Kapitel 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

(Ausführliche Lösungswege)

Beachten Sie bitte die Seiten 2, 4 und 6 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 8. Dort werden grundlegende Begriffe im Zusammenhang mit gewöhnlichen Ditterentialgleichungen erläutert und Bezeichnungen eingeführt, die bei der Lösung aller Aufgaben verwendet werden. Diese sind kompatibel mit den Bezeichnungen im Arbeitsbuch. In der Formelsammlung von Merziger, Seite 166 und 167, werden davon abweichende Bezeichnungen verwendet.

Aufgabe 8.1. Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y'(t) + 2te^{t^2} = 0 \quad \text{und} \quad \text{b) } y'(t)\left(t^2 - 1\right) = 2t\, y(t).$$

- Geben Sie die Differentialgleichungen in impliziter und expliziter Form an.
- Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen.
- Untersuchen Sie die Differentialgleichungen auf Trennbarkeit.
- Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung:

a) Um die implizite Form einer Differentialgleichung zu finden, benötigen wir eine Gleichung, bei der auf der einen Seite eine Null steht. Das ist bei der hier gegebenen Differentialgleichung schon der Fall, d.h. sie ist in impliziter Form gegeben. Offensichtlich handelt es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung, da die höchste vorkommende Ableitung eine erste Ableitung ist. Die Funktion $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich

$$F(t, y, y') = y' + 2te^{t^2}$$

Sie hängt nicht von der Variable y ab.

Um die explizite Form einer Differentialgleichung zu bestimmen, müssen wir die gegebene Differentialgleichung nach der Ableitung y' auflösen, da es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung handelt. Wir erhalten

$$y' + 2te^{t^2} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad y' = -2te^{t^2}$$

als explizite Form der Differentialgleichung. Die gesuchte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist hier

$$f(t, y) = -2te^{t^2},$$

die ebenfalls nicht von der Variable y abhängt.

Um unsere Differentialgleichung als lineare Differentialgleichung erster Ordnung zu klassifizieren, benötigen wir eine Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$y' + k(t)\,y = s(t)$$

mit geeigneten Funktionen $k(t)$ und $s(t)$. Ausgehend von der expliziten Form der Differentialgleichung erkennen wir, dass es sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, wobei

$$k(t) = 0 \quad \text{und} \quad s(t) = -2te^{t^2}.$$

Da die Variable y nicht in der expliziten Form der Differentialgleichung vorkommt, verschwindet die Koeffizientenfunktion $k(t)$. Der Störterm $s(t)$ ist hingegen von Null verschieden. Daher handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine gegebene Differentialgleichung erster Ordnung ist trennbar, wenn sich die von t und y abhängenden Anteile auf der rechten Seite in der expliziten Form der Differentialgleichung in ein Produkt von zwei Faktoren separieren lassen, es also eine Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

gibt. Da die Variable y aber gar nicht auf der rechten Seite vorkommt, ist das trivialerweise erfüllt mit z.B. $g(t) = -2te^{t^2}$ und $h(y) = 1$ oder auch $g(t) = te^{t^2}$ und $h(y) = -2$.

Wir könnten also zur Lösung unserer Differentialgleichung die Trennung der Variablen als einfachstes Standardverfahren für eine Differentialgleichung erster Ordnung anwenden. Aber es geht noch einfacher durch direktes Integrieren

$$y(t) = \int y'(t)\,dt = \int -2te^{t^2}\,dt.$$

Wir substituieren $x = x(t) = t^2$ und erhalten $x' = \frac{dx}{dt} = 2t$ bzw. $dt = \frac{dx}{2t}$. Formales einsetzen ergibt

$$y(t) = \int -2te^{t^2}\,dt \left(= -\int 2te^x \frac{dx}{2t} \right) = -\int e^x\,dx = -e^x + c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Rücksubstitution $x = t^2$ erhalten wir

$$y(t) = -e^{t^2} + c$$

als allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung. Die Probe

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(-e^{t^2} + c\right) = \left(-e^{t^2} + c\right)' = -e^{t^2} \cdot 2t = -2te^{t^2}$$

lässt uns erkennen, dass wir die richtige Lösung gefunden haben.

b) Wir stellen zunächst fest, dass unsere Differentialgleichung erster Ordnung weder in der impliziten noch in der expliziten Form gegeben ist. Das ist demnach auch möglich. Einfaches Umstellen der Ausgangsgleichung ergibt

$$y'\left(t^2-1\right)=2ty \quad \longleftrightarrow \quad y'\left(t^2-1\right)-2ty=0$$

als implizite Form, wobei

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(t,y,y')=y'\left(t^2-1\right)-2ty.$$

Auch die explizite Form unserer Differentialgleichung lässt sich durch einfaches Umstellen der Ausgangsgleichung gewinnen

$$y'\left(t^2-1\right)=2ty \quad \longleftrightarrow \quad y'=\frac{2t}{t^2-1}\,y.$$

Die gesuchte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist jetzt

$$f(t,y)=\frac{2t}{t^2-1}\,y.$$

Um zu entscheiden, ob es sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, suchen wir eine Darstellung unserer Differentialgleichung in der Form

$$y'+k(t)\,y=s(t).$$

Ausgehend von der Ausgangsgleichung oder auch der expliziten Form lässt sich leicht erkennen, dass dies hier auch möglich ist. Dazu wählen wir

$$k(t)=-\frac{2t}{t^2-1} \quad \text{und} \quad s(t)=0.$$

Es handelt sich folglich um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Für die Entscheidung über die Trennbarkeit wird eine Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$y'=g(t)\cdot h(y)$$

gesucht. Ausgehend von der expliziten Form unserer Differentialgleichung erkennen wir schnell, dass dies möglich ist. Und zwar mit

$$g(t)=\frac{2t}{t^2-1} \quad \text{und} \quad h(y)=y.$$

An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass eine homogene lineare Differentialgleichung immer trennbar ist. Denn aus

$$y'+k(t)\,y=0 \quad \text{folgt stets} \quad y'=-k(t)\,y$$

und somit die Trennbarkeit mit $g(t) = -k(t)$ und $h(y) = y$. Das heißt andererseits, dass die Trennung der Variablen das Standardverfahren zur Lösung von homogenen linearen Differentialgleichungen ist.

Es sind nun zwei unbestimmte Integrale zu berechnen. Einerseits

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c_1 \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Bitte vergessen Sie hier nicht den Betrag beim Logarithmus, siehe Merziger Seite F4. Dieser Fehler wird gern gemacht. Anderseits ist das Integral

$$\int g(t)\,dt = \int \frac{2t}{t^2-1}\,dt$$

zu berechnen. Günstig ist es in dieser Situation, wenn man sich noch an das Kapitel 5 aus der Höheren Mathematik 1 erinnern kann. Denn es handelt sich um eine spezielle Situation. Der Zähler im Integranden ist nämlich gerade die Ableitung des Nenners. In dieser Situation gilt

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \ln|f(t)| + c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Also erhalten wir hier

$$\int g(t)\,dt = \int \frac{2t}{t^2-1}\,dt = \ln\left|t^2-1\right| + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Wenn man diesen „Trick“ nicht mehr auf der Pfanne hat, kann man das Integral auch durch eine Substitution lösen. Wir setzen $x = x(t) = t^2 - 1$ und erhalten $x' = \frac{dx}{dt} = 2t$ bzw. $dt = \frac{dx}{2t}$. Formales einsetzen ergibt

$$\int \frac{2t}{t^2-1}\,dt \left(= \int \frac{2t}{x}\frac{dx}{2t} \right) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit der Rücksubstitution $x = t^2 - 1$ erhalten wir dasselbe Resultat wie in (2).

Die beiden unbestimmten Integrale in (1) und (2) sind nun wegen der getrennten Variablen gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach y aufzulösen.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(t)\,dt \\
\longleftrightarrow \quad & \ln|y| + c_1 = \ln\left|t^2-1\right| + c_2 \\
\longleftrightarrow \quad & \ln|y| = \ln\left|t^2-1\right| + c_3 \quad \text{mit} \quad c_3 = c_2 - c_1 \in \mathbb{R} \\
\longleftrightarrow \quad & |y| = \left|t^2-1\right| \cdot c_4 \quad \text{mit} \quad c_4 = e^{c_3} > 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Im letzten Rechenschritt haben wir beide Seiten der Gleichung exponentiert, d.h. auf beiden Seiten der Gleichung die Exponentialfunktion als Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion angewendet. Das ist aufgrund der strengen Monotonie der Exponentialfunktion auch eine äquivalente Umformung.

Wir haben uns nun schon zielgerichtet an y herangearbeitet. Nur die Beträge auf beiden Seiten stören noch. Wie können wir uns der Beträge entledigen? Wir erinnern uns. Der Betrag eines Ausdruckes ist über eine Fallunterscheidung definiert.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0, \end{cases}$$

d.h. $|f(x)| = \pm f(x)$ je nachdem, ob $f(x) \geq 0$ oder $f(x) < 0$. Damit erhalten wir in (3)

$$\pm y = \pm c_4 \left(t^2 - 1\right).$$

Es sind jetzt praktisch vier Fälle zu unterscheiden. Steht auf der linken Seite das Vorzeichen $+$, so haben wir $y = \pm c_4\,(t^2 - 1)$. Andernfalls erhalten wir $-y = \pm c_4\,(t^2 - 1)$ bzw. $y = \mp c_4\,(t^2 - 1)$. Setzen wir $c = \pm c_4$, was dasselbe wie $c = \mp c_4$, so erhalten wir für alle vier Fälle die geschlossene Lösung

$$y = y(t) = c\left(t^2 - 1\right) \quad \text{mit} \quad c \neq 0.$$

Für $c = 0$ ist $y(t) = 0$ und damit auch $y'(t) = 0$. Setzen wir diese Beziehungen in die Ausgangsgleichung der Differentialgleichung ein, so stellen wir fest, dass $y(t) = 0$ auch eine (triviale) Lösung der Differentialgleichung ist. Wir können also auch den Fall $c = 0$ zulassen. Damit ist

$$y(t) = c\left(t^2 - 1\right) \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung. Um die Probe durchzuführen, benötigen wir auch die Ableitung unserer Lösung. Offensichtlich ist $y'(t) = 2ct$. Nun können wir in die Ausgangsgleichung unserer Differentialgleichung einsetzen. Für die linke Seite erhalten wir

$$y'(t)\left(t^2 - 1\right) = 2ct\left(t^2 - 1\right)$$

und für die rechte Seite

$$2t\,y(t) = 2t\,c\left(t^2 - 1\right) = 2ct\left(t^2 - 1\right).$$

Linke und rechte Seite stimmen überein und damit haben wir den Nachweis geführt, dass unsere allgemeine Lösung richtig ist.

Aufgabe 8.2. Gegeben seien die Anfangswertprobleme

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & ty' + y(1+y) = 0, & & y(2) = 4, \\ \text{b)} & y' \ln y = 2t, & & y(0) = 1 \quad \text{und} \\ \text{c)} & 2xy' - y = \dfrac{3}{2}x^2 & \text{für} \quad x > 0, & y(1) = 0. \end{array}$$

- Geben Sie die Differentialgleichungen in impliziter und expliziter Form an.
- Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen.
- Untersuchen Sie die Differentialgleichungen auf Trennbarkeit.
- Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
- Lösen Sie die Anfangswertprobleme.

Lösung: Zunächst sei angemerkt, dass in der Aufgabenstellung – im Unterschied zur ersten Aufgabe – darauf verzichtet wurde, die Funktion $y(t)$ und auch ihre Ableitung mit Argument zu schreiben. Das ist bei Differentialgleichungen üblich.

a) Wir stellen zunächst fest, dass die Differentialgleichung erster Ordnung

$$ty' + y(1+y) = 0$$

in impliziter Form gegeben ist. Durch äquivalente Umformungen

$$ty' + y(1+y) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad ty' = -y(1+y) \quad \longleftrightarrow \quad y' = -\frac{1}{t}\, y(1+y)$$

erhalten wir die explizite Form unserer Differentialgleichung.

Um zu entscheiden, ob es sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, suchen wir eine Darstellung unserer Differentialgleichung in der Form

$$y' + k(t)\, y = s(t).$$

Ausgehend von der Ausgangsgleichung oder auch der expliziten Form lässt sich leicht erkennen, dass das hier nicht möglich ist. In der zur expliziten Form äquivalenten Darstellung

$$y' + \frac{1}{t}\, y = -\frac{1}{t}\, y^2$$

würde das Störglied $s(t)$ nicht nur von der Variable t, sondern auch noch von y abhängen. Das darf aber bei einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung nicht sein. Daher handelt es sich bei unserer Differentialgleichung nicht um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Für die Entscheidung über die Trennbarkeit wird eine Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

gesucht. Ausgehend von der expliziten Form unserer Differentialgleichung lässt sich leicht erkennen, dass dies möglich ist. Und zwar mit

$$g(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{und} \quad h(y) = y(1+y).$$

Es handelt sich somit um eine trennbare Differentialgleichung und die Trennung der Variablen ist die Standardlösungsmethode dafür. Es sind wieder zwei unbestimmte Integrale zu lösen. Einerseits

$$\int g(t)\, dt = \int -\frac{1}{t}\, dt = -\ln|t| + c_1 \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

und andereseits

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int \frac{1}{y(1+y)}\, dy.$$

Beim Integraden $\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y^2+y}$ handelt es sich um eine echt gebrochen rationale Funktion. Die Standardtechnik zur Berechnung des unbestimmten Integrals einer solchen Funktion ist die Partialbruchzerlegung. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y},$$

da $y = 0$ und $y = -1$ zwei einfache reelle Nullstellen des Nennerpolynoms sind. Bringen wir die Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung auf den gemeinsamen Nenner $y(1+y)$, so ergibt sich – bei gleichem Nenner auf beiden Seiten – im Zähler die Gleichung

$$1 = A(1+y) + By. \tag{5}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten nutzen wir die Eliminationsmethode. Einsetzen von $y = 0$ in (5) liefert $1 = A \cdot 1 + B \cdot 0$, also $A = 1$. Für $y = -1$ ergibt sich aus (5) die Beziehung $1 = A \cdot 0 + B \cdot (-1)$, also $B = -1$. Folglich gilt

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$$

und für unser zweites Integral

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int \frac{1}{y(1+y)}\, dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \int \frac{1}{y}\, dy - \int \frac{1}{y+1}\, dy$$

$$= \ln|y| - \ln|y+1| + c_2 = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Nun gilt es wieder die beiden unbestimmten Integrale in (6) und (4) gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach y aufzulösen.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{h(y)}\, dy && = \int g(t)\, dt \\
\longleftrightarrow\quad & \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + c_2 && = -\ln|t| + c_1 \\
\longleftrightarrow\quad & \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| && = -\ln|t| + c_3 \quad \text{mit} \quad c_3 = c_1 - c_2 \in \mathbb{R} \\
\longleftrightarrow\quad & \left|\frac{y}{y+1}\right| && = \frac{1}{|t|} \cdot c_4 \quad \text{mit} \quad c_4 = e^{c_3} > 0. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Im letzten Rechenschritt haben wir wieder beide Seiten der Gleichung exponentiert. Man beachte, dass $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ und damit $e^{-\ln|t|} = \frac{1}{e^{\ln|t|}} = \frac{1}{|t|}$.

Nun können wir uns mit derselben Argumentation wie bei Aufgabe 8.1 b) der Beträge auf beiden Seiten der Gleichung entledigen, indem wir die wechselnden Vorzeichen mit in die Konstante $c = \pm c_4 \neq 0$ stecken. Auch hier erhalten wir für $c = 0$ die triviale Lösung $y(t) = 0$, so dass wir

$$\frac{y}{y+1} = \frac{c}{t} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

erhalten. Um nach y aufzulösen formen wir diese Gleichung äquivalent um und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{y}{y+1} = \frac{c}{t} \quad \longleftrightarrow \quad ty = c(y+1) \quad \longleftrightarrow \quad ty = cy + c \quad \longleftrightarrow \\
&ty - cy = c \quad \longleftrightarrow \quad y(t-c) = c \quad \longleftrightarrow \quad y = \frac{c}{t-c}.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$y(t) = \frac{c}{t-c} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R} \qquad (8)$$

die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Nun heißt es noch, die Anfangsbedingung $y(2) = 4$ zu berücksichtigen und damit das Anfangswertproblem zu lösen. Dazu setzen wir die Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung (8) der Differentialgleichung ein, d.h. für $t = 2$ und $y(t) = y(2) = 4$. Wir erhalten

$$4 = \frac{c}{2-c} \quad \longleftrightarrow \quad 4(2-c) = c \quad \longleftrightarrow \quad 8 - 4c = c \quad \longleftrightarrow \quad 8 = 5c \quad \longleftrightarrow \quad c = \frac{8}{5}.$$

Damit ist

$$y(t) = \frac{\frac{8}{5}}{t - \frac{8}{5}} = \frac{8}{5\left(t - \frac{8}{5}\right)} = \frac{8}{5t-8}$$

die Lösung des betrachteten Anfangswertproblems und zugleich eine spezielle Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Zur Durchführung der Probe benötigen wir die Ableitung der Lösung des Anfangswertproblems. Es gilt

$$y'(t) = \left(8 \cdot (5t-8)^{-1}\right)' = 8 \cdot (-1) \cdot (5t-8)^{-2} \cdot 5 = -\frac{40}{(5t-8)^2}.$$

Wir setzen nun in die Ausgangsgleichung der Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} ty' + y(1+y) &= ty' + y + y^2 \\ &= t\left(-\frac{40}{(5t-8)^2}\right) + \left(\frac{8}{5t-8}\right) + \left(\frac{8}{5t-8}\right)^2 \\ &= \frac{-40t}{(5t-8)^2} + \frac{8(5t-8)}{(5t-8)^2} + \frac{8^2}{(5t-8)^2} \\ &= \frac{-40t+40t-64+64}{(5t-8)^2} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis der Korrektheit der Lösung des Anfangswertproblems erbracht.

b) Durch äquivalente Umformung

$$y' \ln y = 2t \quad \longleftrightarrow \quad y' \ln y - 2t = 0$$

erhalten wir die implizite Form unserer Differentialgleichung. Und entsprechend durch

$$y' \ln y = 2t \quad \longleftrightarrow \quad y' = \frac{2t}{\ln y}$$

die explizite Form.

Um zu entscheiden, ob es sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, suchen wir eine Darstellung unserer Differentialgleichung in der Form

$$y' + k(t)\, y = s(t).$$

Ausgehend von der expliziten Form lässt sich leicht erkennen, dass das hier nicht möglich ist. Da y selbst nicht vorkommt, wäre $k(t) = 0$. Aber das Störglied $s(t)$ würde nicht nur von der Variable t, sondern auch noch von y abhängen. Daher handelt es sich bei unserer Differentialgleichung nicht um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Für die Entscheidung über die Trennbarkeit wird eine Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

gesucht. Ausgehend von der expliziten Form unserer Differentialgleichung lässt sich leicht erkennen, dass dies möglich ist. Und zwar mit z.B.

$$g(t) = 2t \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{\ln y}.$$

Es handelt sich demnach um eine trennbare Differentialgleichung und die Trennung der Variablen ist hierfür die Standardlösungsmethode. Es sind wieder zwei unbestimmte Integrale zu lösen. Einerseits

$$\int g(t)\,dt = \int 2t\,dt = 2 \cdot \frac{1}{2}\,t^2 + c_1 = t^2 + c_1 \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

und andereseits

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int \ln y\,dy.$$

Dieses Integral löst man überraschenderweise mit partieller Integration, obwohl der Integrand keine Produktstruktur aufweist.

$$\begin{aligned}\int \ln y\,dy = \int \ln y \cdot 1\,dy &= y\ln y - \int \frac{1}{y}\,y\,dy \left(= u(y)v(y) - \int u'(y)v(y)\,dy \right)\\ &= y\ln y - \int 1\,dy = y\ln y - y + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{10}$$

Dabei haben wir $u(y) = \ln y$, $v'(y) = 1$ und somit $u'(y) = \frac{1}{y}$ und $v(y) = \int v'(y)\,dy = y$ gewählt.

Nun gilt es wieder die beiden unbestimmten Integrale in (10) und (9) gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach y aufzulösen.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{h(y)}\,dy &&= \int g(t)\,dt \\ \longleftrightarrow \quad & y\ln y - y + c_2 &&= t^2 + c_1 \\ \longleftrightarrow \quad & y\ln y - y &&= t^2 + c_3 \quad \text{mit} \quad c_3 = c_1 - c_2 \in \mathbb{R} \\ \longleftrightarrow \quad & y(\ln y - 1) &&= t^2 + c_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Spätestens jetzt erkennt man, dass es nicht möglich ist, diese Gleichung nach y aufzulösen, denn es gelingt nicht, y nur auf einer Seite allein zu stehen zu bekommen.

Das bedeutet, dass die Differentialgleichung und damit auch das Anfangswertproblem nicht explizit lösbar ist. Man kann keine Formel für $y(t)$ angeben.

Das so etwas möglich ist, sollte diese Teilaufgabe zeigen. In solchen Fällen ist man dann auf numerische Lösungen der Gleichung (11) angewiesen.

Was man in dieser Situation jedoch noch analytisch machen kann, ist, die Konstante $c_3 \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Dazu setzen wir die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ in die Gleichung (11) ein, d.h. für $t = 0$ und $y = y(0) = 1$. Wir erhalten

$$1(\ln 1 - 1) = 0^2 + c_3 \quad \longleftrightarrow \quad 1(0-1) = c_3 \quad \longleftrightarrow \quad -1 = c_3.$$

Also können wir mit der Gleichung

$$y(t)(\ln y(t) - 1) = t^2 - 1$$

für die numerische Lösung starten.

c) Wir betrachten jetzt das Anfangswertproblem

$$2xy' - y = \frac{3}{2}x^2 \quad \text{für} \quad x > 0 \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad y(1) = 0$$

und stellen fest, dass etwas anders ist. Es gibt hier keine Variable t. Diese Variable wird ja gern verwendet, um eine Abhängigkeit der Funktion $y(t)$ von der Zeit auszudrücken. Man kann aber das Argument von y auch anders nennen, z.B. x. Wir haben es hier also mit einer Funktion $y = y(x)$ zu tun, nach der wir suchen. Das ist der einzige Unterschied. Das Argument hat einen anderen Namen. Vielleicht, weil es nicht für die Zeit steht, sondern vielleicht für einen Ort auf der reellen Achse.

Durch äquivalente Umformungen

$$2xy' - y = \frac{3}{2}x^2 \quad \longleftrightarrow \quad 2xy' - y - \frac{3}{2}x^2 = 0$$

erhalten wir die implizite Form und durch

$$2xy' - y = \frac{3}{2}x^2 \quad \longleftrightarrow \quad 2xy' = y + \frac{3}{2}x^2 \quad \longleftrightarrow \quad y' = \frac{y}{2x} + \frac{3}{4}x$$

die explizite Form der Differentialgleichung.

Um zu entscheiden, ob es sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, suchen wir eine Darstellung unserer Differentialgleichung in der Form

$$y' + k(x)\,y = s(x).$$

Ausgehend von der expliziten Form lässt sich leicht erkennen, dass dies möglich ist. Dazu wählen wir

$$k(x) = -\frac{1}{2x} \quad \text{und} \quad s(x) = \frac{3}{4}x. \tag{12}$$

Es handelt sich folglich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Für die Entscheidung über die Trennbarkeit wird eine Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

gesucht. Ausgehend von der expliziten Form unserer Differentialgleichung lässt sich leicht erkennen, dass dies auf Grund der Summenstruktur der rechten Seite nicht möglich ist. Es handelt sich somit um eine nicht trennbare Differentialgleichung und die Trennung der Variablen kann nicht als Lösungsmethode angewendet werden. Ein anderes Lösungsverfahren muss her.

Wir wissen aber bereits, dass eine homogene lineare Differentialgleichung immer trennbar ist und dann die Trennung der Variablen als Standardlösungsmethode angewendet werden kann. Wir entscheiden uns daher für eine neue Lösungsmethode mit zwei Schritten.

1. Bestimmung einer allgemeinen Lösung y_h der homogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen.
2. Bestimmung einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten.

   Als allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ergibt sich dann $y = y_h + y_s$.

Beginnen wir mit dem ersten Schritt und betrachten die homogene lineare Differentialgleichung, vgl. (12),

$$y' + k(x)y = y' - \frac{1}{2x}y = 0 \tag{13}$$

Es sind wieder zwei unbestimmte Integrale zu lösen. Einerseits

$$\int g(x)\,dx = \int -k(x)\,dx = \int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + c_1 = \ln\sqrt{|x|} + c_1 \text{ mit } c_1 \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

wobei wir ein Logarithmengesetzt angewendet haben, und andereseits

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Nun gilt es wieder die beiden unbestimmten Integrale in (15) und (14) gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach y aufzulösen.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx \\
\longleftrightarrow \quad & \ln|y| + c_2 = \ln\sqrt{|x|} + c_1 \\
\longleftrightarrow \quad & \ln|y| = \ln\sqrt{|x|} + c_3 \quad \text{mit} \quad c_3 = c_1 - c_2 \in \mathbb{R} \\
\longleftrightarrow \quad & |y| = \sqrt{|x|}\cdot c_4 \quad \text{mit} \quad c_4 = e^{c_3} > 0.
\end{aligned}$$

Im letzten Rechenschritt haben wir wieder beide Seiten der Gleichung exponentiert.

Nun können wir uns mit derselben Argumentation wie bei den vorhergehenden Aufgaben des Betrages auf der linken Seite entledigen, indem wir das wechselnde Vorzeichen mit in die Konstante $c = \pm c_4 \neq 0$ stecken. Auch hier erhalten wir für $c = 0$ die triviale Lösung $y(t) = 0$. Nach Voraussetzung ist $x > 0$, so dass $|x| = x$ gilt. Somit erhalten wir

$$y_h(x) = c\sqrt{x} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R} \tag{16}$$

als allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

Bevor wir nun zum zweiten Schritt der Lösungsmethode übergehen, eine dringende Empfehlung für die Klausur. Führen Sie erst einmal die Probe durch, denn der nächste Teilschritt baut auf der allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung auf. Wenn Sie sich bei der homogonen linearen Differentialgleichung verrechnet haben sollten, so würde die spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung auch falsch bzw. Sie würden keine Lösung finden.

Um die Probe durchzuführen, benötigen wir wieder die Ableitung der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Es gilt

$$y_h'(x) = \left(c\sqrt{x}\right)' = \left(c\, x^{\frac{1}{2}}\right)' = c\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{2\sqrt{x}}.$$

Nun können wir in die homogene lineare Differentialgleichung (13) einsetzen

$$\frac{c}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}\,c\,\sqrt{x} = \frac{c}{2\sqrt{x}} - \frac{c}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Jetzt können wir sicher sein, dass die Lösung des ersten Teilschrittes korrekt ist und uns dem zweiten Teilschritt zuwenden.

Für die inhomogene lineare Differentialgleichung ist ja eine kompliziertere Lösung erforderlich, weil auf der rechten Seite in (13) jetzt nicht mehr Null, sondern ein von Null verschiedener Ausdruck steht. Diese komliziertere Lösung will man mit dem Ansatz

$$y = y(x) = c(x)\sqrt{x} \tag{17}$$

gewinnen. Dieser Ansatz nennt sich Variation der Konstanten. Man lässt etwas komplizierteres als eine Konstante zu, nämlich eine Funktion, die „Konstante“ hängt also von x ab. Diese Funktion $c(x)$ gilt es jetzt zu bestimmen.

Um die Konsequenzen dieses Ansatzes für die inhomogene lineare Differentialgleichung zu erkennen, benötigen wir zunächst die Ableitung. Wir leiten mit Hilfe der Produktregel formal ab, da wir $c(x)$ ja bisher nicht kennen. Die Produktregel ist erforderlich, da beide Faktoren Funktionen von x sind.

$$y'(x) = \left(c(x)\sqrt{x}\right)' = c'(x)\sqrt{x} + c(x)\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = c'(x)\sqrt{x} + \frac{c(x)}{2\sqrt{x}}.$$

Nun können wir in die inhomogene lineare Differentialgleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
& 2xy' - y = \frac{3}{2}x^2 \quad \longleftrightarrow \quad 2x\left(c'(x)\sqrt{x} + \frac{c(x)}{2\sqrt{x}}\right) - c(x)\sqrt{x} = \frac{3}{2}x^2 \\
\longleftrightarrow \quad & 2x\sqrt{x}c'(x) + \frac{2xc(x)}{2\sqrt{x}} - c(x)\sqrt{x} = \frac{3}{2}x^2 \\
\longleftrightarrow \quad & 2x^{\frac{3}{2}}c'(x) + c(x)\sqrt{x} - c(x)\sqrt{x} = \frac{3}{2}x^2 \\
\longleftrightarrow \quad & 2x^{\frac{3}{2}}c'(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad \longleftrightarrow \quad c'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Dass der Term $y(x) = c(x)\sqrt{x}$ herausfällt ist kein Zufall, sondern Folge des geschickten Ansatzes. Das passiert immer und ist Kern dieser Methode.

Nun kennen wir zwar immer noch nicht $c(x)$, aber zumindest dessen Ableitung. Um $c(x)$ selbst zu erhalten, müssen wir die Ableituung nur noch integrieren. Es gilt

$$c(x) = \int c'(x)\,dx = \int \frac{3}{4}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{4}\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_5 = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + c_5 \text{ mit } c_5 \in \mathbb{R}.$$

Da wir eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung suchen, wählen wir $c_5 = 0$ und setzen nun $c(x)$ in (17) ein. Es ergibt sich

$$y_s(x) = c(x)\sqrt{x} = \frac{1}{2}\,x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\,x^2$$

als die gesuchte spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung.

Nun können wir die Ergebnisse der beiden Teilschritte zusammenfassen und erhalten

$$y = y_h + y_s = c\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R} \tag{18}$$

als allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Nun heißt es noch, die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ zu berücksichtigen und damit das Anfangswertproblem zu lösen. Dazu setzen wir die Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung (18) der Differentialgleichung ein, d.h. für $x = 1$ und $y(x) = y(1) = 0$. Wir erhalten

$$0 = c\sqrt{1} + \frac{1}{2}1^2 \quad \longleftrightarrow \quad 0 = c + \frac{1}{2} \quad \longleftrightarrow \quad c = -\frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$y(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$$

die Lösung des betrachteten Anfangswertproblems und zugleich eine spezielle Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Zur Durchführung der Probe benötigen wir die Ableitung der Lösung des Anfangswertproblems. Es gilt

$$y'(x) = \left(\frac{1}{2}\left(x^2 - \sqrt{x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = x - \frac{1}{4\sqrt{x}}.$$

Wir setzen nun in die Ausgangsgleichung der Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 2xy' - y &= 2x\left(x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1}{2}\left(x^2 - \sqrt{x}\right)\right) \\ &= 2x^2 - \frac{2x}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}x^2 \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis der Korrektheit der Lösung des Anfangswertproblems erbracht.

Aufgabe 8.3. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' + 2y = e^{3t}$$

ggf. mit Hilfe eines Störgliedansatzes für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lösung: Wir erkennen sofort, dass es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, da die Struktur

$$y' + k(t)\,y = s(t)$$

klar zu erkennen ist. Es ist $k(t) = 2$ und $s(t) = e^{3t}$.

Die Standarlösungsmethode ist folglich wieder die Kombination von Trennung der Variable für die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung und Variation der Konstanten für die spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung.

Beginnen wir mit dem ersten Schritt und betrachten die homogene lineare Differentialgleichung $y' + 2y = 0$ bzw. $y' = -2y$. Folglich kann $g(t) = -2$ und $h(y) = y$ gewählt werden

Es sind wieder zwei unbestimmte Integrale zu lösen. Einerseits

$$\int g(t)\,dt = \int -2\,dt = -2t + c_1 \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

und andereseits

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Nun gilt es wieder die beiden unbestimmten Integrale in (20) und (19) gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach y aufzulösen.

$$\begin{aligned} && \int \frac{1}{h(y)}\,dy &= \int g(t)\,dt \\ \longleftrightarrow && \ln|y| + c_2 &= -2t + c_1 \\ \longleftrightarrow && \ln|y| &= -2t + c_3 \quad \text{mit} \quad c_3 = c_1 - c_2 \in \mathbb{R} \\ \longleftrightarrow && |y| &= e^{-2t} \cdot c_4 \quad \text{mit} \quad c_4 = e^{c_3} > 0. \end{aligned}$$

Im letzten Rechenschritt haben wir wieder beide Seiten der Gleichung exponentiert.

Nun können wir uns mit derselben Argumentation wie bei den vorhergehenden Aufgaben des Betrages auf der linken Seite entledigen, indem wir das wechselnde Vorzeichen mit in die Konstante $c = \pm c_4 \neq 0$ stecken. Auch hier erhalten wir für $c = 0$ die triviale Lösung $y(t) = 0$. Somit ergibt sich

$$y_h(t) = c\,e^{-2t} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

Wir vergessen nicht, an dieser Stelle die Probe durchzuführen. Dafür benötigen wir wieder die Ableitung der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Es ist

$$y'(t) = \left(c\, e^{-2t}\right)' = c\,(-2)e^{-2t} = -2c\, e^{-2t}$$

und somit erhalten wir

$$y' + 2y = -2c\, e^{-2t} + 2\left(c\, e^{-2t}\right) = -2c\, e^{-2t} - 2c\, e^{-2t} = 0.$$

Also stimmt unsere allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

Für den zweiten Teilschritt der Lösungsmethode, die Variation der Konstanten, machen wir den Ansatz

$$y = y(t) = c(t)\, e^{-2t} \tag{21}$$

Wir leiten wieder mit der Produktregel formal ab

$$y'(t) = \left(c(t)\, e^{-2t}\right)' = c'(t)\, e^{-2t} + c(t)(-2)\, e^{-2t} = c'(t)\, e^{-2t} - 2c(t)\, e^{-2t}.$$

und können nun in die inhomogene lineare Differentialgleichung einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& y' + 2y = e^{3t} \quad \longleftrightarrow \quad c'(t)\, e^{-2t} - 2c(t)\, e^{-2t} + 2\left(c(t)\, e^{-2t}\right) = e^{3t} \\
\longleftrightarrow \quad & c'(t)\, e^{-2t} - 2c(t)\, e^{-2t} + 2c(t)\, e^{-2t} = e^{3t} \\
\longleftrightarrow \quad & c'(t)\, e^{-2t} = e^{3t} \longleftrightarrow \quad c'(t) = \frac{e^{3t}}{e^{-2t}} \quad \longleftrightarrow \quad c'(x) = e^{3t}\, e^{2t} = e^{5t}.
\end{aligned}$$

Der Term $y(t) = 2c(t)\, e^{-2t}$ ist wieder herausgefallen. Um $c(t)$ zu erhalten, müssen wir nur noch die Ableituung integrieren. Es gilt

$$c(t) = \int c'(t)\, dt = \int e^{5t}\, dt = \frac{1}{5}\, e^{5t} + c_5 \quad \text{mit} \quad c_5 \in \mathbb{R}.$$

Da wir eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung suchen, wählen wir $c_5 = 0$

$$y_s(t) = c(t)\, e^{-2t} = \frac{1}{5}\, e^{5t}\, e^{-2t} = \frac{1}{5}\, e^{3t} \tag{22}$$

und setzen nun $c(t)$ in (21) ein. Es ergibt sich als die gesuchte spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung.

Nun können wir die Ergebnisse der beiden Teilschritte zusammenfassen und erhalten

$$y = y_h + y_s = c\, e^{-2t} + \frac{1}{5}\, e^{3t} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Zur Durchführung der Probe benötigen wir die Ableitung der allgemeinen Lösung. Es gilt

$$y'(t) = c\, e^{-2t} \cdot (-2) + \frac{1}{5}\, e^{3t} \cdot 3 = -2c\, e^{-2t} + \frac{3}{5}\, e^{3t}.$$

Wir setzen nun in die Ausgangsgleichung der Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} y' + 2y &= \left(-2c\,e^{-2t} + \frac{3}{5}\,e^{3t}\right) + 2\left(c\,e^{-2t} + \frac{1}{5}\,e^{3t}\right) \\ &= -2c\,e^{-2t} + \frac{3}{5}\,e^{3t} + 2c\,e^{-2t} + \frac{2}{5}\,e^{3t} = \frac{3}{5}\,e^{3t} + \frac{2}{5}\,e^{3t} = e^{3t} \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis der Korrektheit der Lösung der gegebenen Differentialgleichung erbracht.

Auffällig ist, dass die spezielle Lösung $y_s(t)$, vgl. (22), der inhomogenen linearen Differentialgleichung sich nur um einen Faktor vom Störglied $s(t) = e^{3t}$ unterscheidet. Da $k(t)$ zudem konstant ist, empfiehlt sich daher die Verwendung eines Störgliedansatzes für $y_s(t)$ um schneller und mit weniger Aufwand zur Lösung zu gelangen.

Wir wählen den Ansatz

$$y_s(t) = A\,e^{3t} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist

$$y_s'(t) = A\,e^{3t} \cdot 3 = 3A\,e^{3t}$$

und Einsetzen in die inhomogene lineare Differentialgleichung liefert

$$y' + 2y = \left(3A\,e^{3t}\right) + 2\left(A\,e^{3t}\right) = (3A + 2A)\,e^{3t} = 5A\,e^{3t} \stackrel{!}{=} e^{3t}.$$

Folglich ist $5A = 1$ bzw. $A = \frac{1}{5}$ und somit $y_s(t) = \frac{1}{5}\,e^{3t}$. Zweifellos ein viel kürzerer Rechenweg.

Aufgabe 8.4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy' = y\ln y - y\ln x \quad \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad y(1) = e^2.$$

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass die gesuchte Funktion y von der Variable x abhängt, also $y = y(x)$. Offensichtlich handelt es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Für die Entscheidung über die Trennbarkeit wird eine Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

gesucht. Ausgehend von der expliziten Form

$$y' = \frac{y}{x}\ln y - \frac{y}{x}\ln x$$

unserer Differentialgleichung erkennen wir, dass dies nicht möglich ist. Die Trennung der Variablen scheidet also als Lösungsmethode aus.

Weiterhin wird auch sofort klar, dass es sich nicht um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung handelt, da sie sich nicht auf die Form

$$y' + k(x)\,y = s(x)$$

bringen lässt. Damit sind alle unsere bisher genutzten Lösungsmethoden nicht anwendbar. Wir müssen uns etwas Neues einfallen lassen.

Wir können die Differentialgleichung zunächst unter Verwendung eines Logarithmengesetzes weiter umformen und erhalten

$$y' = \frac{y}{x}\ln y - \frac{y}{x}\ln x \quad \longleftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) \quad \longleftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right). \tag{23}$$

Auffällig ist, dass auf der rechten Seite stets der Quotient $\frac{y}{x}$ vorkommt. Es bietet sich die Substitution $z = \frac{y}{x}$ an. Die Funktion $z = z(x) = \frac{y(x)}{x}$ übernimmt folglich die Rolle von $y = y(x)$. Es gilt aber auch noch $y'(x)$ auf der linken Seite zu ersetzen. Aus der Substitution folgt die Beziehung $y(x) = z(x) \cdot x$. Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir

$$y'(x) = (z(x) \cdot x)' = z'(x)x + z(x).$$

Setzen wir nun in unsere ursprüngliche Differentialgleichung (23) ein, so erhalten wir die transformierte Differentialgleichung

$$z'x + z = z\ln z \quad \longleftrightarrow \quad z' = \frac{1}{x}(z\ln z - z) \quad \longleftrightarrow \quad z' = \frac{z}{x}(\ln z - 1).$$

Wir erkennen sehr schnell, dass die transformierte Differentialgleichung trennbar ist. Es gilt

$$z' = g(x)\cdot h(z) \quad \text{mit} \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad h(z) = z(\ln z - 1).$$

Wir können folglich doch die Trennung der Variablen als Lösungsmethode einsetzen. Die Transformation hat sich gelohnt. Es sind nun zwei unbestimmte Integrale zu berechnen. Einerseits ist

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c_1 \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{24}$$

und anderseits

$$\int \frac{1}{h(z)}\,dz = \int \frac{1}{z(\ln z - 1)}\,dz = \int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\,dz.$$

Bei geschultem Blick erkennt man, dass es sich wieder um eine spezielle Situation handelt. Der Zähler im Integranden ist nämlich gerade die Ableitung des Nenners. In dieser Situation gilt

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \ln|f(t)| + c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Also erhalten wir hier

$$\int \frac{1}{h(z)}\,dz = \int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\,dz = \ln|\ln z - 1| + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Alternativ liese sich dieses Integral auch mit Hilfe einer geeigneten Substitution lösen. Wir setzen $u = u(z) = \ln z - 1$ und erhalten $u' = \frac{du}{dz} = \frac{1}{z}$ bzw. $dz = u\,du$. Formales einsetzen ergibt

$$\int \frac{1}{z(\ln z - 1)}\,dz \left(= \int \frac{1}{zu}\,u\,du \right) = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit der Rücksubstitution $u = \ln z - 1$ erhalten wir dasselbe Resultat wie in (25).

Die beiden unbestimmten Integrale in (25) und (24) sind nun gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach z aufzulösen.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{h(z)}\,dy && = \int g(x)\,dt \\ \longleftrightarrow \quad & \ln|\ln z - 1| + c_2 && = \ln|x| + c_1 \\ \longleftrightarrow \quad & \ln|\ln z - 1| && = \ln|x| + c_3 \quad \text{mit} \quad c_3 = c_1 - c_2 \in \mathbb{R} \\ \longleftrightarrow \quad & |\ln z - 1| && = |x| \cdot c_4 \quad \text{mit} \quad c_4 = e^{c_3} > 0. \end{aligned}$$

Im letzten Rechenschritt haben wir beide Seiten der Gleichung wieder exponentiert.

Nach Voraussetzung ist $x > 0$, so dass $|x| = x$ gilt. Nun können wir uns mit derselben Argumentation wie bei den letzten Aufgaben des Betrages auf der linken Seite entledigen, indem wir das wechselnde Vorzeichen mit in die Konstante $c = \pm c_4 \neq 0$ stecken. Somit ergibt sich

$$\ln z - 1 = cx \quad \longleftrightarrow \quad \ln z = cx + 1 \quad \longleftrightarrow \quad z = e^{cx+1}.$$

nun müssen wir nur noch die anfängliche Substitution rückgängig machen indem wir $z = \frac{y}{x}$ setzen und erhalten

$$y(x) = xe^{cx+1} \quad \text{mit} \quad c \neq 0 \tag{26}$$

als allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Nun heißt es noch, die Anfangsbedingung $y(1) = e^2$ zu berücksichtigen und damit das Anfangswertproblem zu lösen. Dazu setzen wir die Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung (26) der Differentialgleichung ein, d.h. für $x = 1$ und $y(x) = y(1) = e^2$. Wir erhalten

$$e^2 = 1e^{c+1} \quad \longleftrightarrow \quad 2 = c + 1 \quad \longleftrightarrow \quad c = 1.$$

Damit ist

$$y(x) = xe^{x+1}$$

die Lösung des betrachteten Anfangswertproblems und zugleich eine spezielle Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Zur Durchführung der Probe benötigen wir die Ableitung der Lösung des Anfangswertproblems. Es gilt

$$y'(x) = 1 \cdot e^{x+1} + xe^{x+1} \cdot 1 = (x+1)\,e^{x+1}.$$

Wir setzen nun in die Ausgangsgleichung der Differentialgleichung ein und erhalten einerseits für die linke Seite

$$xy' = x\left((x+1)\,e^{x+1}\right) = \left(x^2 + x\right)e^{x+1}$$

und andererseits für die rechte Seite

$$\begin{aligned} y \ln y - y \ln x = y \ln\left(\frac{y}{x}\right) &= \left(xe^{x+1}\right) \ln\left(\frac{xe^{x+1}}{x}\right) \\ &= \left(xe^{x+1}\right) \ln\left(e^{x+1}\right) = xe^{x+1}(x+1) = \left(x^2 + x\right)e^{x+1}. \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis der Korrektheit der Lösung des Anfangswertproblems erbracht.

Anmerkung: Bei der in dieser Aufgabe betrachteten Differentialgleichung handelt es sich um eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, vgl. hierzu Abschnitt 3.8 des Arbeitsbuches.

Aufgabe 8.5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssysteme

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 2y_2 + 2t \\ y_2' &= -4y_1 - y_2 \qquad \text{und} \end{aligned}$$

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 6y_2. \end{aligned}$$

Wie lassen sich diese Differentialgleichungssysteme jeweils als Differentialgleichung höherer Ordnung darstellen?

Lösung:

a) Zunächst stellen wir fest, dass sich das gegebene Differentialgleichungssystem in der Form

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{s}(t)$$

mit

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

schreiben lässt. Es handelt sich folglich um ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Die Standardlösungsmethode hierfür ist – in Analogie zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung – eine Lösungsmethode in zwei Teilschritten. Im ersten Teilschritt wird die allgemeine Lösung $\vec{y}_h$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystem ermittelt. Im zweiten Teilschritt wird dann wieder eine spezielle Lösung $\vec{y}_s$ des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystem bestimmt. Dazu nutzt man die Methode der Variation der Konstanten. Natürlich in allgemeinerer, weil eben mehrdimensionaler Form.

Beginnen wir mit dem ersten Teilschritt. Die Standardlösungsmethode für diese Situation ist die sogenannte Matrizenmethode. Hierzu sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix A zu berechnen. Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \cdot (-4) = -5 - 5\lambda + \lambda + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{aligned}$$

und mit Hilfe der p, q-Formel dessen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} - 3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1.$$

Also sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte der Matrix A. Beide Eigenwerte haben die algebraische und geometrische Vielfachheit 1.

Die zu den Eigenwerten λ_i, $i = 1{,}2$, gehörigen Eigenvektoren sind nichttriviale Lösungen $\vec{x}$ der homogenen linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$. Wir beginnen mit $\lambda_1 = 1$. Es ist

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wir versuchen, diese Matrix bzw. das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem direkt zu interpretieren. Eine der beiden Zeilen kann entfallen, da die erste Zeile multipliziert mit -1 die zweite Zeile ergibt. Es verbleibt eine Bedingung für die beiden unbekannten Komponenten x_1 und x_2 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Es kann also eine der beiden Komponenten frei gewählt werden. Die erste Zeile steht für $4x_1 + 2x_2 = 0$ bzw. $2x_1 + x_2 = 0$. Wir wählen $x_1 = s \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $x_2 = -2x_1 = -2s$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -2s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Wert $s \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_1} des Eigenwertes $\lambda_1 = 1$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} wählen wir den Vektor $\vec{v}_1 = [1, -2]^T$, als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

Nun gilt es noch einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ zu bestimmen. Es ist

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Wir erkennen wieder, dass eine Zeile entfallen kann. Es verbleibt eine Bedingung für die beiden unbekannten Komponenten x_1 und x_2 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Es kann also eine der beiden Komponenten frei gewählt werden. Die erste Zeile steht für $4x_1 + 4x_2 = 0$ bzw. $x_1 + x_2 = 0$. Wir wählen $x_1 = s \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $x_2 = -x_1 = -s$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Wert $s \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_2} des Eigenwertes $\lambda_2 = 3$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_2} wählen wir den Vektor $\vec{v}_2 = [1, -1]^T$, als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$.

Somit bilden

$$\vec{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ein Fundamentalsystem und als allgemeine Lösung unseres homogenen linearen Differentialgleichungssystems ergibt sich

$$\vec{y}_h(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

In komponentenweiser Schreibweise erhalten wir die Funktionen

$$y_{1,h}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \quad \text{und} \quad y_{2,h}(t) = -2c_1 e^t - c_2 e^{3t}$$

als Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystem.

Sicherheitshalter wollen wir auch hier nach dem ersten Teilschritt eine Probe durchführen. Es gilt

$$y'_{1,h}(t) = c_1 e^t + 3c_2 e^{3t} \quad \text{und} \quad y'_{2,h}(t) = -2c_1 e^t - 3c_2 e^{3t}.$$

Damit ergibt sich auf der rechten Seite der ersten Gleichung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} 5y_{1,h}(t) + 2y_{2,h}(t) &= 5\left(c_1 e^t + c_2 e^{3t}\right) + 2\left(-2c_1 e^t - c_2 e^{3t}\right) \\ &= 5c_1 e^t + 5c_2 e^{3t} - 4c_1 e^t - 2c_2 e^{3t} = c_1 e^t + 3c_2 e^{3t} \stackrel{!}{=} y'_{1,h}(t) \end{aligned}$$

und auf der rechten Seite der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} -4y_{1,h}(t) - y_{2,h}(t) &= -4\left(c_1 e^t + c_2 e^{3t}\right) - \left(-2c_1 e^t - c_2 e^{3t}\right) \\ &= -4c_1 e^t - 4c_2 e^{3t} + 2c_1 e^t + c_2 e^{3t} = -2c_1 e^t - 3c_2 e^{3t} \stackrel{!}{=} y'_{2,h}(t). \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems korrekt und wir können damit in den zweiten Teilschritt unseres Lösungsverfahrens einsteigen. Der Ansatz für die Variation der Konstanten lautet jetzt

$$\vec{y}_s(t) = c_1(t)\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2(t)\, e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

bzw. in komponentenweiser Schreibweise

$$\begin{aligned} y_{1,s}(t) &= c_1(t)\, e^t + c_2(t)\, e^{3t} \\ y_{2,s}(t) &= -2c_1(t)\, e^t - c_2(t)\, e^{3t}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man auch in der Form

$$\vec{y}_s(t) = M(t)\vec{c}(t)$$

mit

$$\vec{y}_s(t) = \begin{bmatrix} y_{1,s}(t) \\ y_{2,s}(t) \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} \\ -2e^t & -e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}$$

schreiben. Durch die Variation der Konstanten erhält man zwar keine direkte Lösung für das gesuchte $\vec{c}(t)$, jedoch – in Analogie zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung – eine Lösung für $\vec{c}\,'(t)$. Also man muss auch hier wieder integrieren. Es gilt

$$\vec{c}\,'(t) = \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = M^{-1}(t)\, \vec{s}(t). \tag{27}$$

Bitte fragen Sie an dieser Stelle nicht, woher diese Lösung kommt. Nehmen Sie es einfach hin. Sie werden sehen, dass es funktioniert. Leider findet man in der Vorlesung dazu keine Aussagen.

Zunächst berechnen wir $\det(M(t))$, um zu überprüfen, ob die inverse Matrix existiert. Es gilt

$$\det(M(t)) = \begin{vmatrix} e^t & e^{3t} \\ -2e^t & -e^{3t} \end{vmatrix} = e^t \cdot \left(-e^{3t}\right) - e^{3t} \cdot \left(-2e^t\right) = -e^{4t} + 2e^{4t} = e^{4t} \neq 0.$$

Folglich ist $M(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ invertierbar. Wir erinnern uns. Für

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(B) \neq 0 \quad \text{gilt} \quad B^{-1} = \frac{1}{\det(B))} \begin{bmatrix} b_{2,2} & -b_{1,2} \\ -b_{2,1} & b_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir für die inverse Matrix von $M(t)$

$$M^{-1}(t) = \frac{1}{e^{4t}} \begin{bmatrix} -e^{3t} & -e^{3t} \\ 2e^t & e^t \end{bmatrix} = e^{-4t} \begin{bmatrix} -e^{3t} & -e^{3t} \\ 2e^t & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

und für die Lösung $\vec{c}\,'(t)$ in (27)

$$\vec{c}\,'(t) = M^{-1}(t)\, \vec{s}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{-t} \\ 4te^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Nun gilt es zu integrieren. Es gilt

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int c_1'(t)\, dt = \int -2te^{-t}\, dt = (-2t)\left(-e^{-t}\right) - \int (-2)\left(-e^{-t}\right)\, dt \\ &= 2te^{-t} - 2\int e^{-t}\, dt = 2te^{-t} + 2e^{-t} + c_3 = 2(t+1)e^{-t} + c_3 \quad \text{mit} \quad c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bei der partiellen Integration haben wir $u(t) = -2t$, $v'(t) = e^{-t}$ und somit $u'(t) = -2$ und $v(t) = \int v'(t)\, dy = -e^{-t}$ gewählt.

Ganz analog erhalten wir durch partielle Integration mit $u(t) = 4t$, $v'(t) = e^{-3t}$ und somit $u'(t) = 4$ und $v(t) = \int v'(t)\,dy = -\frac{1}{3}e^{-3t}$

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int c_2'(t)\,dt = \int 4te^{-3t}\,dt = 4t\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right) - \int 4\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)\,dt \\ &= -\frac{4}{3}te^{-3t} + \frac{4}{3}\int -e^{-3t}\,dt = -\frac{4}{3}te^{-3t} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right) + c_4 \\ &= -\frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{3}\right)e^{-3t} + c_4 \quad \text{mit} \quad c_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da wir eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems suchen, können wir $c_3 = 0$ und $c_4 = 0$ wählen, und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{y}_s(t) = \begin{bmatrix} y_{1,s}(t) \\ y_{2,s}(t) \end{bmatrix} &= c_1(t)\,e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2(t)\,e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \left(2(t+1)e^{-t}\right) e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \left(-\frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{3}\right)e^{-3t}\right) e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 2(t+1)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2t + 2 - \frac{4}{3}t - \frac{4}{9} \\ -4t - 4 + \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t + \frac{14}{9} \\ -\frac{8}{3}t - \frac{32}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bzw. in komponentenweiser Schreibweise

$$y_{1,s}(t) = \frac{2}{3}t + \frac{14}{9} \quad \text{und} \quad y_{2,s}(t) = -\frac{8}{3}t - \frac{32}{9}.$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_h(t) + \vec{y}_s(t) = c_1e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t + \frac{14}{9} \\ -\frac{8}{3}t - \frac{32}{9} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

bzw. in komponentenweiser Schreibweise

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{1,h}(t) + y_{1,s}(t) = c_1e^t + c_2e^{3t} + \frac{2}{3}t + \frac{14}{9} \quad \text{und} \\ y_2(t) &= y_{2,h}(t) + y_{2,s}(t) = -2c_1e^t - c_2e^{3t} - \frac{8}{3}t - \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Nach der vielen Rechenarbeit wird es jetzt spannend, denn wir wollen die Probe durchführen. Dazu benötigen wir wieder die Ableitungen unserer Lösungen. Es gilt

$$y_1'(t) = c_1e^t + 3c_2e^{3t} + \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad y_2'(t) = -2c_1e^t - 3c_2e^{3t} - \frac{8}{3}.$$

Damit ergibt sich auf der rechten Seite der ersten Gleichung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}5y_1(t) + 2y_2(t) + 2t &= 5\left(c_1e^t + c_2e^{3t} + \frac{2}{3}t + \frac{14}{9}\right) + 2\left(-2c_1e^t - c_2e^{3t} - \frac{8}{3}t - \frac{32}{9}\right) + 2t \\ &= (5-4)c_1e^t + (5-2)c_2e^{3t} + \left(\frac{10}{3} - \frac{16}{3} + 2\right)t + \left(\frac{70}{9} - \frac{64}{9}\right) \\ &= c_1e^t + 3c_2e^{3t} + 0t + \frac{6}{9} = c_1e^t + 3c_2e^{3t} + \frac{2}{3} \stackrel{!}{=} y_1'(t)\end{aligned}$$

und auf der rechten Seite der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned}-4y_1(t) - y_2(t) &= -4\left(c_1e^t + c_2e^{3t} + \frac{2}{3}t + \frac{14}{9}\right) - \left(-2c_1e^t - c_2e^{3t} - \frac{8}{3}t - \frac{32}{9}\right) \\ &= (-4+2)c_1e^t + (-4+1)c_2e^{3t} + \left(-\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right)t + \left(-\frac{56}{9} + \frac{32}{9}\right) \\ &= -2c_1e^t - 3c_2e^{3t} + 0t - \frac{24}{9} = -2c_1e^t - 3c_2e^{3t} - \frac{8}{3} \stackrel{!}{=} y_2'(t).\end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis der Korrektheit der Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems erbracht.

Kommen wir nun zum zweiten Teil der Aufgabenstellung, der Überführung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}y_1' &= 5y_1 + 2y_2 + 2t \\ y_2' &= -4y_1 - y_2\end{aligned}$$

in eine Differentialgleichung höherer Ordnung. Wir beginnen mit der Transformation in eine Differentialgleichung in y_1. Dazu wählen wir den Ansatz

$$y = y_1.$$

Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned}y' &= 5y + 2y_2 + 2t \\ y_2' &= -4y - y_2.\end{aligned}$$

Es gilt jetzt, die noch unbekannte Größen y_2 und y_2' zu bestimmen. Dazu können wir die erste Gleichung äquivalent umformen, da dort nur eine der unbekannten Größen vorkommt. Wir erhalten

$$y' = 5y + 2y_2 + 2t \quad \longleftrightarrow \quad 2y_2 = y' - 5y - 2t \quad \longleftrightarrow \quad y_2 = \frac{y'}{2} - \frac{5}{2}y - t.$$

Daraus ergibt sich

$$y_2' = \frac{y''}{2} - \frac{5}{2}y' - 1.$$

Nun können wir in die zweite Gleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} y_2' = -4y - y_2 \quad &\longleftrightarrow \quad \left(\frac{y''}{2} - \frac{5}{2}y' - 1\right) = -4y - \left(\frac{y'}{2} - \frac{5}{2}y - t\right) \\ &\longleftrightarrow \quad y'' - 5y' - 2 = -8y - y' + 5y + 2 \\ &\longleftrightarrow \quad y'' - 4y' + 3y = 2t + 2. \end{aligned}$$

Diese inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten entspricht dem gegebenen Differentialgleichungssystem. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gerade die Funktion y_1, die eine Komponente der Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Die andere Komponente y_2 der Lösung des Differentialgleichungssystems erhalten wir mit Hilfe der Gleichung $y_2 = \frac{y'}{2} - \frac{5}{2}y - t$.

Wir werden noch lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen. Sie werden sehen, dass der rechnerische Aufwand hierfür gravierend niediger ist als für ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Daher empfiehlt es sich, ein gegebenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zunächst in eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu transformieren, diese Differentialgleichung zu lösen und dann daraus die Komponenten der Lösung des Differentialgleichungssystems zu gewinnen.

Rest der Teilaufgabe fakultativ

Nun wollen wir noch unser gegebenes Differentialgleichungssystem in eine Differentialgleichung höherer Ordnung in y_2 transformieren. Das geht ganz analog zu y_1. Wir wählen entsprechend den Ansatz

$$y = y_2$$

und erhalten

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 2y + 2t \\ y' &= -4y_1 - y. \end{aligned}$$

Jetzt formen wir die zweite Gleichung äquivalent um. Es ergibt sich

$$y' = -4y_1 - y \quad \longleftrightarrow \quad 4y_1 = -y' - y \quad \longleftrightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{4}(y' + y)$$

sowie

$$y_1' = -\frac{1}{4}(y'' + y').$$

Nun können wir in die erste Gleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} y_1' = 5y_1 + 2y + 2t \quad &\longleftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{4}(y'' + y')\right) = 5\left(-\frac{1}{4}(y' + y)\right) + 2y + 2t \\ &\longleftrightarrow \quad y'' + y' = 5(y' + y) - 8y - 8t \\ &\longleftrightarrow \quad y'' - 4y' + 3y = -8t. \end{aligned}$$

Diese inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist auch äquivalent zum gegebenen Differentialgleichungssystem. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gerade die Funktion y_2, die eine Komponente der Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Die andere Komponente y_1 der Lösung des Differentialgleichungssystems erhalten wir mit Hilfe der Gleichung $y_1 = -\frac{1}{4}(y' + y)$.

Es ist also egal, ob man das lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in y_1 oder y_2 transformiert. In beiden Fällen ist der Rechenaufwand etwa gleich groß und deutlich geringer als für die Lösung des äquivalenten Differentialgleichungssystems.

b) Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 6y_2. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass es sich in der Form

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)$$

mit

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

schreiben lässt. Es handelt sich folglich um eine homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Unser Lösungsverfahren besteht also nicht aus zwei Schritten, sondern der erste Schritt genügt bereits. Beginnen wir also mit der Matrizenmethode. Es sind wieder die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix A zu berechnen.

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(6-\lambda) - (-1)\cdot 1 = 24 - 4\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der p,q-Formel ergibt sich

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\frac{(-10)^2}{4} - 25} = 5 \pm \sqrt{25-25} = 2.$$

Also ist $\lambda_1 = 5$ doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms, der Eigenwert $\lambda_1 = 5$ hat die algebraische Vielfachheit 2.

Nun gilt es, die Lösungen $\vec{x}$ des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$ zu bestimmen.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eine der beiden Zeilen kann entfallen, da die erste Zeile multipliziert mit -1 die zweite Zeile ergibt. Es verbleibt eine Bedingung für die beiden unbekannten Komponenten x_1 und x_2 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Es kann also eine der beiden Komponenten frei gewählt werden. Die zweite Zeile steht für $x_1 + x_2 = 0$. Wir wählen $x_1 = s \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $x_2 = -x_1 = -s$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Wert $s \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_1} des Eigenwertes $\lambda_1 = 5$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} wählen wir den Vektor $\vec{v}_1 = [1, -1]^T$, als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$. Der Eigenraum V_{λ_1} ist somit eindimensional und der Eigenwert $\lambda_1 = 5$ hat die geometrische Vielfachheit 1. Die Koeffizientenmatrix A ist folglich nicht diagonalisierbar.

Daher ist nun ein Hauptvektor zweiter Stufe ($k = 2$) zu bestimmen. Diese ergeben sich als Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{v}_1$. Vergleichen Sie hierzu den Satz 182 des Arbeitsbuches. Als Startsituation für das Gauss-Jordan-Verfahren ergibt sich wegen

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \qquad \begin{array}{rr|rl} -1 & -1 & 1 & \mathrm{I} \\ 1 & 1 & -1 & \mathrm{II} \\ \hline \end{array}$$

Wir erkennen sofort, dass eine Zeile entfallen kann, brauchen also im Gauss-Jordan-Verfahren nicht weiterzurechnen Es verbleibt eine Bedingung für die beiden unbekannten Komponenten x_1 und x_2 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Es kann also eine der beiden Komponenten frei gewählt werden. Die zweite Zeile steht für $x_1 + x_2 = -1$. Wir wählen $x_1 = s \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $x_2 = -1 - x_1 = -1 - s$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -1 - s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \cdot \vec{v}_1.$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Wert $s \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, sind Hauptvektoren zweiter Stufe des Eigenwertes $\lambda_1 = 5$. Als Hauptvektor wählen wir den Vektor $\vec{w}_1 = [0, -1]^T$ ($s = 0$). Somit bilden, vgl. Satz 182 des Arbeitsbuches,

$$\vec{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \vec{y}_2(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\vec{w}_1 + t(A - \lambda_1 I)\vec{w}_1\right) = e^{\lambda_1 t}\left(\vec{w}_1 + t\vec{v}_1\right) \\ &= e^{5t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem. Man beachte, dass $\vec{w}_1$ eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{v}_1$ ist. Es gilt also $(A - \lambda_1 I)\vec{w}_1 = \vec{v}_1$. Als allgemeine

Lösung unseres homogenen linearen Differentialgleichungssystem ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= \vec{y}_h(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t) \\ &= c_1 e^{5t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + c_2 e^{5t}\left(\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix}c_1 + c_2 t\\ -c_1 - c_2 - c_2 t\end{bmatrix} e^{5t} = \begin{bmatrix}c_1 + c_2 t\\ -(c_1 + c_2(t+1))\end{bmatrix} e^{5t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

In komponentenweiser Schreibweise erhalten wir die Funktionen

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{5t} \quad \text{und} \quad y_2(t) = -\left(c_1 + c_2(t+1)\right) e^{5t}$$

als Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystem.

Kommen wir zur Probe. Wir benötigen dafür die Ableitung der Lösungen. Es gilt

$$y_1'(t) = \left((c_1 + c_2 t)\, e^{5t}\right)' = c_2 e^{5t} + (c_1 + c_2 t)\, e^{5t}\cdot 5 = (5c_1 + c_2 + 5c_2 t)\, e^{5t}$$

und

$$\begin{aligned}y_2'(t) &= \left((-c_1 - c_2 - c_2 t)\, e^{5t}\right)' = -c_2 e^{5t} + (-c_1 - c_2 - c_2 t)\, e^{5t}\cdot 5 \\ &= (-5c_1 - 6c_2 - 5c_2 t)\, e^{5t}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich auf der rechten Seite der ersten Gleichung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}4y_1(t) - y_2(t) &= 4\,(c_1 + c_2 t)\, e^{5t} - (-c_1 - c_2 - c_2 t)\, e^{5t} \\ &= (4c_1 + 4c_2 t + c_1 + c_2 + c_2 t)\, e^{5t} \\ &= (5c_1 + c_2 + 5c_2 t)\, e^{5t} \overset{!}{=} y_1'(t)\end{aligned}$$

und auf der rechten Seite der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned}y_1(t) + 6y_2(t) &= (c_1 + c_2 t)\, e^{5t} + 6\,(-c_1 - c_2 - c_2 t)\, e^{5t} \\ &= (c_1 + c_2 t - 6c_1 - 6c_2 - 6c_2 t)\, e^{5t} \\ &= (-5c_1 - 6c_2 - 5c_2 t)\, e^{5t} \overset{!}{=} y_2'(t).\end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems korrekt.

Kommen wir nun wieder zum zweiten Teil der Aufgabenstellung, der Überführung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 6y_2\end{aligned}$$

in eine Differentialgleichung höherer Ordnung. Wir beginnen mit der Transformation in eine Differentialgleichung in y_1 und wählen dazu den Ansatz $y = y_1$. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} y' &= 4y - y_2 \\ y_2' &= y + 6y_2 \end{aligned}$$

Es gilt, die noch unbekannte Größen y_2 und y_2' zu bestimmen. Dazu können wir die erste Gleichung äquivalent umformen, da dort nur eine der unbekannten Größen vorkommt. Wir erhalten

$$y' = 4y - y_2 \quad \longleftrightarrow \quad y_2 = 4y - y'.$$

Daraus ergibt sich

$$y_2' = 4y' - y''.$$

Nun können wir in die zweite Gleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} y_2' = y + 6y_2 \quad &\longleftrightarrow \quad (4y' - y'') = y + 6\,(4y - y') \\ &\longleftrightarrow \quad 4y' - y'' = y + 24y - 6y' \\ &\longleftrightarrow \quad y'' - 10y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten entspricht dem gegebenen Differentialgleichungssystem. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gerade die Funktion y_1, die eine Komponente der Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Die andere Komponente y_2 der Lösung des Differentialgleichungssystems erhalten wir mit Hilfe der Gleichung $y_2 = 4y - y'$.

Rest der Teilaufgabe fakultativ

Nun wollen wir noch unser gegebenes Differentialgleichungssystem in eine Differentialgleichung höherer Ordnung in y_2 transformieren. Das geht ganz analog zu y_1. Wir wählen entsprechend den Ansatz $y = y_2$. und erhalten

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y \\ y' &= y_1 + 6y \end{aligned}$$

Jetzt formen wir die zweite Gleichung äquivalent um. Es ergibt sich

$$y' = y_1 + 6y \quad \longleftrightarrow \quad y_1 = y' - 6y$$

sowie

$$y_1' = y'' - 6y'.$$

Nun können wir in die erste Gleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} y_1' = 4y_1 - y \quad &\longleftrightarrow \quad (y'' - 6y') = 4\,(y' - 6y) - 6y \\ &\longleftrightarrow \quad y'' - 6y' = 4\,(y' - 6y) - 6y \\ &\longleftrightarrow \quad y'' - 10y' + 25y = 0 \end{aligned}$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten entspricht dem gegebenen Differentialgleichungssystem. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gerade die Funktion y_2, die eine Komponente der Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Die andere Komponente y_1 der Lösung des Differentialgleichungssystems erhalten wir mit Hilfe der Gleichung $y_1 = y' - 6y$.

Jetzt tut sich dem aufmerksamen Studierenden eine Frage auf. Wie soll das gehen? Ein und dieselbe homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten liefert einmal die Lösung y_1 und einmal die Lösung y_2. Diese Lösung muss aber dieselbe sein. Die Komponenten y_1 und y_2 der Lösungs des Differentialgleichungssystem sind aber verschieden. Das ist doch ein Widerspruch!

Gut. Nehmen wir an, wir hätten die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

als Differentialgleichung in y_2 gelöst. Wie wir noch sehen werden, wird sich

$$y(t) = (c_3 + c_4 t)\, e^{5t} \overset{!}{=} y_2(t) \quad \text{mit} \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung ergeben.

Die uns bekannte Lösung des Differentialgleichungssystem lautet jedoch

$$y_2(t) = (-c_1 - c_2 - c_2 t)\, e^{5t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wählen wir $c_4 = -c_2$ und $c_3 = -c_1 - c_2$, so sind $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ und beide Lösungen für y_2 stimmen überein. Wie sieht es dann aber mit y_1 aus? Wir haben die Gleichung

$$y_1 = y' - 6y = y_2' - 6y_2.$$

Es ist

$$y_2'(t) = \big((c_3 + c_4 t)\, e^{5t}\big)' = c_4 e^{5t} + (c_3 + c_4 t)\, e^{5t} \cdot 5 = (5c_3 + c_4 + 6c_4 t)\, e^{5t}.$$

und damit

$$\begin{aligned} y_1(t) = y_2'(t) - 6y_2(t) &= (5c_3 + c_4 + 5c_4 t)\, e^{5t} - 6\,\big((c_3 + c_4 t)\, e^{5t}\big) \\ &= (5c_3 + c_4 + 5c_4 t - 6c_3 - 6c_4 t)\, e^{5t} = (-c_3 + c_4 - c_4 t)\, e^{5t} \\ &= (-(-c_1 - c_2) - c_2 + c_2 t)\, e^{5t} = (c_1 + c_2 t)\, e^{5t}. \end{aligned}$$

Das ist das uns bekannte y_1 mit den Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Es ist also doch alles in Ordnung. Wir erhalten schon dieselben Lösungen, nur ausgedrückt mit anderen Konstanten. Da die Konstanten beliebig reell sind, sind die Lösungsscharen dieselben.

Genauso würde es laufen, wenn wir ausgehend von der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten als Differentialgleichung in y_1 gestartet wären. Dann wäre y_1 ja gleich die richtige Lösung $y_1(t) = (c_3 + c_4 t)\, e^{5t}$ und y_2 würde sich über die Gleichung $y_2 = 4y - y'$ als $y_2(t) = (-c_3 - c_4 - c_4 t)\, e^{5t}$ ergeben. In dem Fall wäre $c_3 = c_1 \in \mathbb{R}$ und $c_4 = c_2 \in \mathbb{R}$ zu wählen.

Aufgabe 8.6. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

a) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

b) Überführen Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Lösung:

a) Wir stellen fest, dass es sich bei der gegebenen Differentialgleichung um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten handelt. Die Lösungsmethode für diese Art von Differentialgleichungen ist im Satz 184 des Arbeitsbuches zusammmengefasst.

   Wir können direkt zum charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

   gelangen und bestimmen mit Hilfe der p, q-Formel dessen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - 3} = -1 \pm \sqrt{1 - (-3)} = -1 \pm 2.$$

   Also sind $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 1$ die gesuchten Nullstellen.

   Als Fundamentalsystem ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen

$$y_{h,1}(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-3t} \quad \text{und} \quad y_{h,2}(t) = e^{\lambda_2 t} = e^t$$

   und wir erhalten

$$y(t) = c_1 y_{h,1}(t) + c_2 y_{h,2}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

   als allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Zur Durchführung der Probe benötigen wir die ersten beiden Ableitungen der Lösung der Differentialgleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(t) &= c_1 e^{-3t} \cdot (-3) + c_2 e^t \cdot 1 = -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \quad \text{und} \\ y''(t) &= -3c_1 e^{-3t} \cdot (-3) + c_2 e^t \cdot 1 = 9c_1 e^{-3t} + c_2 e^t. \end{aligned}$$

Wir setzen nun in die Ausgangsgleichung der Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= \left(9c_1 e^{-3t} + c_2 e^t\right) + 2\left(-3c_1 e^{-3t} + c_2 e^t\right) - 3\left(c_1 e^{-3t} + c_2 e^t\right) \\ &= c_1 e^{-3t}(9 - 6 - 3) + c_2 e^t (1 + 2 - 3) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis der Korrektheit der Lösung der Differentialgleichung erbracht.

b) Nun wollen wir die gegebene homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung überführen. Dazu wählen wir den Ansatz

$$y_1 = y \quad \text{und} \quad y_2 = y' = y_1'.$$

Daraus erhalten wir

$$y_1' = y_2$$

als erste Gleichung des Systems und aus der ursprünglichen Differentialgleichung

$$y_2' + 2y_2 - 3y_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2$$

die zweite Gleichung des Systems. Das Differentialgleichungssystem lautet also

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_2 \quad \text{bzw.} \end{aligned}$$

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{s}(t)$$

mit

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das dazugehörige Differentialgleichungssystem ist folglich ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

Rest der Teilaufgabe fakultativ

Dieses System könnten wir jetzt mit Hilfe der Matrizenmethode lösen. Wir würden das charakteristische Polynom $c_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$ erhalten und daher $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 1$ als Eigenwerte der Matrix A. Beide Eigenwerte haben die algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Als Eigenvektoren ergeben sich $\vec{v}_1 = [1,-3]^T$ und $\vec{v}_2 = [1,1]^T$. Als allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt sich damit

$$y(t) = y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = c_1 e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

In komponentenweiser Schreibweise erhalten wir die Funktionen

$$y_1(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \quad \text{und} \quad y_2(t) = -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^t.$$

als Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystem. Offensichtlich gilt $y_1(t) = y(t)$ und $y_2(t) = y'(t)$.

Aufgabe 8.7. Bestimmen Sie das Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 29y = 0$$

sowie die Lösung des dazugehörigen Anfangswertproblems mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 15.$$

Lösung: Die Differentialgleichung ist hier in einer anderen Schreibweise für die Ableitungen der gesuchten Funktion $y(t)$ gegeben. Diese Schreibweise wird oft bei physikalischen Problemstellungen verwendet. Sie entspricht in unsererer bisherigen Schreibweise der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 29y = 0.$$

Es handelt sich wieder um eine eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristischen Polynom ist jetzt

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 29.$$

Wegen $D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{16}{4} - 29 = 4 - 29 = -25 < 0$ erhalten wir komplexwertige Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{29 - \frac{4^2}{4}} = -2 \pm i\sqrt{29-4} = -2 \pm 5i = \mu \pm i\omega.$$

Also sind $\lambda_1 = \mu - i\omega = -2 - 5i$ und $\lambda_2 = \mu + i\omega = -2 + 5i$ die gesuchten Nullstellen.

Als Fundamentalsystem ergibt sich jetzt gemäß Satz 184 des Arbeitsbuches

$$y_{h,1}(t) = e^{\mu t}\cos(\omega t) = e^{-2t}\cos(5t) \quad \text{und} \quad y_{h,2}(t) = e^{\mu t}\sin(\omega t) = e^{-2t}\sin(5t)$$

und wir erhalten

$$y(t) = c_1 y_{h,1}(t) + c_2 y_{h,2}(t) = c_1 e^{-2t}\cos(5t) + c_2 e^{-2t}\sin(5t) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Nun heißt es noch, die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 15$ zu berücksichtigen und damit das Anfangswertproblem zu lösen. Dazu setzen wir zunächst die erste Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ein, d.h. für $t = 0$ und $y(t) = y(0) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & 0 = c_1 e^{-2\cdot 0} \cos(5 \cdot 0) + c_2 e^{-2\cdot 0t} \sin(5 \cdot 0) \\ \longleftrightarrow \quad & 0 = c_1 \cdot 1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \cdot 0 \quad \longleftrightarrow \quad 0 = c_1. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich unsere Lösung zu

$$y(t) = c_2 e^{-2t} \sin(5t) \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Um auch die zweite Anfangsbedingung einzusetzen, müssen wir zunächst die Lösung ableiten und erhalten

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(c_2 e^{-2t} \sin(5t)\right)' = c_2 e^{-2t} \cdot (-2) \sin(5t) + c_2 e^{-2t} \cos(5t) \cdot 5 \\ &= c_2 e^{-2t} \left(-2 \sin(5t) + 5 \cos(5t)\right), \end{aligned}$$

die Lösung des betrachteten Anfangswertproblems und zugleich eine spezielle Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Einsetzen von $t = 0$ und $y'(t) = y'(0) = 15$ ergibt

$$\begin{aligned} & 15 = c_2 e^{-2\cdot 0} \left(-2 \sin(5 \cdot 0) + 5 \cos(5 \cdot 0)\right) \\ \longleftrightarrow \quad & 15 = c_2 \cdot 1 \left(-2 \cdot 0 + 5 \cdot 1\right) \quad \longleftrightarrow \quad 15 = c_2 \cdot 5 \quad \longleftrightarrow \quad c_2 = 3. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$y(t) = 3e^{-2t} \sin(5t)$$

als Lösung des Anfangswertproblems und zugleich eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

Zur Durchführung der Probe benötigen wir noch die zweite Ableitung der Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned} y''(t) &= \left(3e^{-2t} \left(-2 \sin(5t) + 5 \cos(5t)\right)\right)' \\ &= 3e^{-2t} \cdot (-2) \left(-2 \sin(5t) + 5 \cos(5t)\right) + 3e^{-2t} \left(-2 \cos(5t) \cdot 5 + 5(-\sin(5t)) \cdot 5\right) \\ &= e^{-2t} \left[\sin(5t)(3 \cdot 4 + 3 \cdot (-25)) + \cos(5t)(3 \cdot (-10) - 3 \cdot (-10))\right] \\ &= e^{-2t} \left(-63 \sin(5t) - 60 \cos(5t)\right) \end{aligned}$$

Wir setzen nun in die Ausgangsgleichung der Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 29y &= \left(e^{-2t} \left(-63 \sin(5t) - 60 \cos(5t)\right)\right) + \\ &\quad 4 \left(3e^{-2t} \left(-2 \sin(5t) + 5 \cos(5t)\right)\right) + 29 \left(3e^{-2t} \sin(5t)\right) \\ &= e^{-2t} \left[\sin(5t)(-63 + 4 \cdot 3 \cdot (-2) + 29 \cdot 3) + \cos(5t)(-60 + 4 \cdot 3 \cdot 5)\right] \\ &= e^{-2t} \left[\sin(5t)(-63 - 24 + 87) + \cos(5t)(-60 + 60)\right] \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis der Korrektheit der Lösung des Anfangswertproblems erbracht.

Aufgabe 8.8. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 4t^2 - 10.$$

Überprüfen Sie mit Hilfe der WRONSKI-Determinante, dass ein Fundamentalsystem vorliegt.

Lösung: Es handelt sich um eine eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungsmethode besteht aus zwei Teilschritten. Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Im zweiten Teilschritt wird dann mit Hilfe eines geeigneten Störgliedansaztzes eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ermittelt.

Das charakteristischen Polynom lautet hier

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Mit Hilfe der p, q-Formel erhalten wir

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} - 4} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2.$$

Also gibt es nur eine Nullstelle $\lambda_1 = 2$ und zwar eine doppelte Nullstelle.

Wegen $D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{(-4)^2}{4} - 4 = 4 - 4 = 0$ ergibt sich jetzt gemäß Satz 184 des Arbeitsbuches

$$y_{h,1}(t) = e^{\lambda t} = e^{2t} \quad \text{und} \quad y_{h,2}(t) = te^{\lambda t} = te^{2t} \tag{28}$$

als Fundamentalsystem und wir erhalten

$$y_h(t) = c_1 y_{h,1}(t) + c_2 y_{h,2}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Das Störglied hat die Form $s(t) = 4t^2 - 10$, also ein Polynom zweiten Grades. Daher wählen wir

$$y_s(t) = At^2 + Bt + C \quad \text{mit} \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

als Störgliedansatz. Bitte beachten Sie, dass alle Koeffzienten eines Polynoms zweiten Grades verwendet werden. Also auch $B \in \mathbb{R}$, obwohl im Störglied kein linearer Anteil auftritt. Wir erhalten

$$y_s'(t) = 2At + B \quad \text{und} \quad y_s''(t) = 2A.$$

Nun können wir in die inhomogene lineare Differentialgleichung einsetzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= 2A - 4\,(2At + B) + 4\left(At^2 + Bt + C\right) \\ &= 4At^2 + (-8A + 4B)t^1 + (2A - 4B + 4C)t^0 \overset{!}{=} 4t^2 - 10. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A = 1$ sowie

$$-8A + 4B = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 4B = 8A = 8 \quad \longleftrightarrow \quad B = 2$$

und

$$2A - 4B + 4C = -10 \quad \longleftrightarrow \quad 4C = 4B - 2A - 10 = 8 - 2 - 10 = -4 \quad \longleftrightarrow \quad C = -1.$$

Somit erhalten wir

$$y_s(t) = t^2 + 2t - 1$$

als spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und insgesamt

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + t^2 + 2t - 1 \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man beachte, dass $y_s(t)$ einen linearen Anteil besitzt, obwohl beim Störglied kein linearer Anteil vorkommt. Es war also wichtig und richtig, alle Koeffizienten in den Störgliedansatz einzubeziehen.

Nun wollen wir noch den Nachweis erbringen, dass die Funktionen $y_{h,1}(t)$ und $y_{h,2}(t)$ in (28) ein Fundamentalsystem bilden. Dazu betrachten wir die WRONSKI-Determinante

$$W(t) = \det\left(\begin{bmatrix} y_{h,1}(t) & y_{h,2}(t) \\ y'_{h,1}(t) & y'_{h,2}(t) \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t} \cdot 2 & 1 \cdot e^{2t} + te^{2t} \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2t} \cdot (2t+1)e^{2t} - te^{2t} \cdot 2e^{2t} = e^{4t}(2t + 1 - 2t) = e^{4t} \neq 0$$

Da die WRONSKI-Determinante für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht verschwindet, bilden die Funktionen $y_{h,1}(t)$ und $y_{h,2}(t)$ ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 8.9. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 9y = \cos(3t).$$

Hinweis: Wählen Sie einen geeigneten Störgliedansatz.

Lösung: Es handelt sich wieder um eine eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungsmethode besteht daher aus zwei Teilschritten. Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Im zweiten Teilschritt wird dann mit Hilfe eines geeigneten Störgliedansatztzes eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ermittelt.

Das charakteristischen Polynom lautet hier

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9.$$

Wegen $D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{0}{4} - 9 = 0 - 9 = -9 < 0$ erhalten wir wieder komplexwertige Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{9 - \frac{0^2}{4}} = 0 \pm i\sqrt{9} = \pm 3i = \mu \pm i\omega.$$

Also sind $\lambda_1 = \mu - i\omega = 0 - 3i = -3i$ und $\lambda_2 = \mu + i\omega = 0 + 3i = 3i$ die gesuchten Nullstellen.

Als Fundamentalsystem ergibt sich jetzt gemäß Satz 184 des Arbeitsbuches

$$\begin{aligned} y_{h,1}(t) &= e^{\mu t}\cos(\omega t) = e^{0\cdot t}\cos(3t) = \cos(3t) \quad \text{und} \\ y_{h,2}(t) &= e^{\mu t}\sin(\omega t) = e^{0\cdot t}\sin(3t) = \sin(3t) \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$y_h(t) = c_1 y_{h,1}(t) + c_2 y_{h,2}(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Das Störglied hat die Gestalt $s(t) = \cos(3t)$. Ein Störgliedansatz der Form

$$y_s(t) = A\sin(3t) + B\cos(3t)$$

würde keinen Erfolg zeitigen, da die Sinus- uund Cosinusfunktion bereits im Fundamentalsystem enthalten sind. Wir benötigen aber eine allgemeinere Lösung als die der homogenen Gleichung, d.h. es müssen kompliziertere Funktionen einbezogen werden.

Daher wählen wir

$$y_s(t) = At\sin(3t) + Bt\cos(3t) \quad \text{mit} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

als Störgliedansatz. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_s'(t) &= A\left(\sin(3t) + t\cos(3t)\cdot 3\right) + B\left(\cos(3t) + t(-\sin(3t)\cdot 3\right) \\ &= A\sin(3t) + B\cos(3t) + 3t\left(A\cos(3t) - B\sin(3t)\right) \quad \text{sowie} \\ y_s''(t) &= A\cos(3t)\cdot 3 + B(-\sin(3t))\cdot 3 + \\ &\quad 3\left(A\cos(3t) - B\sin(3t)\right) + 3t\left(A(-\sin(3t)\cdot 3 - B\cos(3t)\cdot 3\right) \\ &= 6A\cos(3t) - 6B\sin(3t) - 9At\sin(3t) - 9Bt\cos(3t) \end{aligned}$$

Nun können wir in die inhomogene lineare Differentialgleichung einsetzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= 6A\cos(3t) - 6B\sin(3t) - 9At\sin(3t) - 9Bt\cos(3t) + \\ &\quad 9\left(At\sin(3t) + Bt\cos(3t)\right) \\ &= 6A\cos(3t) - 6B\sin(3t) \overset{!}{=} \cos(3t). \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $B = 0$ sowie $6A = 1$ bzw. $A = \frac{1}{6}$. Somit erhalten wir

$$y_s(t) = \frac{1}{6}\,t\sin(3t)$$

als spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und insgesamt

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) + \frac{1}{6} t \sin(3t) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.