Themen und Begriffe

- explizite Bildungsvorschrift
- rekursive Bildungsvorschrift
- Monotonie
- Beschränktheit
- Konvergenz
- arithmetische Folgen
- geometrische Folgen

Aufgabe 2.1

Gegeben sei die Folge

$$a_n = \frac{2n-1}{2+n}, \quad n = 1,2,\ldots$$

a) Untersuchen Sie diese Folge auf Monotonie und Beschränktheit.

b) Konvergiert die Folge?

c) Wenn ja: Welche Glieder der Folge liegen außerhalb der ε-Umgebung des Grenzwertes für $\varepsilon = 0{,}1$?

Aufgabe 2.2

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen, falls diese existieren

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{4n^5}{(2n+1)^5}, \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1},$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + n}{n+1}, \qquad \text{d)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(n^2+n\right)}{n^3+1},$$

$$\text{e)}\ \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n^2+n}{n^3+1}\right) \quad \text{und} \quad \text{f)}\ \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{n+1}.$$

Aufgabe 2.3

Für welche Werte des Parameters $p \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge

$$a_n = (2p+1)^n, \quad n = 1,2,\ldots?$$

Welchen Grenzwert hat die Folge in diesem Fall?

Themen und Begriffe

- geometrische Reihen
- Konvergenzkriterien
- Summe einer Reihe

Aufgabe 2.4

Gegeben seien die folgenden Reihen

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-2}}{5^k}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2k}, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{\infty} (1+2^k),$$

$$\text{d)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^{k^2}} \quad \text{und} \quad \text{e)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{5}{3}\right)^{n-2}.$$

- Welche dieser Reihen sind geometrische Reihen?
- Welche der geometrischen Reihen sind konvergent?
- Bestimmen Sie die Grenzwerte der konvergenten geometrischen Reihen.

Aufgabe 2.5

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{1}{k^2}\right\}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3^k}, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2},$$

$$\text{d)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+3^k} \quad \text{und} \quad \text{e)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k(k+1)(k+2)}}.$$

Aufgabe 2.6

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

konvergiert und weisen Sie mit Hilfe der Partialsummenfolge nach, dass die Reihe den Grenzwert 1 besitzt.