Übung „Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler 2“

Studienjahr 2021/22

Dr. Udo Lorz

TU Bergakademie Freiberg
Fakultät für Mathematik und Informatik

1. April 2022

Schwerpunkte des Kapitels

- lineare Gleichungssysteme
- Determinanten
- inverse Matrizen
- Matrizengleichungen
- orthogonale Vektoren
- orthogonale Matrizen
- lineare Abbildungen
- Eigenwerte und Eigenvektoren

Themen und Begriffe

- homogenes lineares Gleichungssystem
- inhomogenes lineares Gleichungssystem
- Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems
- Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Aufgabe 7.1

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Sind die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ linear abhängig oder linear unabhängig?*

b) *Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.*

c) *Ist der Vektor $\vec{x}_4$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ darstellbar? Wenn ja, ist diese Darstellung eindeutig?*
Geben Sie – falls möglich – diese Darstellung an.

d) *Geben Sie den Vektor $\vec{x}_4$ als Linearkombination der Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ an.*

Aufgabe 7.2

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) *Gilt* $\vec{x} \in \operatorname{span}\left(\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}\right)$, *d.h. liegt der Vektor* $\vec{x}$ *in der von den Vektoren* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *aufgespannten linearen Hülle?*

b) *Bestimmen Sie* $\dim\left(\operatorname{span}\left(\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}\right)\right)$.

c) *Geben Sie den Nullvektor* $\vec{0}$ *als nichttriviale Linearkombination der Vektoren* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *an.*

Aufgabe 7.3

Gegeben sei

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \textit{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Ist das lineare Gleichungssystem* $A\vec{x} = \vec{b}$ *lösbar? Wenn ja, so bestimmen Sie die Lösungsmenge.*

b) *Geben Sie* $\operatorname{rang}(A)$ *und* $\operatorname{rang}(A|\vec{b})$ *an.*

c) *Ist das lineare Gleichungssystem* $A\vec{x} = \vec{0}$ *lösbar? Falls ja, so bestimmen Sie die Lösungsmenge.*

Aufgabe 7.4

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2 & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & + & b & = & 0. \end{array}$$

Wie müssen die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ *gewählt werden, damit das Gleichungssystem*

a) *keine,*

b) *genau eine und*

c) *unendlich viele Lösungen besitzt?*

d) *Geben Sie für den Fall c) die Lösungsmenge an?*

Themen und Begriffe

- SARRUSsche Regel
- LAPLACE-Entwicklung

Aufgabe 7.5

Berechnen Sie folgende Determinanten

$$a)\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad b)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 12 & 16 & -20 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad \textit{und} \quad c)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

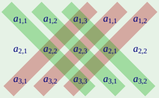
Hinweise

- *Versuchen Sie bei der Teilaufgabe b) zunächst Faktoren aus der Determinante herauszuziehen.*
- *Lösen Sie die Teilaufgabe c) mit Hilfe der* SARRUS*schen Regel.*

SARRUSsche Regel (nur für $n = 3!$)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}) -$$
$$(a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3})$$



SARRUSsche Regel ohne Hilfsspalten

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}$$

$$\det(A) = (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2})$$
$$- (a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3})$$

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}$$

Aufgabe 7.6

Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

a) *durch* LAPLACE-*Entwicklung und*

b) *durch Umformung in Dreiecksgestalt, ggf. mit Hilfe von Spaltenvertauschungen.*

LAPLACE-Entwicklung ($n = 2, 3, 4, \ldots$)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.

- Entwicklung nach der i-ten Zeile (i=1,...,n)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

- Entwicklung nach der j-ten Spalte (j=1,...,n)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

- Wählen Sie die Zeile bzw. Spalte aus, die die meisten Nullen enthält!
- Die Untermatrix $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ entsteht aus der Matrix A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Ein Beispiel für die Untermatrix $A_{i,j}$

$$A_{4,2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

Determinante einer Dreiecksmatrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & & & \cdots & & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Aufgabe 7.7

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inverse Matrix einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.8

Berechnen Sie die Matrix X aus der Gleichung

$$AX = 2AC^T + BC^T,$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -11 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.9

Gegeben seien die Vektoren

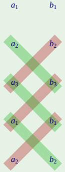
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ v \end{bmatrix}.$$

a) *Bestimmen Sie die Parameter $u, v \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\vec{c}$ sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal ist und zwar unter ausschließlicher Verwendung des*
   - *Innenproduktes (Skalarprodukt) und*
   - *äußeren Produktes (Vektorprodukt, Kreuzprodukt).*

b) *Bilden $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ mit den so bestimmten Werten u und v ein Links- oder ein Rechtssystem?*

Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Aufgabe 7.10

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) *Zeigen Sie, dass A eine orthogonale Matrix ist.*

b) *Bestimmen Sie* $\det(A)$.

c) *Bestimmen Sie A^{-1}, falls A invertierbar ist.*

d) *Ist jede orthogonale Matrix symmetrisch?*

e) *Ist jede symmetrische Matrix orthogonal?*

f) *Finden Sie selbst eine weitere orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit* $\det(B) = -1$.

g) *Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = [1, 2, 3]^T$ als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix A dar.*

Lösungswege

1. Ausschlusskriterium: Für orthogonale Matrizen gilt $|\det(A)| = 1$. Ist $|\det(A)| \neq 1$, so ist A nicht orthogonal.
   Aber: Aus $|\det(A)| = 1$ folgt jedoch **nicht**, dass A orthogonal ist!
2. Lösungsweg 1 (wenig Aufwand): Für orthogonale Matrizen gilt $A^{-1} = A^T$. Also ist zu überprüfen, ob $AA^T = I$ bzw. $A^T A = I$.
3. Lösungsweg 2 (höherer Aufwand): Eine Matrix

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

   ist ortho**go**nal, falls ihre Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ eine ortho**norm**ale Basis bilden. Man überprüfe also, ob $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ eine orthonormale Basis ist. Dazu sind sind $n(n-1)/2$ Skalarprodukte und n Normen zu berechnen!

Themen und Begriffe

- Nullraum, Kern
- Defekt
- Bildraum, Bild
- Rang

Aufgabe 7.11

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *mit* $\vec{x} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$, *wobei*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & 10 \\ -2 & -4 & 2 & 9 & -6 \\ -2 & -4 & 6 & 11 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

a) *Geben Sie* m *und* n *an.*

b) *Bestimmen Sie den Kern (den Nullraum)* $\mathcal{N}(A)$ *und den Defekt von* A.

c) *Bestimmen Sie das Bild (den Bildraum)* $\mathcal{R}(A)$ *und den Rang von* A.

Definitionen

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung mit der zugehörigen Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann heißt

$$\mathcal{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\right\} \quad \text{Nullraum von } A.$$

$$\operatorname{def}(A) = \mathsf{dim}(\mathcal{N}(A)) \in \{\max(0, n-m), \ldots, n\} \quad \text{Defekt von } A.$$

$$\mathcal{R}(A) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m : \vec{y} = A\vec{x} \text{ für ein } \vec{x} \in \mathbb{K}^n\} \quad \text{Bildraum von } A.$$

$$\operatorname{rang}(A) = \mathsf{dim}(\mathcal{R}(A)) \in \{0, \ldots, \min(m, n)\} \quad \text{Rang von } A.$$

Es gilt

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{def}(A) = n.$$

Aufgabe 7.12

Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \textit{mit} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

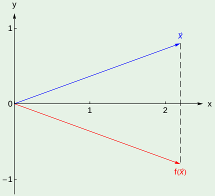
a) *Berechnen Sie* $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$.

b) *Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift* $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ *und die zugehörige Abbildungsmatrix* A.

Aufgabe 7.13

Beschreiben Sie mit Hilfe einer Abbildungsvorschrift f *die Spiegelung eines Vektors im* $\mathbb{R}^2$ *an der* x*-Achse. Ist diese Abbildung linear? Falls ja, so geben Sie die zugehörige Abbildungsmatrix* A *an.*

Grafische Veranschaulichung zu Aufgabe 7.13



Definition

Seien $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \mathbb{K})$ und $\mathcal{W} = (W, +, \cdot, \mathbb{K})$ Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, falls

(1) für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $\vec{x} \in V$ gilt

$$f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \quad \text{und}$$

(2) für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ gilt

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}).$$

Folgerung: Wegen $f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \vec{0}) = f(\vec{x}) + f(\vec{0})$ ist $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Ausschlusskriterium: Für lineare Abbildungen gilt $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Ist $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$, so ist f nicht linear.
Aber: Aus $f(\vec{0}) = \vec{0}$ folgt jedoch **nicht**, dass f linear ist!

Aufgabe 7.14

Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

a) *das charakteristische Polynom,*
b) *die Eigenwerte und*
c) *die Eigenvektoren sowie*
d) *die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte.*

Definitionen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert der Matrix A, falls gilt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Die Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$, die diese Gleichung für einen Eigenwert λ von A erfüllen, heißen Eigenvektoren des Eigenwertes λ.
Die Menge der Eigenvektoren (einschließlich des Nullvektors $\vec{0} \in \mathbb{C}^n$)

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

(ein Unterraum des $\mathbb{C}^n$) wird Eigenraum des Eigenwertes λ genannt. Die Dimension des Eigenraumes V_λ heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

Definitionen

Die Funktion

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

heißt charakteristisches Polynom von A. Die Funktion $c_A(\lambda)$ ist ein Polynom n-ten Grades

$$c_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{wobei}$$

$$\alpha_n = (-1)^n, \quad \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\text{spur}(A) \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \det(A).$$

Die Nullstellen $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, des charakteristischen Polynoms $c_A(\lambda)$ von A sind gerade die Eigenwerte dieser Matrix. Die Vielfachheit der Nullstellen λ_i wird algebraische Vielfachheit des Eigenwertes genannt.

Lösungsweg

1. Bestimmung des charakteristischen Polynoms $c_A(\lambda)$.
   Tipp: Versuchen Sie Ausdrücke der Form $(a_{ii} - \lambda)$ auszuklammern, bevor Sie die Determinate vollständig ausmultiplizieren.
2. Bestimmung der Nullstellen von $c_A(\lambda)$ und deren (algebraische) Vielfachheiten.
3. Bestimmung der Eigenräume V_{λ_i} der Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, d.h. Basen dieser Unterräume, durch Lösen der homogenen Gleichungssysteme $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ sowie der Dimension dieser Eigenräume, der geometrischen Vielfachheiten.

Aufgabe 7.15

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) *Bestimmen Sie die Eigenwerte einschließlich deren algebraischer und geometrischer Vielfachheit sowie die Eigenvektoren von A.*

b) *Ist A invertierbar?*

c) *Ist A diagonalisierbar?*

d) *Bestimmen Sie die Eigenwerte von*

$$A^{-1}, \quad A^T, \quad \frac{1}{2}A, \quad A^2 \quad \textit{und} \quad A^3 + 2A + I.$$

Definitionen

- Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen ähnlich $(A \sim B)$, falls es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass gilt

$$AT = TB.$$

- Eine Matrix $D = [d_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt Diagonalmatrix, wenn

$$d_{i,j} = 0 \quad \text{für alle} \quad i \neq j, i, j = 1, \ldots, n.$$

- Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit

$$D = T^{-1}AT.$$

Formeln für Eigenwerte und Eigenvektoren

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichne $\lambda_i(A) \in \mathbb{C}, i = 1,\dots,n$, einen Eigenwert und $\vec{x}_i(A) \in \mathbb{C}^n$ den dazugehörigen Eigenvektor. Dann gilt

$$\begin{array}{rlll}
\lambda_i(A^T) = \lambda_i(A) & \text{und} & \vec{x}_i(A^T) & = ?, \\
\lambda_i(\alpha A) = \alpha\lambda_i(A) & \text{und} & \vec{x}_i(\alpha A) & = \vec{x}_i(A), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\
\lambda_i(A^m) = (\lambda_i(A))^m & \text{und} & \vec{x}_i(A^m) & = \vec{x}_i(A), \quad m \in \mathbb{Z}, \text{ insb.} \\
\lambda_i(A^{-1}) = (\lambda_i(A))^{-1} & \text{und} & \vec{x}_i(A^{-1}) & = \vec{x}_i(A), \\
\lambda_i(p_m(A)) = p_m(\lambda_i(A)) & \text{und} & \vec{x}_i(p_m(A)) & = \vec{x}_i(A), \quad m \in \mathbb{N}, \text{ insb.} \\
\lambda_i(A+\beta I) = \lambda_i(A) + \beta & \text{und} & \vec{x}_i(A+\beta I) & = \vec{x}_i(A), \\
\lambda_i(TAT^{-1}) = \lambda_i(A) & \text{und} & \vec{x}_i(TAT^{-1}) & = T\vec{x}_i(A).
\end{array}$$

Dabei bezeichnet $p_m(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ein beliebiges Polynom m-ten Grades mit komplexwertigen Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1,\dots,n$, und $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix.

Aufgabe 7.16

Gegeben seien die Matrizen

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \textit{ und } R = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie für diese Matrizen

a) *die Determinante,*

b) *das charakteristische Polynom,*

c) *die Eigenwerte,*

d) *die Eigenvektoren.*

e) *Welche Matrizen sind einander ähnlich?*