8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 8.1.

a)
- implizite Form: $y'(t) + 2te^{t^2} = 0$,explizite Form: $y'(t) = -2te^{t^2}$
- inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung
- trennbare Differentialgleichung
- allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y(t) = -e^{t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

b)
- implizite Form: $y'(t)\,(t^2-1) - 2t\,y(t) = 0$,explizite Form: $y'(t) = \frac{2t}{t^2-1}\,y(t)$
- homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung
- trennbare Differentialgleichung
- allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y(t) = c(t^2-1), \quad c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8.2.

a)
- implizite Form: $ty' + y + y^2 = 0$, explizite Form: $y' = -\frac{1}{t}\,(y+y^2)$
- keine lineare Differentialgleichung erster Ordnung
- trennbare Differentialgleichung
- allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y(t) = \frac{c}{t-c}, \quad c \in \mathbb{R}$
- Lösung des Anfangswertproblems: $y(t) = \frac{8}{5t-8}$

b)
- implizite Form: $y' \ln y - 2t = 0$, explizite Form: $y' = \frac{2t}{\ln y}$
- keine lineare Differentialgleichung erster Ordnung
- trennbare Differentialgleichung
- Es ist $\int g(t)\,dt = \int 2t\,dt = t^2 + c_1$ und $\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int \ln y\,dy = y\ln y - y + c_2$. Die Gleichung $y \ln y - y = t^2 + c_3$ ist nicht nach y auflösbar und somit besitzt diese Differentialgleichung keine explitize Lösung.
- Anfangswertproblem nicht explizit lösbar

c)
- implizite Form: $2xy' - y - \frac{3}{2}x^2 = 0$, explizite Form: $y' = \frac{1}{2x}\left(y + \frac{3}{2}x^2\right)$
- inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung
- keine trennbare Differentialgleichung
- allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c\sqrt{x}, \quad c \in \mathbb{R}$
- Lösung des Anfangswertproblems: $y(x) = \frac{1}{2}\,(x^2 - \sqrt{x})$

Aufgabe 8.3.

- implizite Form: $y' + 2y - e^{3t} = 0$, explizite Form: $y' = -2y + e^{3t}$
- inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung
- allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + ce^{-2t}, \quad c \in \mathbb{R}$
- Störgliedansatz: $y_s(t) = Ae^{3t}, \quad A \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8.4.

- Lösung des Anfangswertproblems: $y(x) = xe^{x+1}$

Aufgabe 8.5.

a)
- allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1e^t + c_2e^{3t} + \frac{2}{3}\,t + \frac{14}{9} \\ y_2(t) &= -2c_1e^t - c_2e^{3t} - \frac{8}{3}\,t - \frac{32}{9}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Darstellung des Differentialgleichungssystems als inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in y_1:

$$y'' - 4y' + 3y = 2t + 2$$

  Darstellung des Differentialgleichungssystems als inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in y_2:

$$y'' - 4y' + 3y = -8t$$

b)
- allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (c_1 + c_2t)\,e^{5t} \\ y_2(t) &= (-c_1 - c_2(t+1))\,e^{5t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Darstellung des Differentialgleichungssystems als homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in y_1 oder y_2:

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

Aufgabe 8.6.

a) allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b) Darstellung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung als System von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = 3y_1 - 2y_2$$

Aufgabe 8.7.

- Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = e^{-2t}\cos(5t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = e^{-2t}\sin(5t)$$

- allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y(t) = c_1 e^{-2t}\cos(5t) + c_2 e^{-2t}\sin(5t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = 3e^{-2t}\sin(5t)$$

Aufgabe 8.8.

- Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = e^{2t} \quad \text{und} \quad y_2(t) = te^{2t}, \qquad W(t) = e^{4t}$$

- allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + t^2 + 2t - 1, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 8.9.

- Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = \cos(3t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sin(3t), \qquad W(t) = 3$$

- Störgliedansatz:

$$y_s(t) = At\sin(3t) + Bt\cos(3t), \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

- allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + \frac{1}{6}t\sin(3t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$