.

(1) Ist $g \colon X \to [0, \infty]$ ebenfalls eine nichtnegative $\mathfrak{X}$-messbare Funktion, so gilt

$$\int_X g \, d(f\mu) = \int_X gf \, d\mu.$$

(2) Ist $g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion, so ist g genau dann $f\mu$-integrierbar, wenn gf μ-integrierbar ist, und es gilt

$$\int_X g \, d(f\mu) = \int_X gf \, d\mu.$$

5.5 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^+$.

(1) Gilt $f_1 = f_2$ μ-fast überall, so folgt

$$f_1\mu = f_2\mu.$$

(2) Ist f_1 oder f_2 μ-integrierbar, so folgt aus $f_1\mu = f_2\mu$, dass

$$f_1 = f_2 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

5.6 Definitionen

- Ein Maß ν auf dem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ heißt absolut stetig bezüglich des Maßes μ auf $(X, \mathfrak{X})$ bzw. μ-stetig, in Zeichen $\nu \ll \mu$, wenn für $A \in \mathfrak{X}$ aus $\mu(A) = 0$ stets $\nu(A) = 0$ folgt.
- Gilt $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$, so nennt man die Maße μ und ν auf dem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ äquivalent und schreibt dafür $\mu \sim \nu$.
- Zwei Maße μ und ν auf einem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ heißen gegenseitig singulär bzw. kurz singulär, in Zeichen $\mu \perp \nu$, falls es eine Menge $A \in \mathfrak{X}$ gibt mit $\mu(A) = 0$ und $\nu(A^c) = 0$.

5.7 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$. Dann gilt

$$f\mu \ll \mu.$$

5.8 Satz (Satz von Radon-Nikodym) und Definition

Sei μ ein σ-endliches Maß auf einem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ und ν ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ mit $\nu \ll \mu$. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ mit

$$\nu = f\mu.$$

Die Funktion f heißt Radon-Nikodym-Ableitung des Maßes ν bezüglich des Maßes μ und man bezeichnet sie auch mit dem Symbol $\frac{d\nu}{d\mu}$.

5.9 Anmerkungen

(1) Die RADON-NIKODYM-Ableitung $\frac{d\nu}{d\mu}$ ist nicht eindeutig bestimmt. Je zwei Varianten von $\frac{d\nu}{d\mu}$ sind μ-fast überall gleich.

(2) Das Maß ν ist genau dann σ-endlich, wenn $\frac{d\nu}{d\mu}$ μ-fast überall reellwertig ist.

(3) Das Maß ν ist genau dann endlich, wenn $\frac{d\nu}{d\mu}$ μ-integrierbar ist.

(4) Sei ν ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit einer stetig differenzierbaren Verteilungsfunktion F_ν und ν sei absolut stetig bezüglich des LEBESGUE-BOREL-Maßes λ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, so gilt

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = F_\nu' \quad \lambda\text{-fast überall.}$$

5.10 Folgerung

Sei μ ein σ-endliches Maß auf einem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ und ν ein Maß auf $(X, \mathfrak{X})$ mit $\nu \ll \mu$.

(1) Sei $g\colon X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative $\mathfrak{X}$-messbare Funktion. Dann gilt

$$\int_X g\, d\nu = \int_X g \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

(2) Sei $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{X}$-messbare numerische Funktion. Dann ist g genau dann ν-integrierbar, wenn $g\frac{d\nu}{d\mu}$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_X g\, d\nu = \int_X g \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

6.1 Definitionen

- Sei λ das LEBESGUE-BOREL-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann heißt eine λ-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ LEBESGUE-BOREL-integrierbar bzw. kurz LB-integrierbar.
- Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\lambda^*, \lambda^*)$ die Vervollständigung des Maßraumes $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$, d.h. λ^* ist das LEBESGUE-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\lambda^*)$, so nennt man eine λ^*-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ LEBESGUE-integrierbar bzw. kurz L-integrierbar.

6.2 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $(X, \mathfrak{X}_\mu^*, \mu^*)$ dessen Vervollständigung. Eine numerische Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann μ^*-integrierbar, wenn eine μ-integrierbare Funktion $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert mit $f = g$ μ-fast überall. Unter diesen Bedingungen gilt

$$\int_X f\, d\mu^* = \int_X g\, d\mu.$$

6.3 Definition

Für eine LEBESGUE-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ nennt man das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda^*$$

das LEBESGUE-Integral von f und verwendet dafür auch die Schreibweisen

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\lambda^*(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\,d\lambda^* = \int\limits_{\mathbb{R}} g\,d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,\lambda(dx) =: \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,dx,$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ die LEBESGUE-BOREL-integrierbare Funktion mit $f = g$ λ-fast überall gemäß Satz 6.2 bezeichnet.

6.3 Definition (Fortsetzung)

Analog verwendet man bei Integralen über messbare Mengen $B \in \mathfrak{B}^*_{\lambda}$, $B = A \cup N$ mit $A \in \mathfrak{B}$ und $N \in \mathfrak{N}_{\lambda}$, vgl. Satz 3.28, die Schreibweisen

$$\int\limits_{B} f(x)\,dx := \int\limits_{B} f(x)\,\lambda^*(dx) = \int\limits_{B} f\,d\lambda^* = \int\limits_{\mathbb{R}} f I_B\,d\lambda^* = \int\limits_{\mathbb{R}} g I_A\,d\lambda = \int\limits_{A} g\,d\lambda = \int\limits_{A} g(x)\,\lambda(dx) =: \int\limits_{A} g(x)\,dx,$$

wobei gI_A die LEBESGUE-BOREL-integrierbare Funktion mit $fI_B = gI_A$ λ-fast überall ist.

Diese speziellen Schreibweisen für Integrale bezüglich des LEBESGUE- bzw. des LEBESGUE-BOREL-Maßes besagen nur, dass auf die Angabe des Maßes λ^* bzw. λ verzichtet werden kann.

6.4 Satz

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ RIEMANN-integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist f auch LEBESGUE-integrierbar über $[a, b]$, und es gilt

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

d.h. LEBESGUE-Integral und RIEMANN-Intergral stimmen überein.

6.5 Anmerkungen

(1) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ LEBESBUE-integrierbar und $-\infty < a < b < \infty$. Dann gilt

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b)} f(x)\,dx = \int\limits_{(a,b]} f(x)\,dx = \int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx.$$

(2) Da für RIEMANN-integrierbare Funktionen beide Integrale übereinstimmen, gelten für solche Funktionen alle Resultate, die für das RIEMANN-Integral gelten, auch für das LEBESGUE-Integral.

(3) Wenn man Integrierbarkeit und Integrale einer Funktion f über Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet, reicht es, wenn die Funktion f auf dem Intervall I definiert ist, da jede auf I definierte integrierbare Funktion f zu einer über I integrierbaren auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion $\widehat{f}$ fortgesetzt werden kann, indem man $\widehat{f} = 0$ außerhalb von I setzt.

6.6 Beispiel

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2$. Dann gilt

$$\int\limits_{[1,2]} f(x)\,dx = \int\limits_1^2 f(x)\,dx = 7.$$

6.7 Beispiel

Die Funktion $I_{\mathbb{Q}}$ ist nicht RIEMANN-integrierbar auf dem Intervall $[0,1]$, aber sie ist LEBESGUE-integrierbar über der Menge $[0,1]$, und es gilt

$$\int\limits_{[0,1]} I_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0.$$

6.8 Satz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht notwendig beschränktes Intervall und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ RIEMANN-integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von I. Dann ist f genau dann LEBESGUE-integrierbar über I, wenn $|f|$ uneigentlich RIEMANN-integrierbar auf I ist. In diesem Fall stimmen LEBESGUE-Integral und RIEMANN-Intergral überein.

6.9 Beispiel (Gegenbeispiel)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ für $x > 0$. Das uneigentliche RIEMANN-Integral

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

existiert, das uneigentliche RIEMANN-Integral

$$\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx$$

hingegen nicht. Daher ist die Funktion f auch nicht LEBESGUE-integrierbar über $I = (0,\infty)$.

Problemstellungen zur Motivation

1. Gegeben: Maßräume $(X_i, \mathfrak{X}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $n = 2, 3, \ldots$,
   Gesucht:
   (1) Eine geeignete σ-Algebra $\mathfrak{X}$ über dem kartesischen Produkt
   $$X = \bigtimes_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \ldots \times X_n,$$
   der Grundmengen $X_i, i = 1, \ldots, n$.
   (2) Ein Maß μ auf dem messbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$ mit der Eigenschaft
   $$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i).$$
2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen
   - dem Integral bezüglich des „Produkt"-Maßes μ und
   - den Integralen bezüglich der „Komponenten"-Maße μ_i, $i = 1, \ldots, n$?

7.1 Definitionen

Für $i = 1, \ldots, n$, $n = 2, 3, \ldots$, sei $(X_i, \mathfrak{X}_i)$ ein messbarer Raum und
$$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \ldots \times X_n$$
das kartesische Produkt der Grundmengen $X_i, i = 1, \ldots, n$.

- Die Abbildung
  $$\pi_k\colon \bigtimes_{i=1}^{n} X_i \to X_k \quad \text{mit} \quad \pi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$
  nennt man die k-te Projektionsabbildung.
- Für $A_k \subseteq X_k$, $k = 1, \ldots, n$, wird das Urbild der k-ten Projektionsabbildung
  $$\pi_k^{-1}(A_k) = X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times A_k \times X_{k+1} \times \ldots \times X_n$$
  als Zylindermenge bezeichnet.

7.1 Definitionen (Fortsetzung)

- Unter dem Produkt der messbaren Räume $(X_i, \mathfrak{X}_i), i = 1, \ldots, n$, versteht man den messbaren Raum
  $$\bigtimes_{i=1}^{n} (X_i, \mathfrak{X}_i) := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} X_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i \right),$$
  wobei $$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i := \mathfrak{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}_n := \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathfrak{X}_i) \right),$$
  d.h. $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$ ist die kleinste σ-Algebra über $\bigtimes_{i=1}^{n} X_i$, bezüglich der alle Projektionsabbildungen $\pi_k, k = 1, \ldots, n$, $\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_k\right)$-messbar sind.
- Die σ-Algebra $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$ wird Produkt-σ-Algebra genannt.

7.2 Satz und Definition

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $(X_i, \mathfrak{X}_i)$ ein messbarer Raum. Dann gilt für die Produkt-σ-Algebra
$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i = \sigma\left(\{A_1 \times \ldots \times A_n \colon A_i \in \mathfrak{X}_i, i = 1, \ldots, n\}\right),$$
d.h. die Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$ wird auch vom System der Rechteckmengen
$$\{A_1 \times \ldots \times A_n \colon A_i \in \mathfrak{X}_i, i = 1, \ldots, n\}$$
erzeugt.

7.3 Satz

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $(X_i, \mathfrak{X}_i)$ ein messbarer Raum und $\mathfrak{E}_i \subseteq \mathfrak{X}_i$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{X}_i$. Dann gilt für die Produkt-σ-Algebra

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathfrak{E}_i)\right).$$

7.4 Definition

Es sei $X_1 \neq \varnothing, X_2 \neq \varnothing$ und $A \subseteq X_1 \times X_2$. Für $x_1 \in X_1$ bzw. $x_2 \in X_2$ bezeichnet man die Mengen

$$A_{x_1} := \{x_2 \in X_2 \colon (x_1, x_2) \in A\}$$

$$A^{x_2} := \{x_1 \in X_1 \colon (x_1, x_2) \in A\}$$

als Schnitt der Menge A an der Stelle $x_1 \in X_1$ bzw. $x_2 \in X_2$.

7.5 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Für $A \subseteq X_1 \times X_2$ gilt $(A^c)_{x_1} = (A_{x_1})^c$ und $(A^c)^{x_2} = (A^{x_2})^c$.

(2) Sei $I \neq \varnothing$ eine beliebige Indexmenge.
Dann gilt für $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)_{x_1} = \bigcup_{i \in I} (A_i)_{x_1} \quad \text{und} \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{x_2} = \bigcup_{i \in I} (A_i)^{x_2}$$

sowie

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)_{x_1} = \bigcap_{i \in I} (A_i)_{x_1} \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{x_2} = \bigcap_{i \in I} (A_i)^{x_2}.$$

7.6 Satz

Für $i = 1, 2$ sei $(X_i, \mathfrak{X}_i)$ ein messbarer Raum.

(1) Ist $A \in \mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2$, dann ist

$$A_{x_1} \in \mathfrak{X}_2 \quad \text{für jedes} \quad x_1 \in X_1 \quad \text{und}$$
$$A^{x_2} \in \mathfrak{X}_1 \quad \text{für jedes} \quad x_2 \in X_2.$$

(2) Ist $f \colon X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2$-messbare Funktion, dann gilt

$$f(x_1, \cdot) \colon X_2 \to \overline{\mathbb{R}} \quad \text{ist } \mathfrak{X}_2\text{-messbar für jedes} \quad x_1 \in X_1 \quad \text{und}$$
$$f(\cdot, x_2) \colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}} \quad \text{ist } \mathfrak{X}_1\text{-messbar für jedes} \quad x_2 \in X_2.$$

7.7 Satz

Für $i = 1, 2$ sei $(X_i, \mathfrak{X}_i, \mu_i)$ ein σ-endlicher Maßraum. Dann gibt es genau ein Maß μ auf dem messbaren Raum $(X_1 \times X_2, \mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2)$ mit

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2), \quad A_i \in \mathfrak{X}_i, i = 1, 2.$$

Das Maß μ ist wiederum σ-endlich. Für $A \in \mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2$ gilt

$f_1 \colon X_1 \to [0, \infty]$ mit $f_1(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$ ist $\mathfrak{X}_1$-messbar,

$f_2 \colon X_2 \to [0, \infty]$ mit $f_2(x_2) = \mu_1(A^{x_2})$ ist $\mathfrak{X}_2$-messbar und

$$\mu(A) = \int\limits_{X_1} f_1(x_1)\,\mu_1(dx_1) = \int\limits_{X_2} f_2(x_2)\,\mu_2(dx_2) = \int\limits_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\,\mu_1(dx_1) = \int\limits_{X_2} \mu_1(A^{x_2})\,\mu_2(dx_2).$$

7.8 Anmerkung und Definitionen

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $(X_i, \mathfrak{X}_i, \mu_i)$ ein σ-endlicher Maßraum. Es gibt genau ein Maß μ auf dem messbaren Raum $\left(\bigtimes_{i=1}^n X_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{X}_i\right)$ mit

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n), \quad A_i \in \mathfrak{X}_i, i = 1, \ldots, n.$$

Das Maß μ ist wiederum σ-endlich. Es wird das Produkt der Maße bzw. kurz Produktmaß von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ genannt und man schreibt dafür auch

$$\bigotimes_{i=1}^n \mu_i := \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n := \mu.$$

Unter dem Produkt der Maßräume bzw. kurz Produktraum von $(X_i, \mathfrak{X}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$, versteht man den σ-endlichen Maßraum

$$\bigtimes_{i=1}^n (X_i, \mathfrak{X}_i, \mu_i) := \left(\bigtimes_{i=1}^n X_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{X}_i, \bigotimes_{i=1}^n \mu_i\right).$$

7.9 Satz (Satz von Tonelli)

Für $i = 1, 2$ sei $(X_i, \mathfrak{X}_i, \mu_i)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f \colon X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ eine $\mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2$-messbare Funktion. Dann gilt

$f_1 \colon X_1 \to [0, \infty]$ mit $f_1(x_1) = \int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mu_2(dx_2)$ ist $\mathfrak{X}_1$-messbar,

$f_2 \colon X_2 \to [0, \infty]$ mit $f_2(x_2) = \int\limits_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mu_1(dx_1)$ ist $\mathfrak{X}_2$-messbar und

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f \; d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{X_1} f_1\,d\mu_1 = \int\limits_{X_2} f_2\,d\mu_2.$$

7.10 Anmerkung

Die letzte Aussage des Satzes von Tonelli, die Hauptaussage, in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned}\int\limits_{X_1 \times X_2} f \; d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) \; (\mu_1 \otimes \mu_2)\,(d(x_1, x_2)) \\ &= \int\limits_{X_1} f_1\,d\mu_1 = \int\limits_{X_1}\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\; \mu_2(dx_2)\,\mu_1(dx_1) \\ &= \int\limits_{X_2} f_2\,d\mu_2 = \int\limits_{X_2}\int\limits_{X_1} f(x_1, x_2)\; \mu_1(dx_1)\,\mu_2(dx_2)\end{aligned}$$

lässt deren Bedeutung besser erkennen.

7.11 Satz (Satz von Fubini)

Für $i = 1, 2$ sei $(X_i, \mathfrak{X}_i, \mu_i)$ ein σ-endlicher Maßraum und die Funktion $f\colon X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar.

(1) Dann gilt

- die Funktion $f(x_1, \cdot)$ ist für μ_1-fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2-integrierbar und
- die Funktion $f(\cdot, x_2)$ ist für μ_2-fast alle $x_2 \in X_2$ μ_1-integrierbar.

(2) Setzt man

$$A_1 = \{x_1 \in X_1\colon f(x_1, \cdot) \text{ ist } \mu_2\text{-integrierbar}\} \text{ und analog}$$
$$A_2 = \{x_2 \in X_2\colon f(\cdot, x_2) \text{ ist } \mu_1\text{-integrierbar}\},$$

so ist $A_i \in \mathfrak{X}_i$ für $i = 1, 2$ und die μ_1- bzw. μ_2-fast überall definierten Funktionen

$$f_1(x_1) = \int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\, \mu_2(dx_2) \quad \text{bzw.} \quad f_2(x_2) = \int\limits_{X_1} f(x_1, x_2)\, \mu_1(dx_1)$$

sind μ_1-integrierbar über A_1 bzw. μ_2-integrierbar über A_2.

7.11 Satz (Satz von Fubini, Fortsetzung)

(3) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X_1 \times X_2} f \; d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) \; (\mu_1 \otimes \mu_2)\,(d(x_1, x_2)) \\
&= \int\limits_{A_1} f_1\, d\mu_1 = \int\limits_{A_1}\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2) \; \mu_2(dx_2)\, \mu_1(dx_1) \\
&= \int\limits_{A_2} f_2\, d\mu_2 = \int\limits_{A_2}\int\limits_{X_1} f(x_1, x_2) \; \mu_1(dx_1)\, \mu_2(dx_2)
\end{aligned}$$

7.12 Folgerung

Es seien $(X_1, \mathfrak{X}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathfrak{X}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume.
Ist $f\colon X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2$-messbare Funktion und eines der Integrale

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} |f| \; d(\mu_1 \otimes \mu_2),$$
$$\int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} |f(x_1, x_2)|\, \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1),$$
$$\int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} |f(x_1, x_2)|\, \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)$$

endlich, so sind alle drei Integrale endlich und gleich. Die Funktion f ist $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar, und es gelten die Aussagen von Satz 7.11.

7.13 Anmerkungen

(1) Unter Berücksichtigung von 4.32 (2) kann die Aussage (3) des Satzes 7.11 in der üblicherweise verwendeten Form

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X_1 \times X_2} f \; d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) \; (\mu_1 \otimes \mu_2)\,(d(x_1, x_2)) \\
&= \int\limits_{X_1} f_1\, d\mu_1 = \int\limits_{X_1}\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2) \; \mu_2(dx_2)\, \mu_1(dx_1) \\
&= \int\limits_{X_2} f_2\, d\mu_2 = \int\limits_{X_2}\int\limits_{X_1} f(x_1, x_2) \; \mu_1(dx_1)\, \mu_2(dx_2)
\end{aligned}$$

geschrieben werden.

7.13 Anmerkungen (Fortsetzung)

(2) Durch iterative Anwendung des Satzes von FUBINI erhält man entsprechende Aussagen für Integrale bezüglich des Produktes von mehr als zwei Maßen.

(3) Für die Berechnung des Integrals bezüglich eines n-fachen Produktmaßes $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ ergeben sich $n!$ mögliche Integrationsreihenfolgen bezüglich der Maße $\mu_i, i = 1, \ldots, n$.

8.1 Satz (HÖLDERsche Ungleichung) und Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen. Dann gilt für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_X |fg| \, d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Die Werte p und q mit den obigen Eigenschaften werden konjugierte HÖLDER-Exponenten genannt.

8.2 Anmerkung

Für $p = q = 2$ erhält man als Spezialfall die CAUCHY-SCHWARZ-BUNJAKOWSKIsche Ungleichung

$$\int_X |fg| \, d\mu \leqslant \sqrt{\int_X f^2 \, d\mu} \, \sqrt{\int_X g^2 \, d\mu}$$

8.3 Beispiel (HÖLDERsche Ungleichung für Reihen)

Seien $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

8.4 Satz (Minkowskische Ungleichung)

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen, für die die Summe $f + g$ für alle $x \in X$ definiert ist. Dann gilt für $1 \leqslant p < \infty$

$$\left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

8.5 Beispiel (Minkowskische Ungleichung für Reihen)

Seien $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant p < \infty$. Dann gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für} \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

8.6 Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum.

- Für $1 \leqslant p < \infty$ bezeichnet

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu)$$
$$:= \left\{ f \mid f\colon X \to \mathbb{R}, \mathfrak{X}\text{-messbar mit } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

  die Menge der $\mathfrak{X}$-messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$, die von der Ordnung p μ-integrierbar bzw. kurz p-fach μ-integrierbar sind.

- $$\mathcal{L}^\infty := \mathcal{L}^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{X}, \mu)$$
$$:= \{f \mid f\colon X \to \mathbb{R}, \mathfrak{X}\text{-messbar}, \exists C \geqslant 0 \text{ mit } |f| \leqslant C \ \mu\text{-f.ü.}\}$$

  bezeichnet die Menge der $\mathfrak{X}$-messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$, die essentiell beschränkt sind.

8.7 Satz

Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ist

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu) := (\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu), +, \cdot, \mathbb{R})$$

ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen.

8.8 Anmerkungen (Spezialfälle)

(1) $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist der Vektorraum der μ-integrierbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$.

(2) $\mathcal{L}^2(\mu)$ ist der Vektorraum der quadratisch μ-integrierbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$.

8.9 Satz

(1) Für $1 \leqslant p < \infty$ wird durch

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{L}^p$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$ definiert.

(2) Für $p = \infty$ wird durch

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| := \inf\{C \geqslant 0\colon\ |f| \leqslant C \ \mu\text{-f.ü.}\} \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{L}^\infty$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty$ definiert.

(3) Für $f \in \mathcal{L}^\infty$ gilt $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ μ-fast überall.

8.10 Anmerkungen

(1) Für $1 \leqslant p < \infty$ seien $f, g \in \mathcal{L}^p$. Dann ist auch $f + g \in \mathcal{L}^p$ und die MINKOWSKIsche Ungleichung entspricht gerade der Dreiecksungleichung auf $\mathcal{L}^p$

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(2) Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ seien $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1$ und die HÖLDERsche Ungleichung entspricht gerade der Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(3) Sei $f \in \mathcal{L}^1$ und $g \in \mathcal{L}^\infty$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1$ und es gilt auch

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

Problem

Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ist $\|f\|_p = 0$ äquivalent dazu, dass $f = 0$ μ-fast überall. Falls also eine nichtleere μ-Nullmenge $A \in \mathfrak{X}$ existiert, so ist $\|\cdot\|_p$ keine Norm, da das HAUSDORFFsche Trennungsaxiom nicht erfüllt ist.

Wie kann man $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu)$ für einen beliebigen Maßraum $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ zum normierten Raum machen?

8.11 Satz

Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sei $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu)$ gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{f \in \mathcal{L}^p : f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\} \\ &= \{f \mid f\colon X \to \mathbb{R}, \mathfrak{X}\text{-messbar mit } f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\} \end{aligned}$$

ein von p unabhängiger linearer Unterraum von $\mathcal{L}^p$. Für den Quotientenraum (Faktorraum)

$$L^p := L^p(\mu) := L^p(X, \mathfrak{X}, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu)_{/\mathcal{N}},$$

dessen Elemente $\widehat{f} \in L^p$ Äquivalenzklassen μ-fast überall gleicher Funktionen $f \in \mathcal{L}^p$ sind, wird durch

$$\|\widehat{f}\|_p := \|f\|_p \quad \text{für einen Repräsentanten} \quad f \in \widehat{f}$$

eine Norm definiert und $(L^p(X, \mathfrak{X}, \mu), +, \cdot, \mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$ ist ein normierter Vektorraum.

8.12 Beispiel

Sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann umfasst eine Äquivalenzklasse $\widehat{f} \in L^p(\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, unter anderem auch alle Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch Abänderung von $f \in \widehat{f}$ an höchstens abzählbar vielen Stellen $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in I \subseteq \mathbb{N}$, entstehen.

8.13 Beispiel

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(X, \mathfrak{X}, \delta_{x_0})$, $x_0 \in X$. Wegen

$$\int_X |f|^p \, d\delta_{x_0} = |f(x_0)|^p \quad \text{für} \quad f\colon X \to \mathbb{R}, \mathfrak{X}\text{-messbar}$$

ist

$$\mathcal{L}^p(\delta_{x_0}) = \{f \mid f\colon X \to \mathbb{R}, \mathfrak{X}\text{-messbar}\} \quad \text{für} \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Der normierte Vektorraum $L^p(\delta_{x_0})$ besteht dann aus überabzählbar vielen Äquivalenzklassen $\widehat{y}$, $y \in \mathbb{R}$, wobei

$$\widehat{y} = \{f \mid f\colon X \to \mathbb{R}, \mathfrak{X}\text{-messbar}, f(x_0) = y\}$$

und

$$\|f\|_p = |f(x_0)| \quad \text{für} \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

8.14 Satz (Satz von Riesz-Fischer)

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum. Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sind die Räume $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{X}, \mu)$ vollständig, d.h. zu jeder Cauchy-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^p$ gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p$, so dass

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

8.15 Folgerung

Die Räume $L^p(X, \mathfrak{X}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sind vollständig.

8.16 Anmerkungen und Definitionen

(1) Ein vollständiger normierter Vektorraum wird BANACH-Raum genannt. Folglich sind die Räume L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, BANACH-Räume.

(2) Auf L^2 wird durch

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle := \int_X f g \, d\mu$$

für $f \in \hat{f}$ und $g \in \hat{g}$ ein Skalarprodukt definiert. Damit wird L^2 zum HILBERT-Raum, da die Norm durch das Skalarprodukt induziert wird.

(3) Üblicherweise werden die Äquivalenzklassen $\hat{f} \in L^p$ und deren Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p$ nicht unterschieden. Man schreibt einfach $\|f\|_p$ für $\|\hat{f}\|_p$.

8.17 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann gilt für $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$

$$\mathcal{L}^s(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu).$$

8.18 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann gilt für $1 < p < \infty$

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu).$$

8.19 Anmerkungen

(1) Im Allgemeinen, d.h. für beliebige Maßräume $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, bestehen keine Inklusionsbeziehungen zwischen den Mengen bzw. Räumen

$$\mathcal{L}^r(\mu) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^s(\mu), \quad 1 \leqslant r < s \leqslant \infty.$$

(2) Bestehende Inklusionsbeziehungen für $\mathcal{L}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, gelten entsprechend auch für L^p.

9.1 Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-fast überall gegen f, wenn es eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{X}$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in N^c$$

und schreibt dafür

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-f.ü.}} f \quad \text{bzw.} \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \ \mu\text{-f.ü.}$$

9.2 Beispiel

Sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{x}{n} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases} \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda\text{-f.ü.}} 0.$$

9.3 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g, f_n, g_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen mit $f_n = g_n$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-f.ü.}} f \quad \text{und} \quad g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-f.ü.}} g.$$

Dann gilt

$$f = g \qquad \mu\text{-fast überall.}$$

9.4 Definition

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dem Maße μ nach gegen f, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

und schreibt dafür

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f \quad \text{bzw.} \quad \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

9.5 Beispiel

Sei μ die Einschränkung des Lebesgue-Borel-Maßes λ auf $([0,1), \mathfrak{B} \cap [0,1))$. Wir setzen

$$f_1 = I_{[\frac{0}{2},\frac{1}{2})}, \quad f_2 = I_{[\frac{1}{2},\frac{2}{2})}, \quad f_3 = I_{[\frac{0}{4},\frac{1}{4})}, \quad f_4 = I_{[\frac{1}{4},\frac{2}{4})}, \quad f_5 = I_{[\frac{2}{4},\frac{3}{4})}, \quad f_6 = I_{[\frac{3}{4},\frac{4}{4})}, \ldots$$

bzw. allgemein $f_{2^k-2+r} = I_{A_{k,r}}$, wobei

$$A_{k,r} = \left[\frac{r-1}{2^k}, \frac{r}{2^k}\right), \quad r = 1, \ldots, 2^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für kein $x \in [0,1)$ punktweise. Jedoch gilt

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} 0.$$

9.6 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g, f_n, g_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen mit $f_n = g_n$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f \quad \text{und} \quad g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} g.$$

Dann gilt

$$f = g \qquad \mu\text{-fast überall.}$$

9.7 Definitionen

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{L}^p$ gegen f, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

und schreibt dafür

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f \quad \text{bzw.} \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} f.$$

- Für $1 \leqslant p < \infty$ spricht man von Konvergenz im p-ten Mittel.
- Speziell für $p = 1$ spricht man von Konvergenz im Mittel.
- Speziell für $p = 2$ spricht man von Konvergenz im quadratischen Mittel.
- Für $p = \infty$ spricht man von fast überall gleichmäßiger Konvergenz.

9.8 Beispiel

Sei μ die Einschränkung des LEBESGUE-BOREL-Maßes λ auf $([0,1), \mathfrak{B} \cap [0,1))$. Die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, seien wie in Beispiel 9.5 definiert. Es gilt $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sowie

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Für $p = \infty$ konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ jedoch nicht in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ gegen 0.

9.9 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g, f_n, g_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, mit $f_n = g_n$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f \quad \text{und} \quad g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} g.$$

Dann gilt

$$f = g \qquad \mu\text{-fast überall.}$$

9.10 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $1 \leqslant r < s \leqslant \infty$ und $f, f_n \in \mathcal{L}^s(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^s(\mu)} f \quad \text{stets} \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^r(\mu)} f.$$

9.11 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen mit

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-f.ü.}} f.$$

Dann folgt

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f.$$

9.12 Beispiel (Gegenbeispiel für σ-endliches Maß)

Sei λ das LEBESGUE-BOREL-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und

$$f_n = I_{(n,n+1)} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt zwar offensichtlich

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{bzw.} \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda\text{-f.ü.}} 0$$

aber nicht

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda} 0.$$

9.13 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen mit

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f.$$

Dann existiert eine μ-fast überall konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

9.14 Folgerung

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen mit

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f.$$

Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mu\text{-f.ü.}} f.$$

9.15 Satz (CHEBYSHEV-MARKOVsche Ungleichung)

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X \colon\ |f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f|^p \, d\mu.$$

9.16 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, mit

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f.$$

Dann folgt

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f.$$

9.17 Satz

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, mit

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Dann folgt

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f.$$

Übersicht: beliebiger Maßraum

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen.

$$\begin{array}{ccc}
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(gleichmäßig)}} f & & \\
\downarrow & & \\
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(punktweise)}} f & & \\
\downarrow & & \\
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-f.ü.}} f & & f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f \\
 & & \downarrow\uparrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p, 1 \leqslant p < \infty \\
 & & f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f
\end{array}$$

Übersicht: endlicher Maßraum

Sei $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$-messbare Funktionen.

$$\begin{array}{ccc}
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(gleichmäßig)}} f & & \\
\downarrow & & \\
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(punktweise)}} f & & \\
\downarrow & & \\
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-f.ü.}} f & & f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f \\
\downarrow\uparrow \text{Teilfolge} & & \downarrow\uparrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p, 1 \leqslant p < \infty \\
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f & & f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f
\end{array}$$