Übung „Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler 1“

Studienjahr 2021/22

Dr. Udo Lorz

TU Bergakademie Freiberg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wichtige Links

- Website der Fakultät für Mathematik und Informatik:
  https://tu-freiberg.de/fakult1
- Website des Übungsleiters:
  .../organisation/dekanat/udo-lorz
  Kontaktdaten: Abschnitt Kontakt
  Materialien zur Übung: Abschnitt Wintersemester 2021/22
- Website zum Vorlesung:
  .../studium/studierende/lehrveranstaltungen/hm-nat
  Dort befindet sich auch ein Link auf den OPAL-Kurs zum Modul.

Formelsammlungen

Göhler, W.
Formelsammlung Höhere Mathematik,
Verlag Harri Deutsch, 17. Auflage, 2011,
ISBN 978-3-8171-1881-3, €11,70.

Merziger, G.; Mühlbach, G.; Wille, D.; Wirth, T.
Formeln + Hilfen Höhere Mathematik,
Binomi-Verlag, 6. Auflage, 2010,
ISBN 978-3-923923-36-6, €15,80.

Schwerpunkte

- Quadratische Gleichungen
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- grafische Darstellung von Mengen komplexer Zahlen
- Darstellungsformen komplexer Zahlen
- Transformationen zwischen den Darstellungsformen
- Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen

a) $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0,$

b) $x^2 + 4 = 0$ und

c) $x^2 + 4x + 13 = 0$

in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

Aufgabe 1.2

Gegeben seien $z_1 = 4 - 5\mathbf{i}$ und $z_2 = 4 + \mathbf{i}$. Berechnen Sie

a) $z_1 + z_2,$

b) $z_1 - z_2,$

c) $z_1 \cdot z_2,$

d) $z_1 \cdot \overline{z}_1$ und

e) $z_1 / z_2.$

Aufgabe 1.3

Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen in der GAUSSschen Zahlenebene, die die folgenden Bedingungen erfüllen

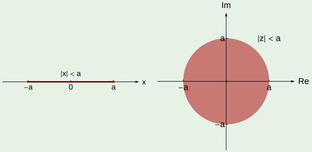
a) $|z| \leq 2,$

b) $|z + 4\mathbf{i} - 3| = 3,$

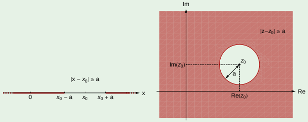
c) $|\operatorname{Re}(z)| + \operatorname{Im}(z) \geq 1$ und $|2z| < 4$ sowie

d) $\operatorname{Im}(z(\mathbf{i} + 1)) \leq 1.$

Beträge in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$



Beträge in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$



Themen und Begriffe

- kartesische, algebraische bzw. arithmetische Form
- polare bzw. trigonometrische Form
- exponentielle Form (EULERsche Formel)

Aufgabe 1.4

Geben Sie den Real- und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ an

a) $z = \dfrac{1}{\mathbf{i}+1}$ und

b) $z = \left(\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right)^6$.

Aufgabe 1.5

Bestimmen Sie Betrag und Argument von

a) $z = \dfrac{3\mathbf{i}}{2e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}}$,

b) $z = 4(\cos(2\alpha) - \mathbf{i}\sin(2\alpha))(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha), \quad \alpha \in (0, 2\pi)$ und

c) $z = -2e^{-\frac{5}{6}\pi\mathbf{i}}$.

Transformation von der polaren bzw. exponentiellen in die kartesische Form

Gegeben: $z \in \mathbb{C}, z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = re^{\mathbf{i}\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Gesucht: $x, y \in \mathbb{R}$ mit $z = x + \mathbf{i}y$.

Transformation:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Aufgabe 1.6

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

a) $z = 4\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)$ und

b) $z = e^{4-\mathbf{i}3{,}5\pi}$.

Transformation von der kartesischen in die polare bzw. exponentielle Form, Variante 1

Gegeben: $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathbf{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}$.
Gesucht: $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = re^{\mathbf{i}\varphi}$.
Transformation:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad y > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{und} \quad y \in \mathbb{R}, \\ \frac{3}{2}\pi & \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad y < 0, \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad y < 0. \end{cases}$$

Hinweis: In einigen Formelsammlungen (z.B. Göhler) wird von $\varphi \in [-\pi, \pi)$ ausgegangen. Daher sind auch andere Formeln für die Berechnung des Arguments $\varphi = \arg(z)$ zu verwenden.

Transformation von der kartesischen in die polare bzw. exponentielle Form, Variante 2

Gegeben: $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathbf{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}$.
Gesucht: $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = re^{\mathbf{i}\varphi}$.
Transformation:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r = 0, \\ \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für} \quad r > 0 \quad \text{und} \quad y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für} \quad r > 0 \quad \text{und} \quad y < 0. \end{cases}$$

Hinweis: In einigen Formelsammlungen (z.B. Göhler) wird von $\varphi \in [-\pi, \pi)$ ausgegangen. Daher sind auch andere Formeln für die Berechnung des Arguments $\varphi = \arg(z)$ zu verwenden.

Aufgabe 1.7

Bestimmen Sie Argument und Betrag der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ und geben Sie z in polarer und exponentieller Form an

a) $z = -2\mathbf{i}$,

b) $z = 1 + \mathbf{i}$,

c) $z = 2(1 - \mathbf{i}\sqrt{3})$,

d) $z = 3\mathbf{i}$,

e) $z = \mathbf{i} - \sqrt{3}$.

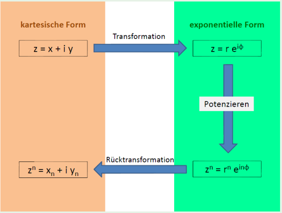
Aufgabe 1.8

Bestimmen Sie die kartesische Form von

a) $z = (2 - \mathbf{i}\sqrt{3})^3$ und

b) $z = (1 - \mathbf{i})^{13}$.

Potenzieren einer komplexen Zahl



Aufgabe 1.9

Bestimmen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$.

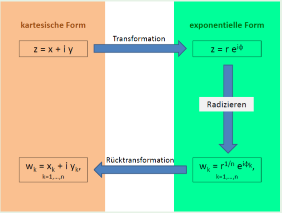
a) $w^4 = \frac{1}{2}(\mathbf{i}\sqrt{3} - 1)$,

b) $\mathbf{i}w^3 = 8$,

c) $w^2 - 2\mathbf{i}w + 8 = 0$ und

d) $(1 - \mathbf{i})^2(w^4 - 2) = (1 + \mathbf{i})^2$.

Radizieren einer komplexen Zahl



Wurzeln komplexer Zahlen

Für gegebenes $z = re^{\mathbf{i}\varphi} \in \mathbb{C}, r = |z| > 0, \varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$, hat die Wurzelgleichung

$$w^n = z, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

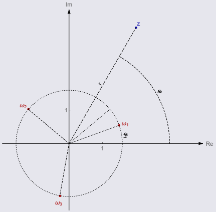
die n Lösungen

$$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathbf{i}\varphi_k} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\varphi_k + \mathbf{i}\sin\varphi_k), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

mit

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{n} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Grafische Veranschaulichung der Wurzeln einer komplexen Zahl ($n = 3$)



Anwendung

Bei Gleichungen der Form

$$(w - z_0)^n = z \tag{2}$$

für gegebene $z, z_0 \in \mathbb{C}, z \neq 0$, und $n = 2, 3, \ldots$ setzt man

$$w_0 := w - z_0$$

und erhält so eine Wurzelgleichung der Form

$$w_0^n = z$$

mit den Lösungen $w_{0,k}, k = 1, \ldots, n$, aus (1). Die Gleichung (2) hat dann die Lösungen

$$w_k = w_{0,k} + z_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Grafische Veranschaulichung zur Anwendung $(n = 3)$