Schwerpunkte des Kapitels

- Differenzierbarkeit
- Differentiationsregeln
- Anwendungen der Differentialrechnung
- Die Regeln von DE L'HOSPITAL

Themen und Begriffe

- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit

Aufgabe 4.1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 1, \\ b, & x = 1, \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x > 1, \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Stetigkeit.
b) Wie müssen die Werte $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $f(x)$ im Punkt $x = 1$ stetig ist?
c) Ist die Funktion $f(x)$ mit den so gewählten Werten a und b im Punkt $x = 1$ differenzierbar?

Themen und Begriffe

- Produktregel
- Quotientenregel
- Kettenregel

Aufgabe 4.2

Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \quad \text{für} \quad x \in D_f.$$

Themen und Begriffe

- Monotonieverhalten
- lokale Extrema
- Krümmungsverhalten
- Wendepunkte

Aufgabe 4.3

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad \text{mit} \quad a > 1.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsdereich D_f.
b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Symmetrie.
c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$.
d) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion $f(x)$.

Aufgabe 4.4

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \cosh\left(\frac{x^2}{2} - 1\right).$$

a) Stellen Sie die Geradengleichung der Tangenten im Punkt $x_0 = 2$ auf.
b) An welchen Stellen hat die Funktion $f(x)$ horizontale Tangenten?

Aufgabe 4.5

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion $f(x)$.

b) Leiten Sie daraus Aussagen über Extrema und Wendepunkte der Funktion $f(x)$ ab.

Aufgabe 4.6

Bestimmen Sie die Grenzwerte, falls diese existieren

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$, f) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$.