Schwerpunkte des Kapitels

- Differentialrechnung für skalare Felder
- Integralrechnung für skalare Felder
- Kurvenintegrale

Themen und Begriffe

- grafische Darstellung, Höhenlinie
- Definitionsbereich, Wertebereich
- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- partielle Ableitungen
- Gradient
- Richtungsableitung
- Tangentialebene
- totales Differential
- Fehlerrechnung

Aufgabe 9.1

Welche Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^3$ werden durch die folgenden Ausdrücke beschrieben?

$$\text{a) } y = 2, \quad \text{b) } y + z = 0 \quad \text{und} \quad \text{c) } x^2 + y^2 - z = 0.$$

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f

$$\text{a) } \quad z = f(x,y) = e^{-x^2} + \sqrt{y-1} \quad \text{und}$$

$$\text{b) } \quad z = f(x,y) = \left(4 - x^2 - y^2\right)^{-1/2}.$$

Skizzieren Sie den Definitionsbereich.

Aufgabe 9.3

Lässt sich der Funktionswert der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad y \neq 0$$

an der Stelle $(0,0)$ so festlegen, dass f an dieser Stelle stetig ist?

Aufgabe 9.4

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = xe^{y/x}$.

a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

b) Bestimmen Sie ∇f.

c) Berechnen Sie die HESSE-Matrix H_f.

Aufgabe 9.5

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f der Funktion f.

b) Bestimmen und skizzieren Sie Höhenlinien von f.

c) Beschreiben Sie den Graphen von f (Art der Fläche).

d) Bestimmen Sie ∇f sowie $\nabla f(P_0)$ in $P_0\left(\frac{1}{2},1\right)$. Deuten Sie das Ergebnis für $\nabla f(P_0)$.

e) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in P_0 in Richtung $\vec{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Fortsetzung von Aufgabe 9.5

f) In welche Richtung ist vom Punkt P_0 aus der Anstieg minimal, maximal bzw. gleich Null? Berechnen Sie den minimalen und maximalen Wert der Richtungsableitung.

g) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt P_0.

h) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Höhenlinie im Punkt P_0.

i) Stellen Sie die Formel für das totale Differential auf.

Aufgabe 9.6

Das Volumen einer Kugel soll auf 0,1% genau bestimmt werden. Wie genau muss der Radius bestimmt werden, wenn man für $\pi = 3{,}14159\ldots$ die Näherungswerte

a) 3,14 bzw.

b) 3,142

verwendet?

Themen und Begriffe

- Kettenregel
- implizite Funktionen
- Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen
- Extremum, Sattelpunkt
- Definitheit einer Matrix
- Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen
- Methode der Lagrange-Multiplikatoren
- Eliminationsmethode

Aufgabe 9.7

Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $\frac{df}{dt}$ für

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$

mit

a) $x = x(t) = \cos t$ und $y = y(t) = \sin t$ bzw.

b) $x = x(t) = \sin t$ und $y = y(t) = \frac{t}{4}\cos t$

jeweils für $0 \le t < 2\pi$.

Aufgabe 9.8

Eine implizite Funktion sei gegeben durch die Gleichung

$$F(x,y) = y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

a) Bestimmen Sie die Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ in der die implizite Funktion liegt, d.h. Lösungen der obigen Gleichung existieren.

b) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion $F(x,y)$. Welche Konsequenzen hat das für das Symmetrieverhalten der impliziten Funktion?

c) Bestimmen Sie den Anstieg der Tangente an die implizite Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ im ersten Quadranten.

d) Stellen Sie die Geradengleichung $t(x)$ für diese Tangente auf.

Fortsetzung von Aufgabe 9.8

e) An welchen Stellen hat die implizite Funktion horizontale bzw. vertikale Tangenten?

f) Wann ist $F(x,y) = 0$ nach y auflösbar?

g) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α zwischen der Tangente an die implizite Funktion im Ursprung und der positiven x-Achse im ersten und vierten Quadranten.

Aufgabe 9.9

Eine implizite Funktion sei gegeben durch die Gleichung

$$F(x,y) = x^2 - xy + y^2 - c = 0.$$

a) Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ erfüllt der Punkt $P(-1,1)$ die obige Gleichung?

b) Bestimmen Sie den Anstieg der Tangente an die implizite Funktion im Punkt P.

c) Stellen Sie die Geradengleichung $t(x)$ für diese Tangente auf.

d) An welchen Stellen hat die implizite Funktion horizontale bzw. vertikale Tangenten?

e) Wann ist $F(x,y) = 0$ nach y auflösbar?

f) Bestimmen Sie den Anstieg der Tangente an die implizite Funktion in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 9.10

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die lokalen Extrema

a) $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ für $x \neq 0, y \neq 0$ und

b) $f(x,y,z) = x^4 + 2y^2 + z^2 - y(2x^2+8) + 4z$ für $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9.11

In einem Stadion soll eine 400 m lange Laufbahn, bestehend aus zwei Geraden und zwei Halbkreisen, so angelegt werden, dass die Fläche des Rechtecks im Inneren maximal wird. Wie lang sind die Geraden? Wie groß ist die Fläche des Rechtecks?

Aufgabe 9.12

Welche Punkte der Ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

haben vom Punkt $P(2,0)$ extremalen Abstand? Geben Sie die minimalen und maximalen Abstände an.
Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe sowohl mit der Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren als auch mit der Eliminationsmethode.

Aufgabe 9.13

Gegeben sind die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) = 1 - 2x + 2y$$

und die Nebenbedingung

$$x^2 + (y+1)^2 = 2.$$

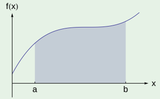
a) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAGRANGE-Methode alle Punkte, die für f unter der gegebenen Nebenbedingung als lokale Extremstellen in Frage kommen.

b) Skizzieren Sie ein Höhenlinienbild (Karte) von f mit mindestens vier Höhenlinien, das auch die Nebenbedingung enthält. Entnehmen Sie dieser Skizze, ob tatsächlich Extrema existieren, und ob es sich in diesem Fall um Minima oder Maxima handelt.

Themen und Begriffe

- Doppelintegrale
- Integrationsgebiet
- Normalbereich
- kartesische Koordinaten
- Polarkoordinaten
- Flächenberechnung
- Bestimmung des geometrischen Schwerpunktes

Erinnerung: Bestimmte Integrale (Einfachintegrale)



$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a < b,$$

wobei $F(x)$ die Stammfunktion der Funktion $f(x)$ bezeichnet

$$F'(x) = f(x).$$

Doppelintegrale

$$\iint\limits_B f(x,y)\;dx\,dy = ?$$

Zur Berechnung des Doppelintegrals ist es erforderlich, die Menge

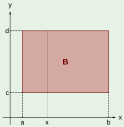
$$B \subseteq \mathbb{R}^2,$$

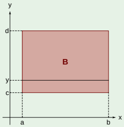
das Integrationsgebiet bzw. den Integrationsbereich, als Normalbereich darzustellen.

Normalbereich bzgl. x und y

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b, c \le y \le d\right\}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$$

$$\iint\limits_B f(x,y)\;dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\;dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\;dx\,dy$$

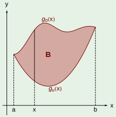




Normalbereich bzgl. x

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g_u(x) \le y \le g_o(x), a \le x \le b\right\}, \quad a,b \in \mathbb{R}, a < b$$

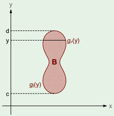
$$\iint\limits_B f(x,y)\;dx\,dy = \int_a^b \int_{g_u(x)}^{g_o(x)} f(x,y)\;dy\,dx$$



Normalbereich bzgl. y

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g_l(y) \le x \le g_r(y), c \le y \le d\right\}, \quad c,d \in \mathbb{R}, c < d$$

$$\iint\limits_B f(x,y)\;dx\,dy = \int_c^d \int_{g_l(y)}^{g_r(y)} f(x,y)\;dx\,dy$$



Aufgabe 9.14

Skizzieren Sie folgende Bereiche in der x, y-Ebene

a) $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3y - 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$,

b) $B_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 3, \frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{5}{6}x\right\}$,

c) $B_3 = \left\{(r,\varphi) \in [0,\infty) \times [0{,}2\pi) \colon \frac{1}{2} \leq r \leq \varphi, \frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq \pi\right\}$.

Polarkoordinaten

$$\iint\limits_{B_{x,y}} f(x,y)\; dx\, dy = ?$$

Wir setzen

$$x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$$
$$y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

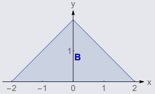
Dann gilt

$$\iint\limits_{B_{x,y}} f(x,y)\; dx\, dy = \iint\limits_{B_{r,\varphi}} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))\; r\; dr\, d\varphi,$$
$$= \iint\limits_{B_{r,\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\; r\; dr\, d\varphi, \quad \text{wobei}$$

$$B_{r,\varphi} = \{(r,\varphi) \in [0,\infty) \times [0{,}2\pi) \colon (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in B_{x,y}\}$$

Aufgabe 9.15

Beschreiben Sie den folgenden Bereich in kartesischen Koordinaten.



Aufgabe 9.16

Berechnen Sie das Integral

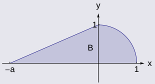
$$I = \iint\limits_{B} (x+y)\; dy\, dx \quad \text{mit}$$

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq x+2, -1 \leq x \leq 2\right\}.$$

Bestimmen Sie den Normalbereich für die vertauschte Integrationsreihenfolge.

Aufgabe 9.17

Gegeben sei der folgende Bereich B in der x, y-Ebene.



Wie muss man den Wert $a > 0$ wählen, damit der geometrische Schwerpunkt des Bereiches B auf der y-Achse liegt?

Themen und Begriffe

- Dreifachintegrale
- Normalbereich
- kartesische Koordinaten
- Zylinderkoordinaten
- Kugelkoordinaten
- Volumenberechnung
- geometrischer Schwerpunkt
- Masseberechnung
- Masseschwerpunkt

Aufgabe 9.18

Gegeben sei der Bereich B im ersten Quadranten der x, y-Ebene, der durch die Kurven

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x \quad \text{und} \quad x = 0$$

begrenzt wird. Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K über dem Bereich B, der oben von der Fläche $z = 2xy$ abgeschlossen wird, sowohl unter Verwendung von

- kartesischen Koordinaten als auch
- Polar- bzw. Zylinderkoordinaten.

Zylinderkoordinaten

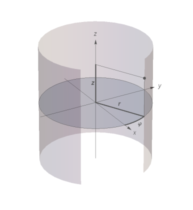
$$I = \iiint\limits_{B_{x,y,z}} f(x, y, z)\; dx\, dy\, dz = ?$$

$$\begin{aligned} x &= x(r, \varphi, z) = r\cos\varphi \\ y &= y(r, \varphi, z) = r\sin\varphi \\ z &= z(r, \varphi, z) = z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{B_{r,\varphi,z}} f(x(r,\varphi,z), y(r,\varphi,z), z(r,\varphi,z))\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\ &= \iiint\limits_{B_{r,\varphi,z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\; r\; dr\, d\varphi\, dz, \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

$$B_{r,\varphi,z} = \{(r, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0{,}2\pi) \times \mathbb{R} \colon (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in B_{x,y,z}\}$$

Zylinderkoordinaten: Geometrische Bedeutung von r, φ und z



Aufgabe 9.19

Ein endlicher Körper $K \subseteq \mathbb{R}^3$ sei nach oben durch die Fläche

$$x^2 + y^2 = (4 - z)^2$$

und nach unten durch die Fläche

$$x^2 + y^2 = (z + 2)^2$$

begrenzt.

a) Skizzieren Sie einen Schnitt durch den Körper K in der x, z-Ebene.

b) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

Aufgabe 9.20

Ein Körper $K \subseteq \mathbb{R}^3$ sei nach oben durch die Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

und nach unten durch die Fläche

$$x^2 + y^2 = 8z$$

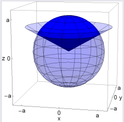
begrenzt.

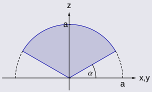
a) Skizzieren Sie einen Schnitt durch den Körper K in der x, z-Ebene.

b) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

Aufgabe 9.21

Aus einer Kugel mit dem Radius $a > 0$ wird ein kegelförmiger Körper K herausgeschnitten (siehe Skizzen).





a) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

b) Berechnen Sie die Masse des Körpers K mit der Dichte $\varrho(x, y, z) = z^2 + 1$.

Kugelkoordinaten, Variante 1

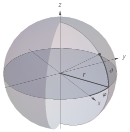
$$I = \iiint\limits_{B_{x,y,z}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = ?$$

$$\begin{aligned}
x &= x(r,\varphi,\vartheta) = r\cos\varphi\cos\vartheta, && r > 0, && \text{„Abstand“, „Radius“}\\
y &= y(r,\varphi,\vartheta) = r\sin\varphi\cos\vartheta, && \varphi \in [0{,}2\pi), && \text{„geographische Länge“}\\
z &= z(r,\varphi,\vartheta) = r\sin\vartheta, && \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2], && \text{„geographische Breite“}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{B_{r,\varphi,\vartheta}} f(x(r,\varphi,\vartheta), y(r,\varphi,\vartheta), z(r,\varphi,\vartheta))\; r^2\cos\vartheta\; dr\, d\varphi\, d\vartheta\\
&= \iiint\limits_{B_{r,\varphi,\vartheta}} f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\; r^2\cos\vartheta\; dr\, d\varphi\, d\vartheta, \quad \text{wobei}
\end{aligned}$$

$$B_{r,\varphi,\vartheta} = \{(r,\varphi,\vartheta)\colon (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) \in B_{x,y,z}\}$$

Kugelkoordinaten, Variante 1: Geometrische Bedeutung von r, φ und ϑ



Kugelkoordinaten, Variante 2

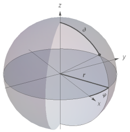
$$I = \iiint\limits_{B_{x,y,z}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = ?$$

$$\begin{aligned}
x &= x(r,\varphi,\vartheta) = r\cos\varphi\sin\vartheta, && r > 0, && \text{„Abstand“, „Radius“}\\
y &= y(r,\varphi,\vartheta) = r\sin\varphi\sin\vartheta, && \varphi \in [0{,}2\pi), && \text{„geographische Länge“}\\
z &= z(r,\varphi,\vartheta) = r\cos\vartheta, && \vartheta \in [0, \pi], && \text{„Polabstand“}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{B_{r,\varphi,\vartheta}} f(x(r,\varphi,\vartheta), y(r,\varphi,\vartheta), z(r,\varphi,\vartheta))\; r^2\sin\vartheta\; dr\, d\varphi\, d\vartheta\\
&= \iiint\limits_{B_{r,\varphi,\vartheta}} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\; r^2\sin\vartheta\; dr\, d\varphi\, d\vartheta, \quad \text{wobei}
\end{aligned}$$

$$B_{r,\varphi,\vartheta} = \{(r,\varphi,\vartheta)\colon (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \in B_{x,y,z}\}$$

Kugelkoordinaten, Variante 2: Geometrische Bedeutung von r, φ und ϑ



Themen und Begriffe

- Kurven in der Ebene und im Raum
- Parametrisierung
- Längenelement
- Länge einer Kurve
- Kurvenintegral 1. Art
- geometrischer Schwerpunkt einer Kurve

Aufgabe 9.22

Berechnen Sie die Länge der Kurve $\vec{\gamma}$, die durch die Gleichung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}\ln t, \quad 1 \le t \le 4,$$

gegeben ist.

Aufgabe 9.23

Gegeben sei die Kurve

$$\vec{\gamma}\colon [0{,}2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{bmatrix}.$$

a) Welche Länge hat die Kurve?

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$I = \int\limits_{\vec{\gamma}} xyz\,ds.$$

c) Bestimmen Sie den geometrischen Schwerpunkt der Kurve $\vec{\gamma}$.

Themen und Begriffe

- Kurvenintegral 2. Art
- Arbeitsintegral
- Wegunabhängigkeit
- Integrabilitätsbedingung
- Potentialfelder und Potentiale

Aufgabe 9.24

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$I\left(\vec{\gamma}_n\right) = \int\limits_{\vec{\gamma}_n} 2x\cos\left(x^2+y\right)\,dx + \cos\left(x^2+y\right)\,dy, \quad n = 1{,}2,$$

entlang der Wege

$$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le 2, \quad \text{bzw.}$$
$$\vec{\gamma}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le 2,$$

vom Punkt $P = (0{,}0)$ zum Punkt $Q = (2{,}4)$.
Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?
Falls ja, so bestimmen Sie $I\left(\vec{\gamma}_n\right)$ mit Hilfe einer Stammfunktion.