Schwerpunkte des Kapitels

- gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung
- Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung
- lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung heißt implizit gegeben (implizite Form), falls gilt:

$$F\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \quad \text{wobei} \quad F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung heißt explizit gegeben (explizite Form), falls gilt:

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), \quad \text{wobei} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Die Funktion $y = y(t), t \in D_y$, heißt Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung, falls sie die Gleichung (1) bzw. (2) erfüllt.

Themen und Begriffe

- implizite Form, explizite Form
- Anfangswertproblem
- lineare Differentialgleichung erster Ordnung
- Homogenität, Inhomogenität
- allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung
- spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
- Trennbarkeit, Separierbarkeit
- Trennung der Variablen
- Variation der Konstanten
- Störgliedansatz
- Ähnlichkeitsdifferentialgleichung
- Substitution

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(t, y, y') = 0 \quad \text{bzw.} \quad y' = f(t, y)$$

heißt linear, falls sie sich in der Form

$$y' + k(t)\, y = s(t) \tag{3}$$

schreiben lässt. Dabei wird $k(t)$ Koeffizientenfunktion und $s(t)$ Störterm bzw. Störglied genannt.

- Ist $s(t) = 0$, so heißt die Differentialgleichung (3) homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.
- Ist hingegen $s(t) \neq 0$, so wird die Differentialgleichung (3) inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung genannt.

Aufgabe 8.1

Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y'(t) + 2te^{t^2} = 0 \quad \text{und} \quad \text{b) } y'(t)\left(t^2 - 1\right) = 2t\, y(t).$$

- Geben Sie die Differentialgleichungen in impliziter und expliziter Form an.
- Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen.
- Untersuchen Sie die Differentialgleichungen auf Trennbarkeit.
- Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Trennbarkeit

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(t, y, y') = 0 \quad \text{bzw.} \quad y' = f(t, y)$$

heißt trennbar bzw. separabel, falls sie sich in der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

schreiben lässt. Dann ist die Trennung der Variablen möglich

$$y' = \frac{dy}{dt} = g(t)\, h(y) \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(t)\, dt$$

und durch unbestimmete Integration beider Seiten der Gleichung kann die Lösung $y(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmt werden.

Aufgabe 8.2

Gegeben seien die Anfangswertprobleme

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & ty' + y(1+y) = 0, & y(2) = 4, \\ \text{b)} & y' \ln y = 2t, & y(0) = 1 \quad \text{und} \\ \text{c)} & 2xy' - y = \dfrac{3}{2}x^2 \quad \text{für} \quad x > 0, & y(1) = 0. \end{array}$$

- Geben Sie die Differentialgleichungen in impliziter und expliziter Form an.
- Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen.
- Untersuchen Sie die Differentialgleichungen auf Trennbarkeit.
- Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
- Lösen Sie die Anfangswertprobleme.

Aufgabe 8.3

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' + 2y = e^{3t}$$

ggf. mit Hilfe eines Störgliedansatzes für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Aufgabe 8.4

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy' = y \ln y - y \ln x \quad \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad y(1) = e^2.$$

Themen und Begriffe

- Homogenität, Inhomogenität
- allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems
- Fundamentalsystem
- WRONSKI-Determinante
- spezielle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

Aufgabe 8.5

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssysteme

a) $$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 2y_2 + 2t \\ y_2' &= -4y_1 - y_2 \end{aligned} \quad \text{und}$$

b) $$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 6y_2. \end{aligned}$$

Wie lassen sich diese Differentialgleichungssysteme jeweils als Differentialgleichung höherer Ordnung darstellen?

Aufgabe 8.6

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

a) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

b) Überführen Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Aufgabe 8.7

Bestimmen Sie das Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 29y = 0$$

sowie die Lösung des dazugehörigen Anfangswertproblems mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 15.$$

Aufgabe 8.8

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 4t^2 - 10.$$

Überprüfen Sie mit Hilfe der WRONSKI-Determinante, dass ein Fundamentalsystem vorliegt.

Aufgabe 8.9

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 9y = \cos(3t).$$

Hinweis: Wählen Sie einen geeigneten Störgliedansatz.