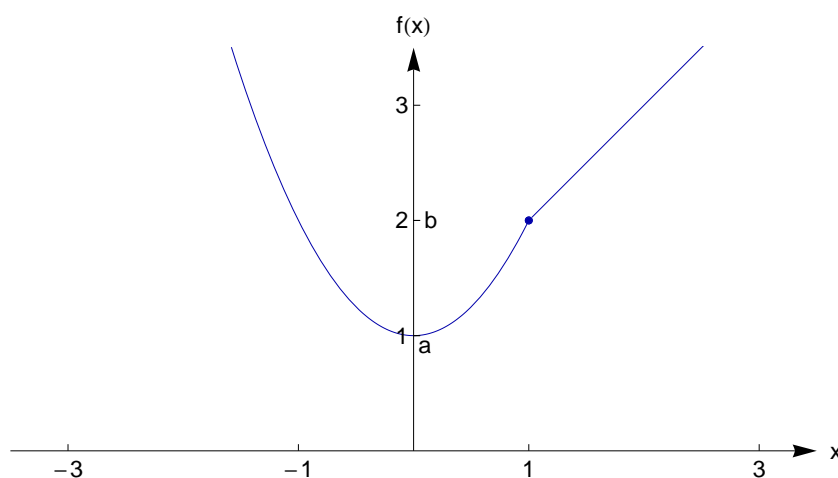


## 4 Differentialrechnung

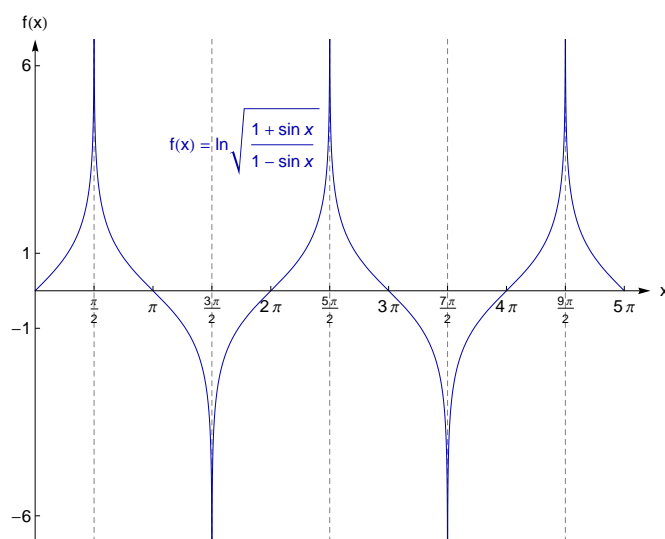
### Aufgabe 4.1.

- a) Die Funktion  $f(x)$  ist für  $x \neq 1$  stetig.  
Für  $x = 1$  ist  $g_l = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a$  und  $g_r = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ .
- b) Für  $a = 1$  und  $b = 2$ .
- c) Die Funktion  $f(x)$  ist im Punkt  $x = 1$  nicht differenzierbar.

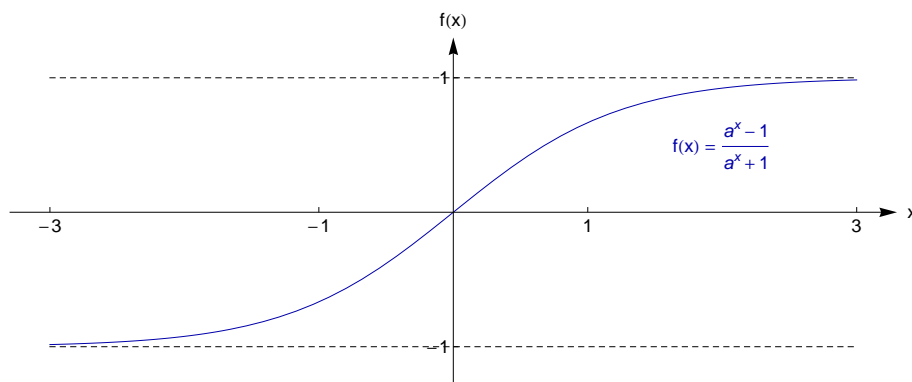
Grafische Veranschaulichung zu b)



### Aufgabe 4.2. Grafische Darstellung der Funktion $f(x)$



$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{\tan x}{\cos x}, \quad \text{wobei} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

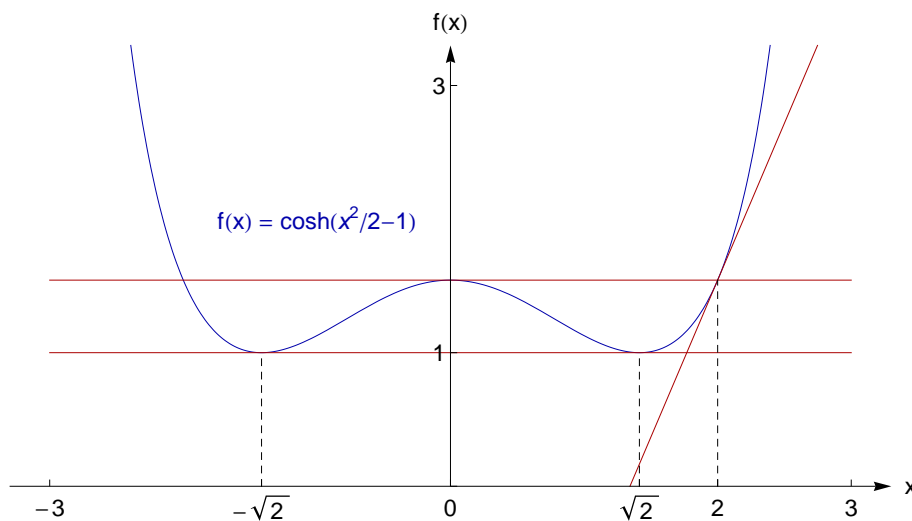
**Aufgabe 4.3.** Grafische Darstellung der Funktion  $f(x)$ 

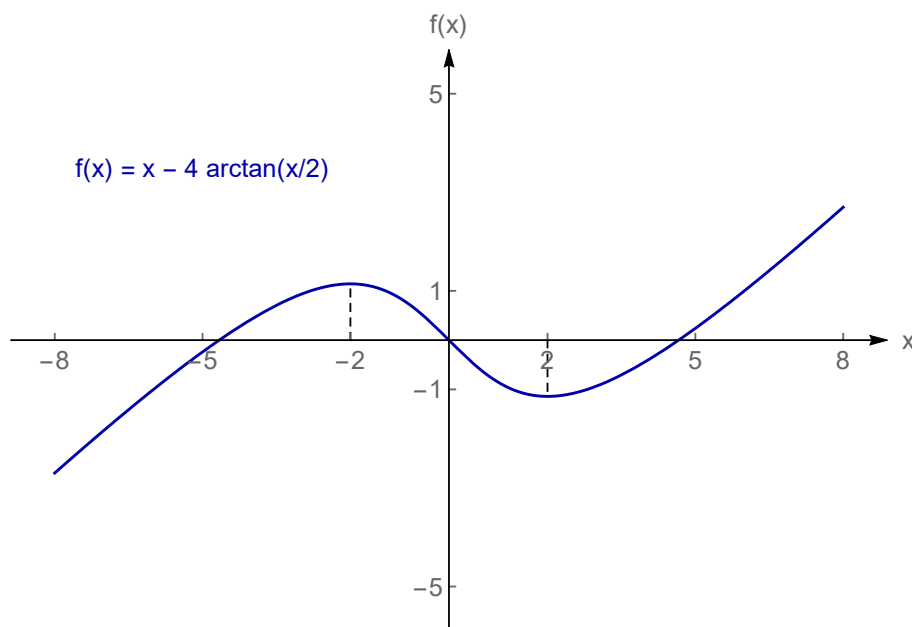
- $D_f = \mathbb{R}$
- Die Funktion  $f(x)$  ist eine ungerade (punktsymmetrische) Funktion.
- Die Funktion  $f(x)$  ist streng monoton wachsend.
- $W_f = (-1, +1)$

**Aufgabe 4.4.**

- Tangente:  $t(x) = ax + b$ , mit  
 $a = 2 \sinh(1) \approx 2,35$  und  $b = \cosh(1) - 4 \sinh(1) \approx -3,15$
- horizontale Tangenten bei:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\sqrt{2}$  und  $x_3 = \sqrt{2}$

Grafische Veranschaulichung



**Aufgabe 4.5.** Grafische Darstellung der Funktion  $f(x)$ 

- a) Die Funktion  $f(x)$  ist streng monoton wachsend für  $x \in (-\infty, -2)$  und  $x \in (2, \infty)$ .  
 Die Funktion  $f(x)$  ist streng monoton fallend für  $x \in (-2, 2)$ .  
 Die Funktion  $f(x)$  ist konvex (linksgekrümmt) für  $x \in (0, \infty)$ .  
 Die Funktion  $f(x)$  ist konkav (rechtsgekrümmt) für  $x \in (-\infty, 0)$ .
- b) Die Funktion  $f(x)$  besitzt ein lokales Maximum an der Stelle  $x = -2$ ,  
 da dort Monotoniewechsel von streng monoton wachsend auf streng monoton fallend.  
 Die Funktion  $f(x)$  besitzt ein lokales Minimum an der Stelle  $x = 2$ ,  
 da dort Monotoniewechsel von streng monoton fallend auf streng monoton wachsend.  
 Die Funktion  $f(x)$  besitzt einen Wendepunkt an der Stelle  $x = 0$ ,  
 da dort das Krümmungsverhalten wechselt.

**Aufgabe 4.6.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$     b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = 1$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = 1$     d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = -1$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = 0$     f)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{x-1}} = e^2$