Kapitel 7 Lineare Algebra 2

(Ausführliche Lösungswege)

Aufgabe 7.5. Berechnen Sie folgende Determinanten

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 12 & 16 & -20 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Hinweise

- Versuchen Sie bei der Teilaufgabe b) zunächst Faktoren aus der Determinante herauszuziehen.
- Lösen Sie die Teilaufgabe c) mit Hilfe der Sarrusschen Regel.

Lösung:

a)

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-1) = -10 + 3 = -7$$

Siehe schwarze Formelsammlung „Formeln+Hilfen Höhere Mathematik“,
kurz: siehe Merziger, Seite 63 oben.

b)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 12 & 16 & -20 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 16 & -20 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} && \text{Faktor 3 in Spalte 1 herausgezogen} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 8 & -20 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} && \text{Faktor 2 in Spalte 2 herausgezogen} \\ &= 6 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} && \text{Faktor 4 in Zeile 2 herausgezogen} \\ &= 24 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Determinate ist 0, da zwei Zeilen der Matrix gleich sind. Damit sind die Zeilen linear abhängig und die Matrix hat nicht den vollen Rang. Daher ist die Determinante 0 (siehe Merziger, Seite 61).

c) Beachten Sie bitte die Seiten 10 und 11 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort wird die SARRUSsche Regel anhand von Grafiken erklärt (s. Merziger, Seite 63).

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= [3\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot 4\cdot 4 + 0\cdot(-1)\cdot 1] - [0\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 5] \\ &= [30+16+0] - [0+12-5] = 46 - 7 = 39\end{aligned}$$

Aufgabe 7.6. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

a) durch LAPLACE-Entwicklung und

b) durch Umformung in Dreiecksgestalt, ggf. mit Hilfe von Spaltenvertauschungen.

Lösung:

a) Zunächst kann aus der dritten und vierten Zeile jeweils der Faktor 2 herausgezogen werden, wodurch die Berechnungen einfacher werden, da kleinere Zahlen auftreten.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Beachten Sie bitte die Seiten 13 und 14 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort finden Sie die Formeln für die LAPLACE-Entwicklung sowie weitere Erläuterungen (siehe Merziger, Seite 63 unten).

Nun gilt es eine Zeile oder Spalte auszuwählen, die möglichst viele Nullen enthält, da dadurch in der Formel für die LAPLACE-Entwicklung entsprechend viele Summanden wegfallen. Die betreffenden Faktoren $a_{i,j}$ sind ja dann 0. Wir entscheiden uns daher zum Beispiel für die Entwicklung nach der ersten Zeile. Die vierte Zeile wäre genauso günstig.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \left\{ (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \right\}$$

$$= 4 \cdot \{[(1+2+0) - (1+0-2)] + [(2+0+1) - (0-2+1)]\}$$

$$= 4 \cdot \{[3+1] + [3+1]\} = 4 \cdot \{4+4\} = 32$$

b) Beachten Sie bitte die Seite 15 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort wird die Formel für die Determinante einer Diagonalmatrix erläutert.

Um eine Matrix auf Diagonalgestalt zu transformieren wird das GAUSS-Verfahren angewandt. Unser erstes Ziel ist es, in der ersten Spalte ab der zweiten Zeile Nullen zu erzeugen. Dazu verwenden wir die erste Zeile. Rechts neben dem senkrechten Strich ist erklärt, welche Operationen ausgeführt werden.
I→I heißt soviel wie: Die erste Zeile bleibt unverändert.
II→II-2·I heißt soviel wie: Aus der zweiten Zeile wird die bisherige zweite Zeile minus zweimal die bisherige erste Zeile.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{I} \\ 2 & 1 & -2 & 1 & \mathrm{II} \\ 2 & 2 & 2 & -2 & \mathrm{III} \\ 0 & 2 & 0 & 2 & \mathrm{IV} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{I} \to \mathrm{I} \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ 0 & 2 & 0 & -2 & \mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ 0 & 2 & 0 & 2 & \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} \\ \hline \end{array}$$

Nun könnten wir ganz analog mit der zweiten Spalte verfahren und dort mit Hilfe der zweiten Zeile Nullen in der dritten und vierten Zeile erzeugen. Es geht aber einfacher, ganz ohne zu rechnen. Die beiden gewünschten Nullen für die zweite Spalte stehen ja schon in der dritten Spalte. Vertauschen wir also die Spalten zwei und drei und haben so ganz schnell unser Ziel erreicht. Spaltentausch ist genauso wie Zeilentausch eine erlaubte GAUSS-Umformung. Doch man beachte: Durch Zeilen- oder Spaltentausch verändert sich das Vorzeichen der Determinante.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\
0 & -4 & 1 & 1 & \mathrm{II} \\
0 & 0 & 2 & -2 & \mathrm{III} \\
0 & 0 & 2 & 2 & \mathrm{IV} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\
0 & -4 & 1 & 1 & \mathrm{II} \\
0 & 0 & 2 & -2 & \mathrm{III} \\
0 & 0 & 0 & 4 & \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - \mathrm{III} \\
\hline
\end{array}$$

Im letzten Schritt haben wir mit Hilfe der dritten Zeile noch die letzte fehlende Null in der vierten Zeile der dritten Spalte erzeugt. Damit haben wir die Diagonalgestalt der Matrix erreicht und können nun durch Multiplikation der Diagonalelemente die Determinante einfach berechnen.

Zur Übersicht noch einmal alle Schritte der Berechnung zusammen ausgedrückt in der Determinantenschreibweise.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [1 \cdot (-4) \cdot 2 \cdot 4] = 32.$$

Aufgabe 7.7. Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

a) Die inverse Matrix A^{-1} der Matrix A kann direkt berechnet werden, da es sich um eine 2×2-Matrix handelt. Man benötigt hierzu die Determinante von A. Beachten Sie bitte die Seite 17 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7 (siehe Merziger, Seite 62).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = [1 \cdot 9] - [4 \cdot (-2)] = 9 + 8 = 17.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Bei einer 3×3-Matrix ist eine direkte Berechnung der inversen Matrix nicht möglich. Hier ist es erforderlich mit dem Gauss-Jordan-Verfahren zu arbeiten. Ziel ist es hierbei, ausgehend von der Situation $B|I$ so lange Gauss-Umformungen durchzuführen, bis man die Situation $I|B^{-1}$ erreicht hat, also

$$\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline I & B^{-1} \end{array}$$

Das Gauss-Jordan-Verfahren wirkt praktisch wie eine Multiplikation mit der inversen Matrix von links $B^{-1}B = I$.

$$\begin{array}{rrr|rrr|l} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{II} \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} \\ \hline \end{array}$$

Um auf der linken Seite die Einheitsmatrix zu erreichen, müssen wieder Nullen erzeugt werden. Die Situation in der ersten Spalte ist hierfür ungünstig, da Brüche entsthen würden. Das sollte man möglichst vermeiden. Also beginnen wir mit der dritten Spalte und erzeugen mit Hilfe der dritten Zeile Nullen in der ersten und zweiten Zeile der dritten Spalte.

$$\begin{array}{rrr|rrr|l} 7 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{I} \to \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{III} \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} \to \mathrm{III} \\ \hline \end{array}$$

Nun können wir mit Hilfe der zweiten Zeile in der ersten und dritten Zeile der zweiten Spalte ebenfalls Nullen erzeugen.

$$\begin{array}{rrr|rrr|l} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \mathrm{I} \to \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mathrm{II} \to \mathrm{II} \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} \to \mathrm{III} \\ \hline \end{array}$$

Nachdem wir die erste Zeile neu ausgerechnet haben, stellen wir jedoch fest, dass auf der linken Seite nur noch Nullen stehen und die erste Zeile der Einheitsmatrix nicht mehr zu erreichen ist. Das bedeutet, dass die Matrix B nicht invertierbar ist. Also existiert B^{-1} nicht. Die Mühe mit dem Gauss-Jordan-Verfahren hätten wir uns sparen können, wenn wir vorher die Determinante von B ausgerechnet hätten. Denn ist diese gleich Null, so ist die betreffende Matrix nicht invertierbar.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= [2 \cdot 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 1] - \\ &\quad\ [1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \cdot (-1)] \\ &= [-8 + 30 + 3] - [20 - 4 + 9] = 25 - 25 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.8. Berechnen Sie die Matrix X aus der Gleichung

$$AX = 2AC^T + BC^T,$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -11 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Die Matrizen A, B und C sind gegeben, gesucht ist die Matrix X. Um diese Matrix zu bestimmen, ist es erforderlich die Ausgangsgleichung äquivalent umzuformen, indem man beide Seiten von links mit der inversen Matrix A^{-1} multipliziert. Auf der linken Seite der Gleichung erhält man $A^{-1}AX = IX = X$, also die gesuchte Matrix. Auf der rechten Seite ergibt sich $A^{-1}\left(2AC^T + BC^T\right) = 2A^{-1}AC^T + A^{-1}BC^T = 2IC^T + A^{-1}BC^T$. Also ist $X = (2I + A^{-1}B)C^T$. An dieser Stelle erkennt man auch, dass es sich bei Matrix X um eine 3×2-Matrix handelt. Die Matrix $(2I + A^{-1}B)$ ist eine 3×3-Matrix und C^T eine 3×2-Matrix. Deren Produkt ergibt eine 3×2-Matrix. Unser Plan lautet jetzt

$$\begin{array}{c|l} A & 2AC^T + BC^T \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline I & X \end{array}$$

Zur Berechnung der rechten Seite klammern wir die Matrix C^T aus, also

$$2AC^T + BC^T = (2A + B)C^T,$$

was eine aufwendige Matrixmultiplikation einspart. Es ist

$$2A + B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -11 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

und wir erhalten

$$(2A + B)C^T = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ 0 & -5 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Damit haben wir die rechte Seite berechnet und können in das Gauss-Jordan-Verfahren einsteigen. Von links nach rechts erzeugen wir in den drei Spalten der linken Seite die gewünschten Nullen.

Man beachte, dass hier die rechte Seite keiner quadratischen Matrix entspricht. Das ist neu gegenüber den bisherigen Aufgaben und spricht für die Universalität des Gauss-Jordan-

Verfahrens.

$$
\begin{array}{rrr|rr|l}
1 & 2 & -2 & -3 & -12 & \mathrm{I} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -5 & \mathrm{II} \\
2 & 1 & -1 & -6 & 9 & \mathrm{III} \\
\hline
1 & 2 & -2 & -3 & -12 & \mathrm{I} \to \mathrm{I} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -5 & \mathrm{II} \to \mathrm{II} \\
0 & -3 & 3 & 0 & 33 & \mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
1 & 0 & -2 & -3 & -2 & \mathrm{I} \to \mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -5 & \mathrm{II} \to \mathrm{II} \\
0 & 0 & 3 & 0 & 18 & \mathrm{III} \to \mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{II} \\
\hline
1 & 0 & -2 & -3 & -2 & \mathrm{I} \to \mathrm{I} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -5 & \mathrm{II} \to \mathrm{II} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 6 & \mathrm{III} \to \mathrm{III}/3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 & 10 & \mathrm{I} \to \mathrm{I} + 2 \cdot \mathrm{III} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -5 & \mathrm{II} \to \mathrm{II} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 6 & \mathrm{III} \to \mathrm{III} \\
\hline
\end{array}
$$

Als Lösung der Matrizengleichung $AX = 2AC^T + BC^T$ erhalten wir

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 0 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Die Probe ergibt

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 0 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ 0 & -5 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} (2A + B)C^T.$$

Aufgabe 7.9. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ v \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Parameter $u, v \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\vec{c}$ sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal ist und zwar unter ausschließlicher Verwendung des

- Innenproduktes (Skalarprodukt) und
- äußeren Produktes (Vektorprodukt, Kreuzprodukt).

b) Bilden $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ mit den so bestimmten Werten u und v ein Links- oder ein Rechtssystem?

Lösung:

a) Beginnen wir mit der Lösung mit Hilfe des Skalarproduktes. Das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ergibt als Resultat eine Zahl, also einen Skalar. Daher der Name. Das Skalarprodukt hat die Eigenschaft, dass es genau dann den Wert 0 ergibt, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen, d.h. orthogonal sind.

Folglich sind die beiden Bedingungen, dass der Vektor $\vec{c}$ sowohl orthogonal zu Vektor $\vec{a}$, in Zeichen, $\vec{c} \perp \vec{a}$, als auch orthogonal zu Vektor $\vec{b}$, in Zeichen, $\vec{c} \perp \vec{b}$, äquivalent zu $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$. Explizit bedeutet das

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = u \cdot 1 + 1 \cdot 5 + v \cdot 2 = u + 5 + 2v = 0 \tag{1}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix} = u \cdot (-2) + 1 \cdot 14 + v \cdot 1 = -2u + 14 + v = 0 \tag{2}$$

Wir verfügen also über zwei lineare Gleichungen für zwei Unbekannte. Gute Aussichten. Lösen wir in (2) nach v auf, so ergibt das $v = 2u - 14$, und wir können das in Gleichung (1) einsetzen. Wir erhalten

$$u + 5 + 2v = u + 5 + 2(2u - 14)v = 5u - 23 \overset{!}{=} 0 \quad \text{also} \quad u = \frac{23}{5}.$$

Dieses Resultat können wir in die Gleichung $v = 2u - 14$ einsetzen und erhalten als Ergebnis

$$v = 2u - 14 = 2 \cdot \frac{23}{5} - 14 = \frac{2 \cdot 23 - 14 \cdot 5}{5} = \frac{46 - 70}{5} = -\frac{24}{5}.$$

Am Rande sei noch angemerkt, dass die Gleichungen (1) und (2) dem inhomogenen linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -14 \end{bmatrix}$$

entsprechen. Können Sie das nachvollziehen?

Wenden wir uns nun der Lösung mit Hilfe des Vektorproduktes zu. Das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ergibt als Resultat wieder einen Vektor. Daher der Name. Das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ hat die Eigenschaft, dass es sowohl zum Vektor $\vec{x}$ als auch zum Vektor $\vec{y}$ senkrecht steht, d.h. zu beiden Vektoren orthogonal ist. Sie bilden zusammen ein Rechtssystem. Veranschaulicht mit Ihrer rechten Hand: Der Mittelfinger $\vec{x} \times \vec{y}$ steht sowohl senkrecht auf dem Daumen $\vec{x}$ als auch auf dem Zeigefinger $\vec{y}$.

Diese Zusammenhänge können wir zur Lösung unserer Aufgabe nutzen. Der Verktor $\vec{c}$ soll ja sowohl zum Vektor $\vec{a}$ als auch zum Vektor $\vec{b}$ orthogonal sein. Er muss also auf der vom Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ festgelegten Geraden liegen. Ob $\vec{c}$ genauso lang wie $\vec{a} \times \vec{b}$

ist und in dieselbe Richtung wie $\vec{a} \times \vec{b}$ zeigt, ist egal. Hauptsache senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das liefert den Ansatz

$$\vec{a} \times \vec{b} = \lambda \cdot \vec{c} \quad \text{mit einem geeigneten} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie bitte die Seiten 20 und 21 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort wird die Berechnung des Vektorproduktes bzw. Kreuzproduktes anhand von Grafiken erklärt (siehe Merziger, Seite 52).

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 - 14 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 14 - (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 28 \\ -4 - 1 \\ 14 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ -5 \\ 24 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ v \end{bmatrix} = \lambda \cdot \vec{c}.$$

Interpretiert man diese Gleichung komponentenweise, so ergeben sich die drei Gleichungen

$$-23 = \lambda u, \quad -5 = \lambda \quad \text{und} \quad 24 = \lambda v$$

mit drei Unbekannten. Setzt man die zweite Gleichung in die erste und dritte Gleichung ein und löst nach u bzw. v auf, so erhält man die uns bereits bekannten Lösungen.

b) Aus der eben erzielten Lösung mit Hilfe des Vektorproduktes können wir die Beziehung

$$\vec{a} \times \vec{b} = -5 \cdot \vec{c}$$

ableiten, d.h. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist fünfmal so lang wie $\vec{c}$ und zeigt wegen des negativen Vorzeichens von λ in die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a} \times \vec{b}$. Folglich bilden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ kein Rechtssystem, sondern ein Linkssystem.

Aufgabe 7.10. Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A eine orthogonale Matrix ist.

b) Bestimmen Sie $\det(A)$.

c) Bestimmen Sie A^{-1}, falls A invertierbar ist.

d) Ist jede orthogonale Matrix symmetrisch?

e) Ist jede symmetrische Matrix orthogonal?

f) Finden Sie selbst eine weitere orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(B) = -1$.

g) Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = [1,2,3]^T$ als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix A dar.

Lösung: Beachten Sie bitte die Seite 23 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort finden Sie eine alternative Definition einer orthogonalen Matrix, und es werden Lösungswege aufgezeigt, wie man überprüfen kann, ob eine Matrix orthogonal ist (siehe Merziger, Seite 56).

a) Eine quadratische Matrix heißt orthonal, wenn gilt $A^{-1} = A^T$, d.h. an Stelle von $AA^{-1} = I$ muss gelten $AA^T = I$. Es genügt also, diese Beziehung zu überprüfen. In dieser Aufgabe ist A eine symmetrische Matrix, d.h. es gilt $A = A^T$. Daher ist hier speziell die Beziehung $AA = I$ zu überprüfen.

$$\begin{aligned} AA &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \end{aligned}$$

Folglich ist A eine orthogonale Matrix.

b)

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\{[(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2] - \\ &\qquad [2\cdot(-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot(-1)]\} \\ &= \frac{1}{27}\{[-1+8+8] - [-4-4-4]\} = \frac{1}{27}\{15+12\} = 1 \end{aligned}$$

c) Nach den Überlegungen in Teilaufgabe a) gilt $A^{-1} = A^T = A$. Es gibt also nichts zu rechnen.

d) Nein, das ist nicht der Fall. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel anzugeben. Dieses Gegenbeispiel konstruieren wir uns mit Hilfe der orthogonalen Matrix A. Ihre Spaltenvektoren bilden gemäß der Definition einer orthogonalen Matrix ein System orthonormaler Vektoren. Wenn wir also in der Matrix A geeignete Spalten vertauschen, so ändert dies nichts an der Orthogonalität der neuen Matrix, jedoch an ihrer Symmetrie. Wenn wir z.B. die dritte Spalte als erste Spalte nehmen sowie die erste und zweite Spalte nach rechts rücken, so erhalten wir

$$A_{3,1,2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Das ist ein Gegenbeispiel.

e) Nein, das ist ebenfalls nicht der Fall. Auch hier genügt es zur Begründung, ein Gegenbeispiel anzugeben, welches wir wiederum mit Hilfe der orthogonalen Matrix A konstruieren. Lassen wir den Vorfaktor 1/3 weg, so bilden die Spaltenvektoren von A zwar immer noch ein System orthogonaler Vektoren, ihre Länge ist jedoch nicht mehr gleich 1, sondern 3. Sie sind also nicht mehr normiert.

$$3A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

f) Die Einheitsmatrix I ist eine orthogonale Matrix. Ihre Spaltenvektoren sind gerade die Einheitsvektoren. Jedoch gilt $\det(I) = 1$. Das können wir korrigieren, indem wir das Vorzeichen eines (oder aller) Diagonalelemente ändern. Folglich wäre

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ein mögliches Beispiel.

g) Gesucht sind also Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3, die die Gleichung

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3}$$

erfüllen, wobei die Vektoren $\vec{a_i}$, $i = 1{,}2{,}3$, die Spaltenvektoren der Matrix A bezeichnen, also konkret

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dies erfolgt im Sonderfall einer orthonormalen Basis nicht wie im allgemeinen Fall einer beliebigen Basis durch die Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems. Die Koeffizienten λ_i, $i = 1{,}2{,}3$, können direkt berechnet werden. Es gilt die Beziehung

$$\lambda_i = \vec{x} \cdot \vec{a_i} \quad \text{für} \quad i = 1{,}2{,}3.$$

Daher ist

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = \frac{1}{3}\,(-1 + 4 + 6) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3,$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,(1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2) = \frac{1}{3}\,(2 - 2 + 6) = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \quad \text{und}$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,(1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)) = \frac{1}{3}\,(2 + 4 - 3) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

Führen wir die Probe durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3} &= 3\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}+2\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}+1\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\\ 2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\\ 2+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\overset{!}{=}\vec{x}.\end{aligned}$$

Aufgabe 7.11. Gegeben sei die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ mit $\vec{x}\mapsto\vec{y}=f(\vec{x})=A\vec{x}$, wobei

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-2&-5&1\\1&3&2&-6&10\\-2&-4&2&9&-6\\-2&-4&6&11&2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}.$$

a) Geben Sie m und n an.

b) Bestimmen Sie den Kern (den Nullraum) $\mathcal{N}(A)$ und den Defekt von A.

c) Bestimmen Sie das Bild (den Bildraum) $\mathcal{R}(A)$ und den Rang von A.

Lösung: Beachten Sie bitte die Seite 26 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort finden Sie die Definitionen der wichtigsten Begriffe für diese Aufgabe (siehe Merziger, Seite 67).

a) Eine Matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ hat m Zeilen und n Spalten. Hier ist also $m=4$ und $n=5$.

b) Um den Nullraum zu bestimmen, gilt es diejenigen Vektoren $\vec{x}\in\mathbb{R}^5$ zu bestimmen, die das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{0}\in\mathbb{R}^4$ erfüllen. Dies erfolgt wiederum mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens. Mit der ersten Spalte beginnend, werden die gewünschten Nullen außerhalb der Diagonalen erzeugt.

1	2	−2	−5	1	0	I
1	3	2	−6	10	0	II
−2	−4	2	9	−6	0	III
−2	−4	6	11	2	0	IIII
1	2	−2	−5	1	0	$\mathrm{I} \to \mathrm{I}$
0	1	4	−1	9	0	$\mathrm{II} \to \mathrm{II} - \mathrm{I}$
0	0	−2	−1	−4	0	$\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{I}$
0	0	2	1	4	0	$\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} + 2 \cdot \mathrm{I}$
1	0	−10	−3	−17	0	$\mathrm{I} \to \mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II}$
0	1	4	−1	9	0	$\mathrm{II} \to \mathrm{II}$
0	0	1	1/2	2	0	$\mathrm{III} \to \mathrm{III}/(-2)$
0	0	0	0	0	0	$\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} + \mathrm{III}$
1	0	0	2	3	0	$\mathrm{I} \to \mathrm{I} + 10 \cdot \mathrm{III}$
0	1	0	−3	1	0	$\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 4 \cdot \mathrm{III}$
0	0	1	1/2	2	0	$\mathrm{III} \to \mathrm{III}$

Wie wir feststellen können, hat sich die sechste Spalte durch die Gauss-Umformungen nicht verändert. Die Nullen, die die rechte Seite des Gleichungssystems repräsentieren, müssen beim Gauss-Jordan-Verfahren also nicht mitgeschleppt werden.

Die vierte Zeile konnte entfallen, da sie nur aus Nullen bestand und somit keine relevante Information enthält. Es verbleiben drei Zeilen. Diese repräsentieren drei Bedingungen für die fünf unbekannten Komponenten $x_1, \ldots, x_5$ des Lösungsvektors $\vec{x}$. Daher sind zwei dieser Komponenten frei wählbar. Wir setzen $x_4 = s \in \mathbb{R}$ und $x_5 = t \in \mathbb{R}$. Die erste Zeile steht für

$$x_1 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = -2s - 3t.$$

Analog ergibt die zweite Zeile

$$x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 3s - t$$

und dritte Zeile

$$x_3 + \frac{1}{2} + 2x_5 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_3 = -\frac{1}{2}s - 2t.$$

Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ 3s - t \\ -\frac{1}{2}s - 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alle Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Werten für $s, t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, erfüllen das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$, werden also auf den Nullvektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^4$ abgebildet, liegen also im Nullraum $\mathcal{N}(A)$ der Matrix A. Sie sind also Linearkombinationen der beiden Vektoren $\vec{v}_1 = [-2{,}3, -\frac{1}{2}{,}1{,}0]^T$ und $\vec{v}_2 = [-3, -1, -2{,}0{,}1]^T$. Diese beiden, offensichtlich linear unabhängigen Vektoren bilden folglich eine Basis des Nullraumes. Somit ist

$$\mathcal{N}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \vec{x} = s \cdot \vec{v}_1 + t \cdot \vec{v}_2, s, t \in \mathbb{R}\right\}$$

und $\operatorname{def}(A) = \dim(\mathcal{N}(A)) = 2$.

c) Aus der Beziehung $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{def}(A) = n = 5$ ergibt sich $\operatorname{rang}(A) = 3$. Dies hätte man auch daran erkannt, dass beim GAUSS-JORDAN-Verfahren drei Zeilen übrig geblieben sind. Die ersten drei Spaltenvektoren der Matrix A ließen sich durch GAUSS-Umformungen auf Diagonalgestalt bringen. Sie bilden daher eine Basis des Bildraumes. Wir erhalten

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^4 : \vec{y} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 7.12. Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ und die zugehörige Abbildungsmatrix A.

Lösung:

a) Im allgemeinen ist es nicht möglich, aus der Kenntnis der Werte einer Abbildung bezüglich zweier Argumente auf den Wert für ein drittes Argument zu schließen, wenn man die Abbildungsvorschrift nicht kennt. Für lineare Abbildungen ist dies jedoch möglich.

Offensichtlich sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Somit kann der Vektor $\vec{v} = [3, -4]^T$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ dargestellt werden

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \text{mit geeigneten} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Für den gesuchten Vektor $f(\vec{v})$ gilt dann aufgrund der Linearität von f

$$f(\vec{v}) = f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2). \tag{4}$$

Da die Vektoren $f(\vec{v}_1)$ und $f(\vec{v}_2)$ gegeben sind, genügt es folglich die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Notieren wir die Gleichung (3) in komponentenweiser Schreibweise, so erhalten wir die Gleichungen

$$3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 \Longleftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 \quad \text{und} \tag{5}$$
$$-4 = \lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot (-1) \Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 4. \tag{6}$$

Lösen wir die Gleichung (5) nach λ_1 auf, so erhalten wir $\lambda_1 = 3 - 2\lambda_2$. Einsetzen in die Gleichung (6) liefert

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 - 2\lambda_2 + \lambda_2 = 3 - \lambda_2 \stackrel{!}{=} 4 \Longleftrightarrow \lambda_2 = -1.$$

Dieses Resultat können wir in die Gleichung $\lambda_1 = 3 - 2\lambda_2$ einsetzen und erhalten als Ergebnis $\lambda_1 = 5$. Somit ergibt sich aus der Gleichung (4)

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) \\ &= 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 0 \\ 0 - 1 \\ -5 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Die Lösung dieser Teilaufgabe verläuft ganz analog zur Teilaufgabe a), jedoch nicht mit einem speziellen Vektor $\vec{v} = [3, -4]^T$, sondern mit einem allgemeinen Vektor $\vec{v} = [x, y]^T$. Die Gleichungen (5) und (6) haben jetzt die Gestalt

$$x = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 \Longleftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \quad \text{und} \tag{7}$$
$$y = \lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot (-1) \Longleftrightarrow -\lambda_1 - \lambda_2 = y. \tag{8}$$

Lösen wir die Gleichung (7) nach λ_1 auf, so erhalten wir $\lambda_1 = x - 2\lambda_2$. Einsetzen in die Gleichung (8) liefert

$$-\lambda_1 - \lambda_2 = -(x - 2\lambda_2) - \lambda_2 = -x + \lambda_2 \stackrel{!}{=} y \Longleftrightarrow \lambda_2 = x + y.$$

Dieses Resultat können wir in die Gleichung $\lambda_1 = x - 2\lambda_2$ einsetzen und erhalten als

Ergebnis $\lambda_1 = x - 2(x+y) = -x - 2y$. Somit ergibt sich aus der Gleichung (4)

$$\begin{aligned}
f(\vec{v}) &= \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) \\
&= (-x-2y) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (x+y) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-x-2y)\cdot 1 + (x+y)\cdot 0 \\ (-x-2y)\cdot 0 + (x+y)\cdot 1 \\ (-x-2y)\cdot(-1) + (x+y)\cdot(-2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-x-2y) + 0 \\ 0 + (x+y) \\ (x+2y) - 2(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-2y \\ x+y \\ -x \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Die zu der linearen Abbildung f gehörige Abbildungsmatrix A erhält man ganz einfach, indem man die Abbildungsvorschrift auf die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = [1{,}0]^T \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{e}_2 = [0{,}1]^T \in \mathbb{R}^2$ anwendet und die entstehenden Vektoren als Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix verwendet. Es ist

$$f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1-2\cdot 0 \\ 1+0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

und

$$f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -0-2\cdot 1 \\ 0+1 \\ -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_1) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eine alternative Möglichkeit, die Abbildungsmatrix zu bestimmen, wäre es, die Beziehung

$$A\vec{x} = f(\vec{x})$$

zu nutzen und für die Matrix A einen Ansatz mit unbekannten Komponenten zu verwenden, d.h.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-2y \\ x+y \\ -x \end{bmatrix}.$$

Diese Gleichung komponentenweise geschrieben, ergibt die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x + a_{1,2}y &= -x - 2y \\
a_{2,1}x + a_{2,2}y &= x + y \\
a_{3,1}x + a_{3,2}y &= -x
\end{aligned}$$

Daraus lassen sich die gesuchten Komponenten ganz einfach ablesen und man gelangt zum selben Ergebnis.

Die Probe ergibt

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot x + (-2)\cdot y \\ 1\cdot x + 1\cdot y \\ (-1)\cdot x + 0\cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-2y \\ x+y \\ -x \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

Für unseren speziellen Vektor $\vec{v} = [3, -4]^T$ aus Teilaufgabe a) ergibt sich

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 3 + (-2)\cdot(-4) \\ 1\cdot 3 + 1\cdot(-4) \\ (-1)\cdot 3 + 0\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+8 \\ 3-4 \\ -3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = f(\vec{v}).$$

also das bereits bekannte Ergebnis.

Aufgabe 7.13. Beschreiben Sie mit Hilfe einer Abbildungsvorschrift f die Spiegelung eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ an der x-Achse. Ist diese Abbildung linear? Falls ja, so geben Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A an.

Lösung: Aus der Abbildung auf Seite 29 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7 wird ersichtlich, dass die x-Koordinate des Vektors $[x, y]^T \in \mathbb{R}^2$ bei einer Spiegelung an der x-Achse unverändert bleibt. Bei der y-Koordinate findet hingegen ein Vorzeichenwechsel statt. Die Abbildungsvorschrift der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lautet folglich

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Beachten Sie bitte jetzt die Seite 30 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort finden Sie die Definition der Linearität einer Abbildung (siehe Merziger, Seite 67).

Zunächst gilt es, die Homogenität der Abbildung f zu zeigen. Für jeden Vektor $[x, y]^T \in \mathbb{R}^2$ und jeden Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten

$$f\left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \alpha \cdot f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

Wir rechnen

$$f\left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x \\ -(\alpha y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha(-y) \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \alpha \cdot f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

Nun gilt es noch die Additivität zu zeigen, d.h. für beliebige Vektoren $[x_1, y_1]^T$, $[x_2, y_2]^T \in \mathbb{R}^2$ muss gelten

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right).$$

Diese Eigenschaft lässt sich ebenfalls ganz einfach zeigen. Dazu rechnen wir wieder

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\-(y_1+y_2)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}x_1+x_2\\(-y_1)+(-y_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\-y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\-y_2\end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Die zu der linearen Abbildung f gehörige Abbildungsmatrix A erhält man ganz einfach, indem man die Abbildungsvorschrift auf die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = [1{,}0]^T \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{e}_2 = [0{,}1]^T \in \mathbb{R}^2$ anwendet und die entstehenden Vektoren als Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix verwendet. Es ist

$$f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_1) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}.$$

Die Probe ergibt

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot x+0\cdot y\\0\cdot x+(-1)\cdot y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right).$$

Aufgabe 7.14. Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\1 & 5 & 0\\0 & 0 & -8\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 2\\-4 & -3\end{bmatrix}$$

a) das charakteristische Polynom,

b) die Eigenwerte und

c) die Eigenvektoren sowie

d) die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte.

Lösung: Beachten Sie bitte die Seiten 32 bis 34 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort werden grundlegende Begriffe im Zusammenhang mit Eigenwerten und Eigenvektoren erläutert und der Lösungsweg für Aufgaben dieses Typs beschrieben (siehe Merziger, Seite 65).

Wir bearbeiten zunächst alle Teilaufgaben a) bis d) für die Matrix A

a) Ob für die Definition des charakteristischen Polynoms $c_A(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der Ausdruck $\det(A - \lambda I)$ oder der Ausdruck $\det(\lambda I - A)$ verwendet wird, ist äquivalent. Bei Verwendung des ersteren Ausdrucks entstehen erfahrungsgemäß aber weniger Rechenfehler.

$$\begin{aligned}
c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} \\
&= [((5-\lambda)(5-\lambda)(-8-\lambda) + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0) \\
&\quad -(0 \cdot (5-\lambda) \cdot 0 + (5-\lambda) \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-8-\lambda))] \\
&= \left[(5-\lambda)^2(-8-\lambda) + 0 + 0 - (0 + 0 + (-8-\lambda)\right] \\
&= \left[(5-\lambda)^2(-8-\lambda) - (-8-\lambda)\right] \\
&= (-8-\lambda) \cdot \left[(5-\lambda)^2 - 1\right].
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sollte auf keinen Fall ausmultipliziert werden. Für die Bestimmung der Eigenwerte ist eine Produktstruktur des charakteristischen Polynoms bestens geeignet.

b) Die Eigenwerte sind gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. wir suchen die Werte für $\lambda \in \mathbb{C}$, für die gilt

$$c_A(\lambda) = (-8-\lambda) \cdot \left[(5-\lambda)^2 - 1\right] \overset{!}{=} 0.$$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist. Der erste Faktor wird Null, wenn λ den Wert -8 annimmt. Folglich ist $\lambda_1 = -8$ ein Eigenwert.

Der zweite Faktor aus unserem Produkt ist ein Polynom zweiten Grades in λ. Um dessen Nullstellen zu bestimmen, können wir ausmultiplizieren. Wir erhalten nach der zweiten binomischen Formel $(5-\lambda)^2 - 1 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24$. Bei Anwendung der p,q-Formel ergibt sich

$$\lambda_{2,3} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\frac{(-10)^2}{4} - 24} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1.$$

Folglich sind $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$ die weiteren Eigenwerte von A.

Wir hätten das Ausmultiplizieren und die Anwendung der p,q-Formel durch äquivalentes Umformen vermeiden können.

$$(5-\lambda)^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \longleftrightarrow (5-\lambda)^2 = 1 \longleftrightarrow |5-\lambda| = 1$$

Welche Zahlen λ haben von der Zahl 5 den Abstand 1 auf der Zahlengeraden? Eben die 4 und die 6!

c) Die zu den Eigenwerten λ_i, $i = 1{,}2{,}3$, gehörigen Eigenvektoren sind nichttriviale Lösungen $\vec{x}$ der homogenen linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$. Diese nichttrivialen Lösungen existieren für die Eigenwerte λ_i, da genau für diese Werte von λ gilt $c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

Wir beginnen mit $\lambda_1 = -8$. Es ist

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - (-8) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wie üblich lösen wir ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Hilfe der Gauss-Jordan-Verfahrens. Wie wir schon festgestellt haben, müssen wir die rechte Seite, also die sich nicht ändernden Nullen, nicht mit berücksichtigen.

$$\begin{array}{rrr|l} 13 & 1 & 0 & \text{I} \\ 1 & 13 & 0 & \text{II} \\ 0 & 0 & 0 & \text{III} \\ \hline \end{array} \tag{9}$$

Um ein geeignetes Leitelement zu erhalten, tauschen wir zunächst die beiden ersten Zeilen und erzeugen dann die gewünschten Nullen außerhalb der Diagonalen. Die dritte Zeile kann entfallen, da sie keine relevante Information erhält.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass bei der Bestimmung eines Eigenvektors immer mindestens eine Zeile beim Gauss-Jordan-Verfahren entfallen muss. Sollte das nicht auftreten, so haben Sie sich mit Sicherheit verrechnet.

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 13 & 0 & \text{II} \to \text{I} \\ 13 & 1 & 0 & \text{I} \to \text{II} \\ \hline 1 & 13 & 0 & \text{I} \to \text{I} \\ 0 & -168 & 0 & \text{II} \to \text{II} - 13 \cdot \text{I} \\ \hline 1 & 13 & 0 & \text{I} \to \text{I} \\ 0 & 1 & 0 & \text{II} \to \text{II}/(-168) \\ \hline 1 & 0 & 0 & \text{I} \to \text{I} - 13 \cdot \text{II} \\ 0 & 1 & 0 & \text{II} \to \text{II} \\ \hline \end{array}$$

Die beiden verbliebenen Zeilen repräsentieren zwei Bedingungen für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Die erste Zeile steht für $x_1 = 0$ und die zweite Zeile für $x_2 = 0$. Folglich ist $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei wählbar. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_1} des Eigenwertes $\lambda_1 = -8$. Eine Basis des Eigenraumes ist der Vektor $\vec{v}_1 = [0{,}0{,}1]^T$ den wir als Eigenvektor zu λ_1 wählen.

Wenn wir uns den Ausgangspunkt (9) für das GAUSS-JORDAN-Verfahren genauer ansehen, stellen wir fest, dass wir die darauf folgenden Schritte nicht hätten rechnen brauchen. Die beiden ersten Zeilen bedeuten $13x_1 + x_2 = 0$ und $x_1 + 13x_2 = 0$. Das kann nur gelten, wenn $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Also immer genau hinschauen. Das kann viel Arbeit sparen.

Kommen wir nun zu unserem zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 4$. Es ist

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Wir versuchen, das GAUSS-JORDAN-Verfahren zu vermeiden und die drei Zeilen der Matrix direkt zu interpretieren. Die erste Zeile bedeutet $x_1 + x_2 = 0$, also $x_1 = -x_2$. Die zweite Zeile kann entfallen, da sie mit der ersten Zeile identisch ist. Würde man von der zweiten Zeile die erste Zeile (als GAUSS-Umformung) subtrahieren, würde ja eine Nullzeile entstehen. Die dritte Zeile bedeutet $-12x_3 = 0$. Folglich muss gelten $x_3 = 0$. Wir haben also zwei Bedingungen für drei Unbekannte, können also x_1 oder x_2 frei wählen. Wir setzen $x_1 = t \in \mathbb{R}$ und in vektorieller Schreibweise ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

als Lösung unseres homogenen linearen Gleichungssystems. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_2} wählen wir $\vec{v}_2 = [1, -1{,}0]^T$, als Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

Kommen wir nun zum letzten der drei Eigenwerte $\lambda_3 = 6$. Es ist

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}.$$

Wir finden eine ganz ähnliche Situation wie beim zweiten Eigenwert vor und können so das GAUSS-JORDAN-Verfahren zu vermeiden. Die erste Zeile ist gleich der zweiten Zeile multipliziert mit -1. Sie kann also entfallen. Die zweite Zeile bedeutet $x_1 - x_2 = 0$, also $x_1 = x_2$. Die dritte Zeile ergibt wieder $x_3 = 0$. Wir haben wieder zwei Bedingungen für drei Unbekannte, können also x_1 oder x_2 frei wählen. Wir setzen $x_1 = t \in \mathbb{R}$ und in vektorieller Schreibweise ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

als Lösung unseres homogenen linearen Gleichungssystems. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_3} wählen wir $\vec{v}_3 = [1{,}1{,}0]^T$, als Eigenvektor zum Eigenwert λ_3.

d) Die drei Eigenwerte $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$ sind nach Teilaufgabe a) einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms $c_A(\lambda)$. Per Definition gilt also für alle drei algebraischen Vielfachheiten $\nu_{alg}(\lambda_i) = 1$.

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist per Definition gleich der Dimension seines zugehörigen Eigenraumes. Die Eigenräume aller drei Eigenwerte der Matrix A haben jeweils eine Basis, die aus einem Eigenvektor besteht. Also sind die Eigenräume alle eindimensional. Es gilt also für alle drei Eigenwerte $\nu_{geom}(\lambda_i) = 1$.

Geometrisch betrachtet sind die Eigenräume hier Geraden im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung gehen und deren Richtung durch den jeweiligen Eigenvektor festgelegt ist.

Wenn man die Beziehung

$$1 \leq \nu_{geom}(\lambda_i) \leq \nu_{alg}(\lambda_i) \leq n \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

kennt, so hätte man die Teilaufgabe d) schon allein nach der Lösung der Teilaufgabe a) lösen können, denn wenn eine algebraische Vielfachheit gleich 1 ist, so muss die dazugehörige geometrische Vielfachheit ebenfalls gleich 1 sein.

Kommen wir nun zur Lösung der Teilaufgaben a) bis d) für die Matrix B.

a)

$$\begin{aligned} c_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-3-\lambda) - 2 \cdot (-4) \\ &= -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 8 = \lambda^2 + 2\lambda + 5. \end{aligned}$$

b) Um die Nullstellen dieses Polynoms zweiten Grades zu bestimmen, nutzen wir die p, q-Formel. Wegen

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{2^2}{4} - 5 = -4 < 0$$

erhalten wir komplexwertige Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = -\frac{2}{2} \pm i\sqrt{5 - \frac{2^2}{4}} = -1 \pm i\sqrt{4} = -1 \pm 2i.$$

Die Eigenwerte der Matrix B sind also $\lambda_1 = -1-2i$ und $\lambda_2 = -1+2i$. Man beachte, dass λ_1 und λ_2 zueinander konjugiert komplex sind. Das ist immer so. Tritt ein komplexer Eigenwert auf, so ist sein konjugiert komplexer Wert ebenfalls Eigenwert.

c) Wir beginnen mit $\lambda_1 = -1 - 2i$. Es ist

$$\begin{aligned} B - \lambda_1 I &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - (-1-2i) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1-2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-(-1-2i) & 2 \\ -4 & -3-(-1-2i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2i & 2 \\ -4 & -2+2i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir wissen – wie bei Teilaufgabe c) für die Matrix A angemerkt –, dass beim Gauss-Jordan-Verfahren mindestens eine der Zeilen entfallen muss. Dass ist hier aber nicht so einfach einzusehen. Deshalb wollen wir uns dies zunächst einmal klar machen, bevor wir das homogene lineare Gleichungssystem lösen. Dazu multiplizieren wir die erste Zeile mit -2, damit die Realteile der Komponenten in der ersten Spalte übereinstimmen. Die zweite Zeile multiplizieren wir mit $1 + i$, damit die Komponenten in der ersten Spalte völlig übereinstimmen.

$2+2i$	2	I
-4	$-2+2i$	II
$-4-4i$	-4	$\mathrm{I} \to (-2) \cdot \mathrm{I}$
$-4-4i$	-4	$\mathrm{II} \to (1+i) \cdot \mathrm{II}$

Wegen $(-2+2i)(1+i) = -2+2i-2i+2i^2 = -2+2(-1) = -4$ ist die Komponente in der zweiten Zeile der zweiten Spalte tatsächlich gleich -4 und wir sehen, dass beide Zeilen identisch sind und somit eine Zeile entfallen kann.

Wir wollen vermeiden, das Gauss-Jordan-Verfahren weiter rechnen zu müssen. Wir teilen die erste Zeile durch (-4) und interpretieren sie jetzt als

$$(1+i)x_1 + x_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = -(1+i)x_1.$$

Wir haben jetzt also eine Bedingung für zwei Unbekannte, können also x_1 oder x_2 frei wählen. Wir setzen $x_1 = z \overset{!}{\in} \mathbb{C}$ und in vektorieller Schreibweise ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -(1+i)z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \end{bmatrix}$$

als Lösung unseres homogenen linearen Gleichungssystems. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} wählen wir $\vec{v}_1 = [1, -1-i]^T \in \mathbb{C}^2$, als Eigenvektor zum Eigenwert λ_1.

Wir kommen nun zum zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -1 + 2i$. Es ist

$$\begin{aligned} B - \lambda_2 I &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - (-1+2i) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1+2i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-(-1+2i) & 2 \\ -4 & -3-(-1+2i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2i & 2 \\ -4 & -2-2i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sind uns jetzt sicher, dass wirklich eine Zeile entfallen kann und interpretieren jetzt direkt die erste Zeile als

$$(2-2i)x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = -(1-i)x_1.$$

Wir haben wieder eine Bedingung für zwei Unbekannte, können also x_1 oder x_2 frei wählen. Wir setzen erneut $x_1 = z \overset{!}{\in} \mathbb{C}$ und in vektorieller Schreibweise ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -(1-i)z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$$

als Lösung unseres homogenen linearen Gleichungssystems. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_2} wählen wir $\vec{v}_2 = [1, -1+i]^T \in \mathbb{C}^2$, als Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

Man beachte, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zueinander konjugiert komplex sind, d.h. alle Komponenten der Vektoren sind zueinander konjugiert komplexe Zahlen. Das trifft auch zu, wenn es reellwertige Komponenten gibt. Die reellen Zahlen sind ja zu sich selbst konjugiert komplex.

Und diese Eigenschaft komplexer Eigenvektoren gilt immer. Hat man einen Eigenvektor zu einem komplexwertigen Eigenwert bestimmt, so ist dessen konjugiert komplexer Vektor Eigenvektor zum konjugiert komplexen Eigenwert. Man hat also halben Rechenaufwand.

d) Die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1 - 2i$ und $\lambda_2 = -1 + 2i$ sind nach Teilaufgabe a) einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms $c_B(\lambda)$. Folglich gilt $\nu_{alg}(\lambda_1) = 1$ und $\nu_{alg}(\lambda_2) = 1$.

   Nach den Anmerkungen unter d) für die Matrix A muss für die geometrischen Vielfachheiten $\nu_{geom}(\lambda_1) = 1$ und $\nu_{geom}(\lambda_2) = 1$ gelten.

   Eine geometrische Interpretation der Eigenräume ist hier nicht möglich, da es sich um Unterräume des $\mathbb{C}^2$ handelt.

Aufgabe 7.15. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte einschließlich deren algebraischer und geometrischer Vielfachheit sowie die Eigenvektoren von A.

b) Ist A invertierbar?

c) Ist A diagonalisierbar?

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$A^{-1}, \quad A^T, \quad \frac{1}{2}A, \quad A^2 \quad \text{und} \quad A^3 + 2A + I.$$

Lösung: Beachten Sie bitte die Seiten 36 und 37 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Dort wird der Begriff der Diagonalisierbarkeit definiert (siehe Merziger, Seite 66) und wichtige Rechenregeln für Eigenwerte zusammengefasst, die nicht im Merziger zu finden sind.

a) Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynoms $c_A(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= [((2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0) \\
&\quad -(1 \cdot (1-\lambda) \cdot 1 + (2-\lambda) \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot (2-\lambda))] \\
&= \left[(2-\lambda)^2(1-\lambda) + 0 + 0 - ((1-\lambda) + 0 + 0)\right] \\
&= \left[(2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda)\right] \\
&= (1-\lambda) \cdot \left[(2-\lambda)^2 - 1\right] \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Wir haben wieder eine Produktstruktur des charakteristischen Polynoms, so dass sich die Eigenwerte leicht bestimmen lassen. Der erste Faktor wird Null, wenn λ den Wert 1 annimmt. Folglich ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert.

Der zweite Faktor aus unserem Produkt ist ein Polynom zweiten Grades in λ. Um dessen Nullstellen zu bestimmen, können wir ausmultiplizieren. Wir erhalten nach der zweiten binomischen Formel $(2-\lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. Bei Anwendung der p, q-Formel ergibt sich

$$\lambda_{2,3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} - 3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1.$$

Folglich sind $\lambda_1 = 1$ doppelte Nullstelle und $\lambda_2 = 3$ ein weiterer Eigenwert von A.

Wir hätten auch hier wieder das Ausmultiplizieren und die p, q-Formel durch äquivalentes Umformen vermeiden können.

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (2-\lambda)^2 = 1 \Longleftrightarrow |2-\lambda| = 1$$

Welche Zahlen λ haben von der Zahl 2 den Abstand 1 auf der Zahlengeraden? Ganz genau, die 1 und die 3.

Wie wir in Aufgabe 7.14 bei der Matrix B gesehen haben, führen komplexwertige Eigenwerte zu komplizierten Rechnungen bei der Bestimmung von Eigenvektoren. Ist eine Matrix symmetrisch, d.h. es gilt $A = A^T$, so besitzt sie nur reellwertige Eigenwerte und damit auch Eigenvektoren. Dies ergibt eine Möglichkeit der Selbstkontrolle. Erhält man bei einer symmetrischen Matrix wie der Matrix A in dieser Aufgabe komplexwertige Eigenwerte, so hat man sich verrechnet.

Der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ hat die algebraische Vielfachheit $\nu_{alg}(\lambda_1) = 2$, da es sich um eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $c_A(\lambda)$ handelt. Hingegen hat der Eigenwert $\lambda_2 = 3$ die algebraische Vielfachheit $\nu_{alg}(\lambda_2) = 1$ und wir wissen, dass daher auch die geometrische Vielfachheit diesen Wert haben muss, also $\nu_{geom}(\lambda_2) = 1$.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Eigenvektoren von $\lambda_1 = 1$. Die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwertes kann den Wert 1 oder 2 annehmen, d.h. es kann sich ein Eigenvektor oder zwei Eigenvektoren als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} ergeben.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir versuchen wieder, diese Matrix bzw. das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem direkt zu interpretieren. Die zweite Zeile kann entfallen, da sie keine relevante Information enthält. Da die erste und die dritte Zeile gleich sind, kann auch eine dieser Zeilen entfallen. Es verbleibt eine Bedingung für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Es können also zwei der drei Komponenten frei gewählt werden. Die erste Zeile steht für $x_1 + x_3 = 0$ bzw. $x_3 = -x_1$. Die zweite Komponente $x_2 = t \in \mathbb{R}$ ist frei wählbar, da es keinerlei Beziehungen zu x_1 oder x_3 gibt. Folglich ist eine der beiden Komponenten x_1 oder x_3 auch frei wählbar. Wir wählen $x_1 = s \in \mathbb{R}$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Werten $s, t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_1} des Eigenwertes $\lambda_1 = 1$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} wählen wir die Vektoren $\vec{v}_{1,1} = [1,0,-1]^T$ und $\vec{v}_{1,2} = [0,1,0]^T$, die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Der Eigenraum V_{λ_1} hat folglich die Dimension 2, und es gilt $\nu_{geom}(\lambda_1) = 2$.

Es verbleibt nun nur noch, einen Eigenvektor $\vec{v}_2$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ zu bestimmen. Es ist

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die erste Zeile ist gleich der dritten Zeile multipliziert mit -1. Sie kann also entfallen. Die dritte Zeile bedeutet $x_1 - x_3 = 0$, also $x_1 = x_3$. Die zweite Zeile ergibt $-2x_2 = 0$, also $x_2 = 0$. Wir haben zwei Bedingungen für drei Unbekannte, können also x_1 oder x_3 frei wählen. Wir setzen $x_1 = t \in \mathbb{R}$ und in vektorieller Schreibweise ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

als Lösung unseres homogenen linearen Gleichungssystems. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_2} wählen wir $\vec{v}_2 = [1,0,1]^T$, als Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

Geometrisch betrachtet ist der Eigenraum V_{λ_1} eine Ebene im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung verläuft und deren Lage im Raum durch die beiden Eigenvektoren $\vec{v}_{1,1}$ und $\vec{v}_{1,2}$ festgelegt ist. Beide Vektoren liegen in dieser Ebene.

Der Eigenraum V_{λ_2} ist wiederum eine Gerade im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung geht und deren Richtung durch den Eigenvektor $\vec{v}_2$ festgelegt ist. Er liegt auf dieser Geraden.

b) Die Determinante einer quadratischen Matrix ergibt sich als das Produkt seiner Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten. Also gilt

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \neq 0.$$

Folglich ist die Matrix A invertierbar.

c) Eine Matrix ist diagonalisierbar, wenn die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller ihrer Eigenwerte übereinstimmen. Für die Matrix A ist das der Fall, also ist sie diagonalisierbar. Die Diagonalmatrix einer diagonalisierbaren Matrix hat gerade die Eigenwerte dieser Matrix als Komponenten ihrer Diagonale. Also wäre

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

eine mögliche Diagonalmatrix. Eine zu dieser Diagonalmatrix gehörige invertierbare Matrix T ergibt sich aus den dazugehörigen Eigenvektoren

$$T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_{1,1} & \vec{v}_{1,2} & \vec{v}_2 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist auf die richtige Reihenfolge der Spaltenvektoren zu achten. Bei geometrischen Vielfachheiten größer als 1 können jedoch die Eigenvektoren zum selben Eigenwert vertauscht werden.

$$T_{2,1} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_{1,2} & \vec{v}_{1,1} & \vec{v}_2 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

wäre also auch eine geeignete invertierbare Matrix zur selben Diagonalmatrix D.

Es gilt

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (-1 + 0 + 0) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

Folglich ist die Matrix T invertierbar.

Führen wir die Probe aus. Es ist einerseits

$$AT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

und andererseits

$$TD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zum Schluss auch hier noch eine allgemeine Anmerkung. Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar. Also hat man wieder eine Möglichkeit der Selbstkontrolle. Ergibt sich durch die eigenen Rechnungen zur Bestimmung der Eigenräume, dass bei einer symmetrischen Matrix die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes nicht übereinstimmen, so muss man sich irgendwo verrechnet haben.

d) Zur Lösung dieser Teilaufgabe nutzen wir die Formeln auf Seite 37 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7. Die Schreibweise $\lambda_i(A)$ bedeutet, dass der i-te Eigenwert der Matrix A gemeint ist. In der runden Klammer steht also immer die Matrix, deren Eigenwert gemeint ist.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lambda_i\left(A^{-1}\right) &\overset{!}{=} [\lambda_i(A)]^{-1} = \frac{1}{\lambda_i(A)} = \begin{cases} \frac{1}{1} = 1, & i = 1, \\ \frac{1}{3}, & i = 2, \end{cases} \\
\lambda_i\left(A^T\right) &\overset{!}{=} \lambda_i(A) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 3, & i = 2, \end{cases} \\
\lambda_i\left(\frac{1}{2}A\right) &\overset{!}{=} \frac{1}{2}\lambda_i(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, & i = 1, \\ \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}, & i = 2, \end{cases} \\
\lambda_i\left(A^2\right) &\overset{!}{=} [\lambda_i(A)]^2 = \begin{cases} 1^2 = 1, & i = 1, \\ 3^2 = 9, & i = 2, \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $A^3 + 2A + I$ ist

$$m = 3 \quad \text{und} \quad p_m(x) = p_3(x) = x^3 + 2x + 1.$$

Also ergibt sich

$$p_3(A) = A^3 + 2A + I,$$

denn es gilt die Vereinbarung, dass das Absolutglied α_0 des Polynoms

$$p_m(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

mit komplexwertigen Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, n$, immer mit der Einheitsmatrix multipliziert wird. Denn die Einheitsmatrix hat ja den Eigenwert 1 mit der algebraischen Vielfachheit n. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_i \left(A^3 + 2A + I\right) &= \lambda_i \left(p_3(A)\right) \stackrel{!}{=} p_3\left(\lambda_i(A)\right) \\
&= \lambda_i^3 + 2 \cdot \lambda_i + 1 = \begin{cases} 1^3 + 2 \cdot 1 + 1 = 4, & i = 1, \\ 3^3 + 2 \cdot 3 + 1 = 27 + 6 + 1 = 34, & i = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Würde man die Formeln auf Seite 37 in der Datei mit den Aufgaben zum Kapitel 7 nicht benutzen, so hätte man einen sehr hohen Rechenaufwand und könnte sich leicht irgendwo verrechnen. So müsste man z.B. zunächst die Matrix $A^3 + 2A + I$ berechnen und dann deren Eigenwerte. Na danke.

Aufgabe 7.16. Gegeben seien die Matrizen

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ und } R = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie für diese Matrizen

a) die Determinante,

b) das charakteristische Polynom,

c) die Eigenwerte,

d) die Eigenvektoren.

e) Welche Matrizen sind einander ähnlich?

Lösung: Die Lösungen dieser Aufgabe sind weitgehend nicht so ausführlich, wie bei den vorherigen Aufgaben zum selben Thema. Sie sind auf das reduziert, dass wir vom Umfang bzw. der Detailliertheit her von den Studierenden in den Klausuren wirklich als Lösungen erwarten. Nur bei den Teilaufgaben c) und d) gibt es ausführlichere Passagen mit Erläuterungen zur allgemeinen Vorgehensweise bzw. Spezialfällen.

a)

$$\begin{aligned}
\det(P) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-4-4-(8+8-1) = -12-15 = -27, \\
\det(Q) &= (-3)\cdot 3\cdot 3 = -27 \quad \text{und} \\
\det(R) &= (-3)\cdot 3\cdot 3 = -27.
\end{aligned}$$

Bei den Matrizen Q und R konnte man nutzen, dass es sich um Dreiecksmatrizen handelt. Die Determinanten mussten also nicht mit Hilfe der SARRUSschen Regel berechnet werden.

b)

$$\begin{aligned}
c_P(\lambda) = \det(P-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(-1-\lambda) - 4 - 4 - [4(2-\lambda) + 4(2-\lambda) + (-1-\lambda)] \\
&= -(2-\lambda)^2(1+\lambda) - 8 - 8(2-\lambda) + 1 + \lambda \\
&= -(4-4\lambda+\lambda^2)(1+\lambda) - 7 - 16 + 8\lambda + \lambda \\
&= -4 + 4\lambda - \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 23 + 9\lambda \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_Q(\lambda) = \det(Q-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(3-\lambda)^2 \\
c_R(\lambda) = \det(R-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(3-\lambda)^2
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass die Matrizen Q und R dasselbe charakteristische Polynom besitzen.

c) Wir beginnen mit der Bestimmung der Eigenwerte der Matrix P. Gesucht sind die drei Lösungen der Gleichung

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0,$$

die Nullstellen des Polynoms dritten Grades auf der linken Seite der Gleichung. Mit der p,q-Formel kommen wir hier nicht weiter. Das Ziel ist es jetzt, eine Nullstelle zu erraten. Der Satz von VIETA liefert uns hierfür die Kandidaten. Denn die Nullstellen sind ganzzahlige Teiler des Absolutgliedes -27 unseres Polynoms, d.h. wir probieren die Kandidaten ± 1, ± 3 und ± 9 durch.

$$-(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 + 9\cdot(-1) - 27 = 1 + 3 - 9 - 27 = -32 \neq 0$$

Pech gehabt. Nächster Versuch.

$$-(1^3) + 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 27 = -1 + 3 + 9 - 27 = -16 \neq 0$$

Wieder nichts. Her mit dem nächsten Kandidaten!

$$-(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) - 27 = 27 + 27 - 27 - 27 = 0$$

Treffer! Der erste Eigenwert ist $\lambda_1 = -3$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten. Erstens: Alle weiteren Kandidaten durchprobieren. Oder: Durch Polynomdivision den Grad des Polynoms zu reduzieren.

Wir probieren erst einmal weiter. Denn wer will schon gern eine Polynomdivision durchführen.

$$\begin{aligned} -(3^3) + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 27 &= -27 + 27 + 27 - 27 = 0 \\ -(-9)^3 + 3 \cdot (-9)^2 + 9 \cdot (-9) - 27 &= 729 + 243 - 81 - 27 = 864 \neq 0 \\ -(9^3) + 3 \cdot 9^2 + 9 \cdot 9 - 27 &= -729 + 243 + 81 - 27 = -432 \neq 0. \end{aligned}$$

Wir erkennen nun, dass $\lambda_2 = 3$ der zweite Eigenwert ist. Es muss aber noch einen dritten Eigenwert geben oder einer der beiden gefundenen Eigenwerte ist mehrfache Nullstelle unseres Polynoms. Der erste Fall scheidet aus, da wir alle Kandidaten durchprobiert haben. Doch welcher der beiden Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 2 besitzt, können wir nicht erkennen.

Also doch Polynomdivision. Wir dividieren durch den Linearfaktor $\lambda - \lambda_1 = \lambda + 3$ und erhalten

$$(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27) : (\lambda + 3) = -\lambda^2 + 6\lambda - 9.$$

Eine Division durch den Linearfaktor $\lambda - \lambda_2 = \lambda - 3$ wäre auch möglich gewesen.

Nun können wir mit Hilfe der p, q-Formel die Nullstellen des Polynoms zweiten Grades $\lambda^2 - 6\lambda + 9$ bestimmen.

$$\lambda_{2,3} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} - 9} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$$

Wir erkennen also, dass der Eigenwert $\lambda_2 = 3$ die algebraische Vielfachheit 2 besitzt. Dahingegen besitzt der erste Eigenwert $\lambda_1 = -3$ die algebraische und die geometrische Vielfachheit 1.

Die Bestimmung der Eigenwerte der Matrix Q ist hingegen ganz einfach, da es sich um eine Diagonalmatrix handelt. Diagonalmatrizen besitzen nämlich die Eigenschaft, dass ihre Diagonalelemente gerade ihre Eigenwerte sind. Wir lesen $\lambda_1 = -3$ mit der algebraischen und geometrischen Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 3$ mit der algebraischen Vielfachheit 2 ab. Die Bestimmung des charakteristischen Polynoms wäre für diese Matrix also nicht erforderlich gewesen.

Aufgrund der reinen Produktstruktur von $c_R(\lambda)$ lassen sich die Eigenwerte der Matrix R direkt ablesen. Einerseits $\lambda_1 = -3$ mit der algebraischen und geometrischen Vielfachheit 1 und andererseits $\lambda_2 = 3$ mit der algebraischen Vielfachheit 2.

Wir stellen also fest, dass alle drei Matrizen dieselben Eigenwerte besitzen. Für die Matrizen Q und R ist das klar, da sie dasselbe charakteristische Polynom haben. Um einen Vergleich mit dem charakteristischen Polynom von P zu ermöglichen, multiplizieren wir – für die Bestimmung der Eigenwerte unnötigerweise – aus

$$\begin{aligned}(-3-\lambda)(3-\lambda)^2 &= (-3-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2)\\ &= -27+18\lambda-3\lambda^2-9\lambda+6\lambda^2-\lambda^3\\ &= -\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda-27\end{aligned}$$

und stellen fest, dass sogar alle drei charakteristischen Polynome übereinstimmen.

d) Wir beginnen mit der Bestimmung der Eigenvektoren für die Matrix P. Es ist

$$P-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Nun müssen wir doch mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens weiterrechnen, da wir nicht erkennen können, welche der drei Zeilen entfallen kann. Da uns in der ersten Spalte ein geeignetes Leitelement für eine einfache Rechnung fehlt, beginnen wir damit, in der dritten Spalte mit Hilfe der dritten Zeile Nullen zu erzeugen.

5	1	−2	I
1	5	2	II
−2	2	2	III
3	3	0	I → I + III
3	3	0	II → II − III
−2	2	2	III → III

Wir erkennen nun, dass die erste oder die zweite Zeile entfallen kann. Es verbleiben zwei Bedingungen für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Eine der drei Komponenten kann frei gewählt werden. Die erste bzw. zweite Zeile steht für $3x_1 + 3x_2 = 0$ bzw. $x_2 = -x_1$. Die dritte Zeile bedeutet $-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ bzw. $x_2 + x_3 = x_1$. Setzen wir hier $x_2 = -x_1$ ein, so erhalten wir $-x_1 + x_3 = x_1$ bzw. $x_3 = 2x_1$. Um Brüche zu vermeiden wählen dieses Mal $x_1 = t \in \mathbb{R}$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\\ -t\\ 2t\end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_1} des Eigenwertes $\lambda_1 = -3$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} wählen wir den Vektor $\vec{v}_1 = [1, -1{,}2]^T$, als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$.

Kommen wir nun zum zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 3$ der Matrix P. Es ist

$$P - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Wir erkennen, dass die dritte Zeile gerade das Doppelte der ersten Zeile ist und sich die zweite Zeile aus der Multiplikation der ersten Zeile mit -1 ergibt. Daher können die zweite und die dritte Zeile entfallen. Es verbleibt eine Bedingung für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Es können also zwei der drei Komponenten frei gewählt werden. Die erste Zeile steht für $-x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ bzw. $x_1 = 2x_3 - x_2$. Wir wählen $x_2 = s \in \mathbb{R}$ und $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Werten $s, t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_2} des Eigenwertes $\lambda_2 = 3$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_2} wählen wir die Vektoren $\vec{v}_{2,1} = [1{,}1{,}0]^T$ und $\vec{v}_{2,2} = [-2{,}0{,}1]^T$, die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Der Eigenraum V_{λ_2} hat folglich die Dimension 2, und es gilt $\nu_{geom}(\lambda_2) = 2$.

Wenn man sich auskennt, ist für die Matrix Q nichts zu rechnen. Denn jede Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Diagonalelemente von Null verschieden sind, hat die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ als Eigenvektoren.

Sie glauben das nicht? Na, dann rechnen Sie eben fleißig. Wir beginnen auch hier mit $\lambda_1 = -3$. Es ist

$$Q - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Die erste Zeile kann entfallen, da sie keine relevante Information enthält. Es verbleiben zwei Bedingungen für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Eine der drei Komponenten kann frei gewählt werden. Die zweite Zeile steht für $6x_2 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und analog die dritte Zeile für $6x_3 = 0$ bzw. $x_3 = 0$. Folglich können wir $x_1 = t \in \mathbb{R}$ frei wählen. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_1} des Eigenwertes $\lambda_1 = -3$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} wählen wir den Vektor $\vec{v}_1 = [1{,}0{,}0]^T = \vec{e}_1$, als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$.

Kommen wir nun zum zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 3$. Es ist

$$Q - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jetzt haben wir sogar zwei Zeilen, die nur noch Nullen enthalten und damit entfallen können. Es verbleibt eine Bedingung für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Es können also zwei der drei Komponenten frei gewählt werden. Die erste Zeile steht für $-6x_1 = 0$ bzw. $x_1 = 0$. Wir wählen $x_2 = s \in \mathbb{R}$ und $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigen Werten $s, t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_2} des Eigenwertes $\lambda_2 = 3$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_2} wählen wir die Vektoren $\vec{v}_{2,1} = [0{,}1{,}0]^T = \vec{e}_2$ und $\vec{v}_{2,2} = [0{,}0{,}1]^T = \vec{e}_3$, die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Der Eigenraum V_{λ_2} hat folglich die Dimension 2, und es gilt $\nu_{geom}(\lambda_2) = 2$.

Nun wollen wir auch noch die Eigenvektoren der Matrix R bestimmen und beginnen wieder mit $\lambda_1 = -3$. Es ist

$$R - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Die erste Zeile kann wieder entfallen. Es verbleiben zwei Bedingungen für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Eine der drei Komponenten kann frei gewählt werden. Die dritte Zeile steht für $6x_3 = 0$ bzw. $x_3 = 0$. Daher ergibt sich für die zweite Zeile aus $6x_2 + x_3 = 0$, dass auch $x_2 = 0$ ist. Folglich können wir $x_1 = t \in \mathbb{R}$ frei wählen. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_1} des Eigenwertes $\lambda_1 = -3$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_1} wählen wir den Vektor $\vec{v}_1 = [1{,}0{,}0]^T = \vec{e}_1$, als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$.

Kommen wir nun zum zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 3$. Es ist

$$R - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hier kann die dritte Zeile entfallen, da sie nur Nullen enthält. Es verbleiben zwei Bedingungen für die drei unbekannten Komponenten x_1, x_2, x_3 des Lösungsvektors $\vec{x}$. Die erste Zeile steht für $-6x_1 = 0$ bzw. $x_1 = 0$ und analog die dritte Zeile für $x_3 = 0$. Folglich ist $x_2 = t \in \mathbb{R}$ frei wählbar. Fassen wir diese Beziehungen in vektorieller Schreibweise zusammmen, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{x}$, die sich in dieser Weise mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, bilden den Eigenraum V_{λ_2} des Eigenwertes $\lambda_2 = 3$. Als Basis des Eigenraumes V_{λ_2} wählen wir den Vektor $\vec{v}_2 = [0{,}1{,}0]^T = \vec{e}_2$, als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Der Eigenraum V_{λ_2} ist folglich eindimensional, und es gilt $\nu_{geom}(\lambda_2) = 1$.

e) Bei den Matrizen P und Q stimmen die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für alle Eigenwerte überein. Folglich sind beide Matrizen diagonalisierbar. Da sie über dieselben Eigenwerte verfügen, sind sie auch ähnlich.

Insbesondere ist die Matrix Q selbst eine Diagonalmatrix, so dass die Diagonalisierbarkeit trivial ist. Es gilt ja offensichtlich $Q = I^{-1}QI$, d.h. die gesuchte invertierbare Matrix T ist gerade die Einheitsmatrix, die mit ihrer inversen Matrix übereinstimmt.

Als Matrix T für die Diagonalisierung der Matrix P wählen wir die Eigenvektoren der Matrix P zu deren Eigenwerten

$$T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_{2,1} & \vec{v}_{2,2} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (-4 + 0 - 1) = 1 + 5 = 6 \neq 0.$$

Also ist die Matrix T invertierbar.

Führen wir die Probe durch. Einerseits ist

$$PT = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

und andererseits

$$TQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Es gilt also $PT = TQ$ und damit sind die Matrizen P und Q nachgewiesenermaßen einander ähnlich. Die Beziehung $PT = TQ$ ist äquivalent zu $Q = T^{-1}PT$, da T^{-1} existiert. Multipliziert man beide Seiten der ersten Beziehung von links mit T^{-1}, so ergibt sich $T^{-1}PT = T^{-1}TQ = IQ = Q$.

Die Matrix R hingegen ist nicht diagonalisierbar, da die algebraische Vielfachheit nicht mit der geometrischen Vielfachheit des zweiten Eigenwertes übereinstimmt,

$$\nu_{alg}(\lambda_2) = 2 \neq 1 = \nu_{geom}(\lambda_2).$$

Damit kann diese Matrix weder zu der Matrix Q noch zur Matrix P ähnlich sein.