Friedrich-Schiller-Universität Jena
Sektion Mathematik

Wissenschaftsgebiet Stochastik

Grenzwertsätze für den Log-Likelihood-Quotienten POISSONscher Punktprozesse

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplommathematiker

Eingereicht von:
Udo Lorz
geb. am 16.02.1958

Jena, den 5.12.1984

Meinen Eltern gewidmet

Inhaltsverzeichnis

„Ich weiß, daß die Theorie gar nicht grau ist, sondern für jede Kunst die weiten Perspektiven der Freiheit bedeutet. Sie ist die Landkarte für den Wanderer der Kunst, die alle Wege und Möglichkeiten zeigt und was zwingende Notwendigkeit zu sein schien, als einen zufälligen Weg unter hundert anderen entlarvt. Die Theorie ist es, die den Mut zu Kulumbusfahrten gibt und jeden Schritt zu einem Akt freier Wahl macht.[1]*"*

Kapitel 1

Unbegrenzt teilbare Verteilungsgesetze

1.1 Definition und Beispiele

Definition 1.1 Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathfrak{R}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von $\mathbb{R}$. Ein Verteilungsgesetz P auf dem meßbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ heißt **unbegrenzt teilbar**, falls für $n = 1, 2, \ldots$ ein Verteilungsgesetz P_n auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ existiert, so daß gilt

$$P = P_n * P_n * \cdots * P_n,$$

d. h., daß sich P jeweils als n-fache Faltung von P_n mit sich selbst darstellen läßt.

Bemerkung 1.1 Die Definition 1.1 läßt offensichtlich äquivalente Formulierungen zu, die sich auf charakteristische Funktionen bzw. Zufallsgrößen beziehen.
Es ist klar, daß ein Verteilungsgesetz P genau dann unbegrenzt teilbar ist, wenn für $n = 1, 2, \ldots$ jeweils eine charakteristische Funktion $f_n(t)$ existiert, so daß sich die charakteristische Funktion $f(t)$ von P in der Form

$$f(t) = (f_n(t))^n$$

darstellen läßt.

[1] Balasz, Bela: Der sichtbare Mensch oder die Kultur des Films. Deutsch-Österreichischer Verlag, Wien-Leipzig, 1924.

Andererseits ist das Verteilungsgesetz P_X einer Zufallsgrößen X genau dann unbegrenzt teilbar, wenn für $n = 1, 2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen $X_{n,j}, j = 1, \ldots, n$, existieren, so daß gilt:

$$X = X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,n}.$$

Beispiel 1.1 Eine konstante Zufallsgröße $X = a, a \in \mathbb{R}$, besitzt ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz. Ihre charakteristische Funktion $f(t)$ hat die Gestalt:

$$f(t) = \exp(iat).$$

Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$f(t) = \left(\exp\left(i\frac{a}{n}t\right)\right)^n,$$

d. h. X läßt sich stets als Summe von n konstanten Zufallsgrößen

$$X_{n,j} = \frac{a}{n}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

darstellen.

Beispiel 1.2 Die Poisson-Verteilung ist unbegrenzt teilbar. Mit $\Pi(\lambda), \lambda > 0$, wollen wir die Poisson-Verteilung auf $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit dem Parameter λ bezeichnen. Die charakteristische Funktion $f(t)$ hat dann die Gestalt:

$$f(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).$$

Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$f(t) = \left(\exp\left(\frac{\lambda}{n}(\exp(it) - 1)\right)\right)^n,$$

d. h., daß sich eine nach $\Pi(\lambda)$ verteilte Zufallsgröße X stets als Summe von n unabhängigen, identisch nach $\Pi(\frac{\lambda}{n})$ verteilten Zufallsgrößen $X_{n,j}, j = 1, \ldots, n$, darstellen läßt.

Beispiel 1.3 Die Normalverteilung ist unbegrenzt teilbar. Die charakteristische Funktion $f(t)$ einer Normalverteilung $N(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, hat die Gestalt:

$$f(t) = \exp\left(iat - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right).$$

Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$f(t) = \left(\exp\left(i\frac{a}{n}t - \frac{\sigma^2}{2n}t^2\right)\right)^n,$$

d. h. jede normalverteilte Zufallsgröße X mit $M(X) = a$ und $D^2(X) = \sigma^2$ läßt sich als Summe von n unabhängigen, normalverteilten Zufallsgrößen $X_{n,j}$ mit $M(X_{n,j}) = \frac{a}{n}$ und $D^2(X_{n,j}) = \frac{\sigma^2}{n}$, $j = 1, \ldots, n$, darstellen.

1.2 Einige Eigenschaften

Lemma 1.1 *Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsgrößen mit unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetzen. Dann besitzt auch die Summe $X = X_1 + X_2$ ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz.*

Beweis: Es seien $f_i(t)$ die charakteristischen Funktionen der Zufallsgrößen X_i, $i = 1, 2$. Dann existieren für $n = 1, 2, \ldots$ charakteristische Funktionen $f_{i,n}(t)$ mit

$$f_i(t) = (f_{i,n}(t))^n, \quad i = 1, 2.$$

Für die charakteristische Funktion $f(t)$ der Summe X gilt:

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = (f_{1,n}(t) \cdot f_{2,n}(t))^n .$$

Damit ist der Beweis bereits abgeschlossen. □

Lemma 1.2 *Es seien $a \in \mathbb{R}$ und X eine Zufallsgröße mit unbegrenzt teilbarem Verteilungsgesetz. Dann besitzt auch die Zufallsgröße aX ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz.*

Beweis: Mit $f_X(t)$ bzw. $f_{aX}(t)$ wollen wir die charakteristischen Funktionen von X bzw. aX bezeichnen. Für $n = 1, 2, \ldots$ existieren dann unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen $X_{n,j}, j = 1, \ldots, n$, mit der charakteristischen Funktion $f_{X_n}(t)$, so daß gilt;

$$f_X(t) = (f_{X_n}(t))^n .$$

Somit gilt:

$$f_{aX}(t) = f_X(at) = (f_{X_n}(at))^n = (f_{aX_n}(t))^n .$$

□

Folgerung 1.1 Die Eigenschaft einer Zufallsgröße X, eine unbegrenzt teilbare Verteilung zu besitzen, ist gegenüber linearen Transformationen $aX + b, a, b \in \mathbb{R}$, invariant.

Bemerkung 1.2 Für den Beweis der im folgenden aufgeführten Sätze dieses Kapitels sei auf [3] und [4] verwiesen.

Satz 1.1 *Für die charakteristische Funktion $f(t)$ eines unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetzes gilt:*

$$f(t) \neq 0 \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Folgerung 1.2 Für unbegrenzt teilbare Verteilungsgesetze ist der Logarithmus der charakteristischen Funktion stets definiert.

Definition 1.2 Sei $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge endlicher Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$. μ_n **konvergiert** für $n \to \infty$ **schwach** gegen ein endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}) \tag{1.1}$$

und für die Verteilungsfunktionen $F_n(x)$ von μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, bzw. $F(x)$ von μ gilt in jedem Stetigkeitspunkt der Grenzverteilungsfunktion $F(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x). \tag{1.2}$$

Satz 1.2 *Sei $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge unbegrenzt teilbarer Verteilungsgesetze. P_n konvergiere für $n \to \infty$ schwach gegen ein Verteilungsgesetz P. Dann ist das Grenzverteilungsgesetz P wiederum unbegrenzt teilbar.*

1.3 Kanonische Darstellung der charakteristischen Funktion

Satz 1.3 *Eine Funktion $f(t)$ ist genau dann die charakteristische Funktion eines unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetzes, wenn sie in der Form*

$$f(t) = \exp\left(itc + \int_{\mathbb{R}} g(t,x)\, G(dx) \right) \tag{1.3}$$

darstellbar ist, wobei $c \in \mathbb{R}$,

$$g(t,x) \;=\; \left(\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}$$

mit

$$g(t,0) := -\frac{t^2}{2}$$

und G ein endliches Maß ist. Die Darstellung von $f(t)$ durch die Formel (1.3) ist eindeutig.

Bemerkung 1.3 Die Gleichung (1.3) wird als Levi-Chintschin-Formel bezeichnet. Das endliche Maß G heißt kanonisches Maß.

Beispiel 1.4 Für die in den Beispielen 1.1 bis 1.3 angeführten unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetze ergeben sich für die Levi-Chintschin-Formel die folgenden Beziehungen:

Beispiel 1.1: $c = a, \quad G(B) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{R}$, d. h. G ist das Nullmaß,

Beispiel 1.2: $c = \frac{\lambda}{2}, \quad G(B) = \frac{\lambda}{2} \cdot \delta_1(B)$ und

Beispiel 1.3: $c = a, \quad G(B) = \sigma^2 \cdot \delta_0(B)$.

Satz 1.4 *Es sei X eine Zufallsgröße mit $M\,(X^2) < \infty$. X besitzt genau dann ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz, wenn ihre charakteristische Funktion $f(t)$ in der Form*

$$f(t) = \exp\left(itc' + \int\limits_{\mathbb{R}} k(t,x)\,K(dx) \right) \tag{1.4}$$

darstellbar ist, wobei $c' \in \mathbb{R}$,

$$k(t,x) \;= (\exp(itx) - 1 - itx)\,\frac{1}{x^2} \tag{1.5}$$

mit

$$k(t,0) := -\frac{t^2}{2} \tag{1.6}$$

und K ein endliches Maß ist. Die Darstellung von $f(t)$ durch die Formel (1.4) ist eindeutig.

Bemerkung 1.4 Die Gleichung (1.4) heißt Kolmogoroff-Formel. Das endliche Maß K wird wiederum als kanonisches Maß bezeichnet.

Der Satz 1.4 folgt unmittelbar aus dem Satz 1.3. Das kanonische Maß K aus der Kolmogoroff-Formel (1.4) berechnet sich dabei durch

$$K(B) = \int\limits_B (1 + x^2)\,G(dx) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R} \tag{1.7}$$

aus dem kanonischen Maß G der Levi-Chintschin-Formel (1.3). Die folgenden Sachverhalte sind noch bemerkenswert:

$$c' = M(X) \qquad \text{und} \qquad K(\mathbb{R}) = D^2(X). \tag{1.8}$$

Beispiel 1.5 Bzgl. der Kolmogoroff-Formel ergeben sich für die in den Beispielen 1.1 bis 1.3 angeführten unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetze die folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{lll} \text{Beispiel 1.1:} & c' = a, & K(B) = 0 \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}, \\ \text{Beispiel 1.2:} & c' = \lambda, & K(B) = \lambda \cdot \delta_1(B) \quad \text{und} \\ \text{Beispiel 1.3:} & c' = a, & K(B) = \sigma^2 \cdot \delta_0(B). \end{array}$$

Bemerkung 1.5 Oftmals wird in Abwandlung der Levi-Chintschin-Formel die folgende Darstellung verwendet:

$$f(t) = \exp\left(itc'' - \frac{t^2}{2}d + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x)\,H(dx) \right). \tag{1.9}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} c'' &= c, \\ d &= G(\{0\}), \\ h(t,x) &= \left(\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \quad \text{und} \\ H(B) &= \int\limits_B \frac{1+x^2}{x^2}\, G'(dx) \quad \text{mit} \quad G'(B) = G(B \setminus \{0\}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Das Maß H wird ebenfalls als kanonisches Maß bezeichnet.

Beispiel 1.6 Für die bereits mehrfach betrachteten Beispiele 1.1 bis 1.3 ergeben sich für die Formel (1.9) die Beziehungen:

$$\begin{array}{lllll} \text{Beispiel 1.1:} & c'' = a, & d = 0, & H(B) = 0 & \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}, \\ \text{Beispiel 1.2:} & c'' = \dfrac{\lambda}{2}, & d = 0, & H(B) = \dfrac{\lambda}{2} \cdot \delta_1(B) & \text{und} \\ \text{Beispiel 1.3:} & c'' = a, & d = \sigma^2, & H(B) = 0 & \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}. \end{array}$$

1.4 Grenzwertsätze

Satz 1.5 *Für die schwache Konvergenz einer Folge $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ unbegrenzt teilbarer Verteilungsgesetze gegen ein Grenzverteilungsgesetz P ist notwendig und hinreichend, daß gilt:*

$$G_n \textit{ konvergiert für } n \to \infty \textit{ schwach gegen } G, \tag{1.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c. \tag{1.12}$$

Die Konstanten c und c_n sowie die kanonischen Maße G und G_n sind dabei durch die Levi-Chintschin-*Formel (1.3) für die charakteristischen Funktionen $f(t)$ und $f_n(t)$ der unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetze P und P_n, $n = 1, 2, \ldots$, definiert.*

Bemerkung 1.6 Nach Satz 1.2 ist das Grenzverteilungsgesetz P unbegrenzt teilbar.

Satz 1.6 *Sei* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von Zufallsgrößen mit* $M(X_n^2) < \infty$*, die ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz besitzen.* X *sei eine weitere Zufallsgröße mit* $M(X^2) < \infty$*. Für die schwache Konvergenz der unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetze* P_n *der Zufallsgrößen* X_n *gegen das Verteilungsgesetz* P *der Zufallsgrößen* X *und die Konvergenz der Varianzen* $D^2(X_n)$ *gegen die Varianz* $D^2(X)$ *für* $n \to \infty$ *sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

$$K_n \text{ konvergiert für } n \to \infty \text{ schwach gegen } K, \tag{1.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n' = c'. \tag{1.14}$$

Die Konstanten c' *und* c_n' *sowie die kanonischen Maße* K *und* K_n *sind dabei durch die* Kolmogoroff*-Formel (1.4) für die charakteristischen Funktionen* $f(t)$ *und* $f_n(t)$ *der unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetze* P *und* P_n*,* $n = 1, 2, \ldots$*, definiert.*

„Die Mathematik ist Tapferkeitsluxus der reinen Ratio, einen der wenigen, die es heute gibt.[2]*“*

Kapitel 2

Grenzwertsätze für den Log-Likelihood-Quotienten POISSONscher Punktprozesse

2.1 Definitionen und Vorbereitungen

Definition 2.1 Es sei (X, d) ein vollständiger separabler metrischer Raum und $\mathfrak{X}$ die σ-Algebra der BOREL-Mengen von X. Mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir den Ring der beschränkten Mengen $B \in \mathfrak{X}$. N sei die Menge aller Maße auf dem meßbaren Raum $(X, \mathfrak{X})$, die auf $\mathfrak{B}$ endlich sind. Mit M bezeichnen wir die Menge der ganzzahligen Maße $\varphi \in N$. Weiterhin sei:

$$\mathfrak{M} = \sigma\left(\left\{\left\{\varphi \in M : \varphi(B) = k\right\}, k \in \mathbb{N}, B \in \mathfrak{B}\right\}\right), \tag{2.1}$$

d. h. $\mathfrak{M}$ ist die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von M, so daß für alle $B \in \mathfrak{B}$ die Projektionen

$$\pi_B : M \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \pi_B(\varphi) = \varphi(B) \tag{2.2}$$

meßbar sind.
P sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$. Dann heißt der Wahrscheinlichkeitsraum $(M, \mathfrak{M}, P)$ **Punktprozeß**. Der meßbare Raum $(X, \mathfrak{X})$ heißt **Phasenraum** des Punktprozesses $(M, \mathfrak{M}, P)$.

[2] MUSIL, ROBERT: Der mathematische Mensch.
In: Essays Reden Kritiken, Verlag Volk und Welt, Berlin, 1984.

Definition 2.2 Es seien $(M, \mathfrak{M}, P_\Lambda)$ ein Punktprozeß mit dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$ und $\Lambda \in N$. Der Punktprozeß $(M, \mathfrak{M}, P_\Lambda)$ heißt **POISSONscher Punktprozeß mit dem Intensitätsmaß** Λ, falls gilt:

- für jedes $B \in \mathfrak{B}$ ist π_B eine POISSON-verteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $\Lambda(B)$,
- für $n = 1, 2, \ldots$ und für beliebige disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$ sind die Zufallsgrößen
$$\pi_{B_1}, \ldots, \pi_{B_n}$$
unabhängig.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_Λ heißt **POISSONsches Verteilungsgesetz mit dem Intensitätsmaß** Λ.

Definition 2.3 Seien μ und ν σ-endliche Maße auf einem meßbaren Raum $(A, \mathfrak{A})$. μ und ν seien äquivalent ($\mu \sim \nu$), d. h. für $B \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu(B) = 0$ genau dann, wenn $\nu(B) = 0$. Dann wird die ν-fast überall definierte Zufallsgröße

$$L : (A, \mathfrak{A}, \nu) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \quad \text{mit} \quad L(a) = \ln \frac{d\mu}{d\nu}(a) \tag{2.3}$$

als **Log-Likelihood-Quotient** von μ und ν bezeichnet.

Bemerkung 2.1 Alle $\Lambda \in N$ sind σ-endlich.

Satz 2.1 *Zwei* POISSON*sche Verteilungsgesetze* P_{Λ_1} *und* P_{Λ_2} *auf* $(M, \mathfrak{M})$ *sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen Intensitätsmaße* Λ_1 *und* Λ_2 *auf dem Phasenraum* $(X, \mathfrak{X})$*äquivalent sind und gilt:*

$$\int\limits_X \left(1 - \sqrt{q(x)}\right)^2 \Lambda_2(dx) < \infty, \quad \textit{wobei} \tag{2.4}$$

$$q(x) = \frac{d\Lambda_1}{d\Lambda_2}(x). \tag{2.5}$$

Bemerkung 2.2 Für den Beweis dieses Satzes sei auf [5] verwiesen.

Folgerung 2.1 Setzen wir äquivalente POISSONsche Verteilungsgesetze P_{Λ_1} und P_{Λ_2} voraus, so ist mit dem Log-Likelihood-Quotient L (2.3) von P_{Λ_1} und P_{Λ_2} auch stets der Log-Likelihood-Quotient

$$l : (X, \mathfrak{X}, \Lambda_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{R})$$

von Λ_1 und Λ_2 mit

$$l(x) = \ln q(x) \tag{2.6}$$

(vgl. (2.5)) Λ_2-fast überall definiert.

Satz 2.2 *Es seien P_{Λ_1} und P_{Λ_2} zwei äquivalente* POISSON*sche Verteilungsgesetze auf $(M, \mathfrak{M})$ mit den Intensitätsmaße Λ_1 und Λ_2 auf dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$. Dann besitzt der Log-Likelihood-Quotient L (2.3) von P_{Λ_1} und P_{Λ_2} ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz und für die charakteristische Funktion $f(t)$ gilt bezüglich (1.9)*

$$f(t) = \exp\left(itc'' + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x)\, H(dx) \right) \quad \textit{mit} \tag{2.7}$$

$$c'' = \int\limits_X \left(\frac{l(x)}{1 + l^2(x)} + 1 - q(x) \right) \Lambda_2(dx) \quad \textit{und} \tag{2.8}$$

$$H(B) = \int\limits_X I_B(l(x))\, \Lambda_2(dx) \quad \textit{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}, \tag{2.9}$$

wobei $q(x)$ und $l(x)$ die durch (2.5) und (2.6) definierten Funktionen bezeichnen.

Bemerkung 2.3 Für den Beweis dieses Satzes sei auf [6] verwiesen.

Folgerung 2.2 Aus (2.7) wird ersichtlich, daß in (1.9) $d = 0$ gilt und somit (vgl. Beispiel 1.6) der Log-Likelihood-Quotient L äquivalenter POISSONscher Verteilungsgesetze P_{Λ_1} und P_{Λ_2} auf $(M, \mathfrak{M})$ nicht normalverteilt sein kann. Insbesondere gilt in (1.10)

$$G'(B) = G(B) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}$$

und das kanonische Maß G aus der LEVI-CHINTSCHIN-Formel (1.3) berechnet sich für alle $B \in \mathfrak{R}$ durch:

$$\begin{aligned} G(B) &= \int\limits_B \frac{x^2}{1+x^2}\, H(dx) \\ &= \int\limits_X I_B(l(x)) \frac{l^2(x)}{1 + l^2(x)}\, \Lambda_2(dx). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Definition 2.4 Seien $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Zufallsgrößen und $a \in \mathbb{R}$. Für $n = 1, 2, \ldots$ sei P_n das Verteilungsgesetz von X_n. X_n **konvergiert** für $n \to \infty$ **in Wahrscheinlichkeit** gegen a, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} P_n\left(\{x \in \mathbb{R} : |x - a| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

2.2 Ein schwaches Gesetz der großen Zahlen

Satz 2.3 *Es seien* $\left\{(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{i,n}})\right\}_{n=1}^{\infty}, i = 1,2$, *zwei Folgen* POISSON*scher Punktprozesse mit den Intensitätsmaßen* $\Lambda_{i,n}$ *auf den Phasenräumen* $(X_n, \mathfrak{X}_n)$, $n = 1,2,\ldots$, *und* $a \in \mathbb{R}$. *Für* $n = 1,2,\ldots$ *gelte:*

$$P_{\Lambda_{1,n}} \sim P_{\Lambda_{2,n}} \quad \textit{und}$$

$$\Lambda_{2,n}(X_n) < \infty. \tag{2.11}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß für reelle Zahlen $a_n, a_n \neq 0$, $n = 1,2,\ldots$, L_n/a_n *für* $n \to \infty$ *in Wahrscheinlichkeit gegen* a *konvergiert, ist, daß gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} \frac{l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx) = 0 \quad \textit{und} \tag{2.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \int\limits_{X_n} \left(\frac{a_n^2 l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)} + 1 - q_n(x) \right) \Lambda_{2,n}(dx) = a. \tag{2.13}$$

Dabei bezeichnen L_n, q_n *und* l_n *für* $n = 1,2,\ldots$ *die analog zu (2.3), (2.5) und (2.6) definierten Funktionen.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß das Verteilungsgesetz von L_n/a_n für $n \to \infty$ schwach gegen δ_a konvergiert.
Nach Satz 2.2 besitzen die Log-Likelihood-Quotienten L_n von $P_{\Lambda_{1,n}}$ und $P_{\Lambda_{2,n}}$ für $n = 1,2,\ldots$ ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz und für die charakteristischen Funktionen $f_{L_n}(t)$ gilt:

$$f_{L_n}(t) = \exp\left(itc_n'' + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x)\, H_n(dx) \right) \quad \text{mit} \tag{2.14}$$

$$c_n'' = \int\limits_{X_n} \left(\frac{l_n(x)}{1 + l_n^2(x)} + 1 - q_n(x) \right) \Lambda_{2,n}(dx) \quad \text{und} \tag{2.15}$$

$$H_n(B) = \int\limits_{X_n} I_B(l_n(x))\, \Lambda_{2,n}(dx) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}. \tag{2.16}$$

Für $n = 1,2,\ldots$ und $y > 0$ gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{yx}{y + x^2} \right| H_n(dx) \leq \int\limits_{\{|x| \leq 1\}} \frac{y|x|}{y + x^2}\, H_n(dx) + \int\limits_{\{|x| > 1\}} \frac{yx^2}{y + x^2}\, H_n(dx)$$

$$\leq (1 + y)\, H_n(\mathbb{R}) = (1 + y)\, \Lambda_{2,n}(X_n) < \infty.$$

Damit können wir für $n = 1, 2, \ldots$

$$r_n := \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{a_n^2 x}{a_n^2 + x^2} - \frac{x}{1 + x^2} \right) H_n(dx) \tag{2.17}$$

setzen. Für die charakteristische Funktion von L_n/a_n, $n = 1, 2, \ldots$, gilt:

$$\begin{aligned} f_{L_n/a_n}(t) = f_{L_n}\left(\frac{t}{a_n}\right) &= \exp\left(it\frac{c_n''}{a_n} + \int\limits_{\mathbb{R}} h\left(\frac{t}{a_n}, x\right) H_n(dx) \right) \\ &= \exp\left(it\frac{c_n''}{a_n} + \int\limits_{\mathbb{R}} h\left(t, \frac{x}{a_n}\right) + \frac{it}{a_n}\left(\frac{a_n^2 x}{a_n^2 + x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) H_n(dx) \right) \\ &= \exp\left(it\frac{c_n'' + r_n}{a_n} + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x)\, \overline{H}_n(dx) \right) \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$\overline{H}_n(B) = \int\limits_{X_n} I_B\left(\frac{l_n(x)}{a_n}\right) \Lambda_{2,n}(dx). \tag{2.18}$$

Wir wollen nun zur kanonischen Darstellung der charakteristischen Funktion von L_n/a_n, $n = 1, 2, \ldots$, durch die Levi-Chintschin-Formel (1.3) übergehen. Es gilt:

$$f_{L_n/a_n}(t) = \exp\left(it\frac{c_n'' + r_n}{a_n} + \int\limits_{\mathbb{R}} g(t,x)\, G_n(dx) \right),$$

wobei sich das kanonische Maß G_n für $n = 1, 2, \ldots$ analog zu (2.10) aus den Maßen $\overline{H}_n$ berechnen. Da

$$G_n(\mathbb{R}) = \int\limits_{X_n} \frac{l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)} \Lambda_{2,n}(dx)$$

stellen wir fest, daß die Voraussetzung (2.12) gerade die schwache Konvergenz der kanonischen Maße G_n für $n \to \infty$ gegen das Nullmaß bedeutet. Damit ist die Voraussetzung (1.11) des Satzes 1.5 erfüllt (vgl. Beispiel 1.4). Außerdem ist

$$c_n'' + r_n = \int\limits_{X_n} \left(\frac{a_n^2 l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)} + 1 - q_n(x) \right) \Lambda_{2,n}(dx)$$

und somit nach (2.13) die Voraussetzung (1.12) des Satzes 1.5 erfüllt. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Lemma 2.1 *Seien P_{Λ_1} und P_{Λ_2} zwei äquivalente* POISSON*sche Verteilungsgesetze auf $(M,\mathfrak{M})$ mit den Intensitätsmaße Λ_1 und Λ_2 auf dem Phasenraum $(X,\mathfrak{X})$ und es gelte:*

$$M_{\Lambda_2}\left(L^2\right) < \infty.$$

Dann gilt für die charakteristische Funktion $f(t)$ von L bezüglich der KOLMOGOROFF*-Formel (1.4):*

$$f(t) = \exp\left(itc' + \int\limits_{\mathbb{R}} k(t,x)\, K(dx)\right) \quad \textit{mit} \tag{2.19}$$

$$c' = \int\limits_X (l(x) + 1 - q(x))\, \Lambda_2(dx) \quad \textit{und} \tag{2.20}$$

$$K(B) = \int\limits_X I_B(l(x))\, l^2(x)\, \Lambda_2(dx) \quad \textit{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}. \tag{2.21}$$

Beweis: Für die charakteristische Funktion $f(t)$ von L gilt (2.7) mit (2.8) und (2.9). Sei $B \in \mathfrak{B}$. Nach (1.7) und Folgerung 2.2 gilt:

$$K(B) = \int\limits_B x^2\, H(dx) = \int\limits_X I_B(l(x))\, l^2(x)\, \Lambda_2(dx).$$

Aufgrund von (1.8) gilt insbesondere:

$$D^2_{\Lambda_2}(L) = \int\limits_X l^2(x)\, \Lambda_2(dx). \tag{2.22}$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} \left| x - \frac{x}{1+x^2} \right| H(dx) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2}\, x^2\, H(dx) \\
&\leq \int\limits_{\{|x|\leq 1\}} \frac{1}{1+x^2}\, x^2\, H(dx) + \int\limits_{\{|x|>1\}} \frac{x^2}{1+x^2}\, x^2\, H(dx) \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}} x^2\, H(dx) = D^2_{\Lambda_2}(L) < \infty.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$c'' + \int\limits_{\mathbb{R}} x - \frac{x}{1+x^2}\, H(dx) = c'$$

und für die charakteristische Funktion $f(t)$ von L gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp\left(itc'' + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x)\, H(dx) \right) \\ &= \exp\left(itc'' + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(k(t,x)\, x^2 + it \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) \right) H(dx) \right) \\ &= \exp\left(itc' + \int\limits_{\mathbb{R}} k(t,x)\, K(dx) \right). \end{aligned}$$

□

Satz 2.4 *Seien* $\left\{(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{i,n}})\right\}_{n=1}^{\infty}, i = 1, 2,$ *zwei Folgen* POISSON*scher Punktprozesse mit den Intensitätsmaßen* $\Lambda_{i,n}$ *auf den Phasenräumen* $(X_n, \mathfrak{X}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ *und* $a \in \mathbb{R}$*. Für* $n = 1, 2, \ldots$ *gelte:*

$$P_{\Lambda_{1,n}} \sim P_{\Lambda_{2,n}} \quad \textit{und}$$

$$\int\limits_{X_n} l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) < \infty. \tag{2.23}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß für reelle Zahlen $a_n, a_n \neq 0$*,* $n = 1, 2, \ldots$*,* L_n/a_n *für* $n \to \infty$ *in Wahrscheinlichkeit gegen a und die Varianzen von* L_n/a_n *für* $n \to \infty$ *gegen Null konvergieren, ist, daß gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2} \int\limits_{X_n} l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) = 0 \quad \textit{und} \tag{2.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \int\limits_{X_n} \left(l_n(x) + 1 - q_n(x)\right)\, \Lambda_{2,n}(dx) = a. \tag{2.25}$$

Dabei bezeichnen L_n, q_n *und* l_n *für* $n = 1, 2, \ldots$ *die analog zu (2.3), (2.5) und (2.6) definierten Funktionen.*

Beweis: Analog zum Beweis des Satzes 2.3 genügt es zu zeigen, daß das Verteilungsgesetz von L_n/a_n für $n \to \infty$ schwach gegen δ_a konvergiert. Nach Satz 2.2 besitzen die Log-Likelihood-Quotienten L_n von $P_{\Lambda_{1,n}}$ und $P_{\Lambda_{2,n}}$ für $n = 1, 2, \ldots$ wiederum ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz. Die Voraussetzung (2.23) sichert nach (2.22) für $n = 1, 2, \ldots$ die Existenz der zweiten Momente von L_n, so daß für die charakteristischen Funktionen $f_{L_n}(t)$ (2.19) mit (2.20) und (2.21) gilt.

Für die charakteristische Funktion von L_n/a_n gilt für $n = 1, 2, \ldots$:

$$
\begin{aligned}
f_{L_n/a_n}(t) = f_{L_n}\left(\frac{t}{a_n}\right) &= \exp\left(it\frac{c_n'}{a_n} + \int\limits_{\mathbb{R}} k\left(\frac{t}{a_n}, x\right) K_n(dx)\right) \\
&= \exp\left(it\frac{c_n'}{a_n} + \int\limits_{\mathbb{R}} k\left(t, \frac{x}{a_n}\right) \frac{1}{a_n^2} K_n(dx)\right) \\
&= \exp\left(it\frac{c_n'}{a_n} + \int\limits_{\mathbb{R}} k(t,x)\, \overline{K}_n(dx)\right) \quad \text{mit} \\
\overline{K}_n(B) = \frac{1}{a_n^2} \int\limits_{X_n} I_B\left(\frac{l_n(x)}{a_n}\right) l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) & \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}.
\end{aligned}
$$

Nach (1.14) und (1.13) gilt es zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n'}{a_n} = a$$

und $\overline{K}_n$ für $n \to \infty$ schwach gegen das Nullmaß konvergiert. Die Voraussetzungen (2.24) und (2.25) liefern jedoch gerade das Geforderte. □

Bemerkung 2.4 Nach (1.8) bzw. (2.22) sind die Voraussetzungen (2.24) und (2.25) gleichbedeutend mit

$$\lim_{n\to\infty} D^2_{\Lambda_{2,n}}\left(\frac{L_n}{a_n}\right) = 0 \quad \text{und} \tag{2.26}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{\Lambda_{2,n}}\left(\frac{L_n}{a_n}\right) = a. \tag{2.27}$$

Unter diesen Bedingungen gilt – ganz abgesehen von der Tatsache, daß die Log-Likelihood-Quotienten L_n für $n = 1, 2, \ldots$ ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz besitzen –, daß

$$\lim_{n\to\infty} M_{\Lambda_{2,n}}\left(\frac{L_n}{a_n} - a\right)^2 = 0, \tag{2.28}$$

da (2.28) aufgrund von

$$M_{\Lambda_{2,n}}\left(\frac{L_n}{a_n} - a\right)^2 = D^2_{\Lambda_{2,n}}\left(\frac{L_n}{a_n}\right) + \left(M_{\Lambda_{2,n}}\left(\frac{L_n}{a_n}\right) - a\right)^2$$

unmittelbar aus (2.26) und (2.27) folgt. Aus (2.28) folgt insbesondere, daß L_n/a_n für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen a konvergiert.

Definition 2.5 Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum $(A, \mathfrak{A})$. Für $\alpha \in (0,1)$ setzen wir:

$$\beta(\alpha) := \inf \{Q(B^c) : B \in \mathfrak{A}, P(B) \leq \alpha\}. \tag{2.29}$$

Bemerkung 2.5 In der Testtheorie bezeichnet (2.29) in der Klasse der nicht randomisierten Tests den minimalen Fehler zweiter Art zum Niveau α, $\alpha \in (0,1)$, falls die Nullhypothese H_0 gleich P und die Alternativhypothese H_1 gleich Q gesetzt werden.

Satz 2.5 *Für $n = 1, 2, \ldots$ seien P_n und Q_n jeweils äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf den meßbaren Räumen $(A_n, \mathfrak{A}_n)$ und L_n die Log-Likelihood-Quotienten (2.3) von P_n und Q_n. Für eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (0, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und ein $b \in \mathbb{R}$ konvergiere L_n/a_n für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $-b$. Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \beta_n(\alpha)}{a_n} = -b, \quad \textit{d. h.}$$

$$\beta_n(\alpha) = \exp\left(-a_n \cdot b(1 + o(1))\right) \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Beweis: Die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von L_n/a_n für $n \to \infty$ gegen $-b$ bedeutet, daß für jedes $c > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} Q_n\left(\left\{x \in A_n : \left|\frac{L_n(x)}{a_n} + b\right| > c\right\}\right) = 0.$$

Da für $n = 1, 2, \ldots$ L_n bezüglich Q_n die gleiche Verteilung wie

$$-L_n(x) = \ln \frac{dQ_n}{dP_n}(x) \tag{2.30}$$

bezüglich P_n besitzt, gilt also für alle $c > 0$ auch

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left\{x \in A_n : \left|\frac{L_n(x)}{a_n} - b\right| > c\right\}\right) = 0. \tag{2.31}$$

Für beliebiges $c > 0$ setzen wir für $n = 1, 2, \ldots$

$$B_{n,c} := \left\{x \in A_n : \left|\frac{L_n(x)}{a_n} - b\right| \leq c\right\}.$$

Für jedes $x \in B_{n,c}$ gilt also:

$$a_n(b - c) \leq L_n(x) \leq a_n(b + c). \tag{2.32}$$

Nach (2.31) gibt es zu jedem $c > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(c, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$P_n(B_{n,c}^c) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n(c, \varepsilon).$$

Für ein beliebiges $\alpha \in (0,1)$ wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\varepsilon \leq \alpha \quad \text{und} \quad \varepsilon < 1 - \alpha. \tag{2.33}$$

Dann gilt für alle $n \geq n(c,\varepsilon)$

$$P_n(B_{n,c}^c) \leq \alpha$$

und nach (2.29), (2.30) und (2.32)

$$\begin{aligned}
\beta_n(\alpha) &\leq Q_n(B_{n,c}) \\
&= \int\limits_{B_{n,c}} \exp(-L_n(x))\, P_n(dx) \\
&\leq \int\limits_{B_{n,c}} \exp(a_n(c-b))\, P_n(dx) \\
&\leq \exp(a_n(c-b)).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß:

$$\liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{\ln \beta_n(\alpha)}{a_n}\right) \geq b - c. \tag{2.34}$$

Sei nun $B \in \mathfrak{A}_n$ mit $P_n(B) \leq \alpha$ beliebig. Nach (2.30) und (2.32) gilt dann:

$$\begin{aligned}
Q_n(B^c) &\geq Q_n(B^c \cap B_{n,c}) \\
&= \int\limits_{B^c \cap B_{n,c}} \exp(-L_n(x))\, P_n(dx) \\
&\geq \int\limits_{B^c \cap B_{n,c}} \exp(-a_n(b+c))\, P_n(dx) \\
&= \exp(-a_n(b+c))\ P_n(B^c \cap B_{n,c}).
\end{aligned}$$

Aufgrund von

$$P_n(B^c \cap B_{n,c}) + P_n(B \cap B_{n,c}) = P_n(B_{n,c})$$

und (2.33) erhalten wir:

$$P_n(B^c \cap B_{n,c}) \geq 1 - \varepsilon - \alpha > 0.$$

Da $B \in \mathfrak{A}_n$ mit $P_n(B) \leq \alpha$ beliebig gewählt war, gilt auch

$$\beta_n(\alpha) \geq \exp(-a_n(b+c))\ (1 - \varepsilon - \alpha)$$

und mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(-\frac{\ln \beta_n(\alpha)}{a_n}\right) \leq b + c. \tag{2.35}$$

Da wir $\alpha \in (0,1)$ und $c > 0$ unabhängig voneinander gewählt haben und (2.34) und (2.35) für alle $c > 0$ gelten, folgt die Behauptung. $\square$

2.3 Ein zentraler Grenzwertsatz

Satz 2.6 *Es seien* $\left\{(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{i,n}})\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1,2$, *zwei Folgen* POISSON*scher Punktprozesse mit den Intensitätsmaßen* $\Lambda_{i,n}$ *auf den Phasenräumen* $(X_n, \mathfrak{X}_n)$, $n = 1,2,\ldots$ *Für* $n = 1,2,\ldots$ *gelte:*

$$P_{\Lambda_{1,n}} \sim P_{\Lambda_{2,n}} \quad \textit{und}$$

$$\Lambda_{2,n}(X_n) < \infty. \tag{2.36}$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz reeller Zahlen a_n *und* $b_n, b_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$, *so daß das Verteilungsgesetz von* $(L_n - a_n)/b_n$ *für* $n \to \infty$ *schwach gegen die Standard-Normalverteilung* $N(0,1)$ *konvergiert, ist die Existenz reeller Zahlen* $v_n, v_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$, *für die gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} \frac{l_n^2(x)}{v_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx) = 1 \quad \textit{und} \tag{2.37}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{x\in X_n:\ l_n(x)<yv_n\}} \frac{l_n^2(x)}{v_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx) = \begin{cases} 0, & \textit{für} \quad y < 0, \\ 1, & \textit{für} \quad y > 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Für $n = 1,2,\ldots$ *sind die Zufallsgrößen* L_n *und* l_n *wiederum analog zu (2.3) bzw. (2.6) definiert.*

Beweis: Wir verfahren analog zum Beweis des Satzes 2.3. Für die charakteristischen Funktionen der Log-Likelihood-Quotienten L_n von $P_{\Lambda_{1,n}}$ und $P_{\Lambda_{2,n}}$ gilt für $n = 1,2,\ldots$ (2.14) mit (2.15) und (2.16). Voraussetzung (2.36) sichert analog zu (2.11) für $n = 1,2,\ldots$ die Existenz der Größen (vgl. (2.17)):

$$w_n := \int\limits_{X_n} \frac{v_n^2 x}{v_n^2 + x^2} - \frac{x}{1+x^2}\, H_n(dx).$$

Wir setzen für $n = 1,2,\ldots$

$$a_n := c_n'' + w_n \quad \text{und} \quad b_n := v_n.$$

Für die charakteristischen Funktionen von $L_n - a_n$ bzw. $(L_n - a_n)/b_n$ gilt somit für $n = 1,2,\ldots$:

$$f_{L_n - a_n}(t) = \exp\left(-itw_n + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x)\, H_n(dx)\right) \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} f_{(L_n-a_n)/b_n}(t) &= \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x)\, \overline{H}_n(dx)\right) \\ &= \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(t,x)\, G_n(dx)\right), \end{aligned}$$

wobei die Maße $\overline{H}_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ durch (2.18) definiert sind. Die kanonischen Maße G_n berechnen sich für $n = 1, 2, \ldots$ für alle $B \in \mathfrak{R}$ durch

$$G_n(B) = \int\limits_{X_n} I_B\left(\frac{l_n(x)}{v_n}\right) \frac{l_n^2(x)}{v_n^2 + l_n^2(x)} \Lambda_{2,n}(dx). \tag{2.39}$$

Die Voraussetzung (1.12) des Satzes 1.5 ist hier trivialerweise erfüllt (vgl. Beispiel 1.4). Es genügt also zu zeigen, daß die kanonischen Maße G_n für $n \to \infty$ schwach gegen δ_0 konvergieren. Dazu ist entsprechend (1.1) und (1.2) zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} G_n(\mathbb{R}) = 1 \quad \text{und} \tag{2.40}$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n((-\infty, x)) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x < 0, \\ 1, & \text{für} \quad x > 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Aufgrund von (2.39) sind die Voraussetzungen (2.37) und (2.38) gleichbedeutend mit (2.40) und (2.41). Das vervollständigt den Beweis. □

Satz 2.7 *Es seien* $\left\{(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{i,n}})\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, *zwei Folgen* POISSON*scher Punktprozesse mit den Intensitätsmaßen* $\Lambda_{i,n}$ *auf den Phasenräumen* $(X_n, \mathfrak{X}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ *Für* $n = 1, 2, \ldots$ *gelte:*

$$P_{\Lambda_{1,n}} \sim P_{\Lambda_{2,n}} \quad \textit{und}$$

$$v_n^2 := \int\limits_{X_n} l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) < \infty. \tag{2.42}$$

Dann ist für die Existenz reeller Zahlen a_n *und* $b_n, b_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *so daß das Verteilungsgesetz von* $(L_n - a_n)/b_n$ *für* $n \to \infty$ *schwach gegen die Standard-Normalverteilung* $N(0, 1)$ *und die Varianzen von* $(L_n - a_n)/b_n$ *für* $n \to \infty$ *gegen Eins konvergieren, notwendig und hinreichend, daß für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n^2} \int\limits_{\{x \in X_n:\ |l_n(x)| > \varepsilon v_n\}} l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) = 0. \tag{2.43}$$

Dabei sind die Zufallsgrößen L_n *und* l_n *für* $n = 1, 2, \ldots$ *analog zu (2.3) bzw. (2.6) definiert.*

Beweis: Wir verfahren analog zum Beweis des Satzes 2.4. Nach Satz 2.2 besitzen die Log-Likelihood-Quotienten L_n von $P_{\Lambda_{1,n}}$ und $P_{\Lambda_{2,n}}$ für $n = 1, 2, \ldots$ ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz. Die Voraussetzung (2.42) sichert nach (2.22) für $n = 1, 2, \ldots$ die Existenz der zweiten Momente von L_n, so daß für die charakteristischen Funktionen $f_{L_n}(t)$ (2.19) mit (2.20) und (2.21) gilt. Für $n = 1, 2, \ldots$ setzen wir:

$$a_n := c_n' \quad \text{und} \quad b_n := v_n.$$

Dann gilt für die charakteristischen Funktionen von $L_n - a_n$ bzw. $(L_n - a_n)/b_n$ für $n = 1, 2, \ldots$:

$$
\begin{aligned}
f_{L_n - a_n}(t) &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} k(t,x)\, K_n(dx) \right) \qquad \text{bzw.} \\
f_{(L_n-a_n)/b_n}(t) &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} k\left(\frac{t}{b_n}, x\right)\, K_n(dx) \right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} k\left(t, \frac{x}{v_n}\right) \frac{1}{v_n^2}\, K_n(dx) \right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} k(t,x)\, \overline{K}_n(dx) \right) \qquad \text{mit} \\
\overline{K}_n(B) &= \frac{1}{v_n^2} \int_{X_n} I_B\left(\frac{l_n(x)}{v_n}\right)\, l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{R}. \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

Die Voraussetzung (1.14) des Satzes 1.6 ist trivialerweise erfüllt (vgl. Beispiel 1.5). Es genügt also zu zeigen, daß die kanonischen Maße $\overline{K}_n$ (2.44) für $n \to \infty$ schwach gegen δ_0 konvergieren. Die Forderung nach der Konvergenz der Gesamtmassen (1.1) ist aufgrund von (2.42) und (2.44) trivialerweise erfüllt.
Es verbleibt zu zeigen, daß

$$
\lim_{n\to\infty} \overline{K}_n((-\infty, x)) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x < 0, \\ 1, & \text{für} \quad x > 0. \end{cases} \qquad (2.45)
$$

Da jedoch für alle $n = 1, 2, \ldots$ $\overline{K}_n(\mathbb{R}) = 1$, ist die Voraussetzung (2.43) äquivalent zu (2.45). Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

„Es gibt heute keine zweite Möglichkeit so phantastischen Gefühls wie die des Mathematikers.[3]“

Kapitel 3

Zwei Modelle für die Anwendung der Grenzwertsätze und Beispiele

3.1 Vorbetrachtungen

Es seien $(M, \mathfrak{M}, P_i), i = 1, 2$, zwei Punktprozesse mit dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$ und $X_o \in \mathfrak{B}$ eine abgeschlossene Menge.

1. Konstruktion: Mit $\mathfrak{X}_o$ bezeichnen wir die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{X}$ bezüglich X_o, d. h.

$$\mathfrak{X}_o := X_o \cap \mathfrak{X} = \{X_o \cap A : A \in \mathfrak{X}\}. \tag{3.1}$$

Wir definieren uns nun durch

$$\mathfrak{M}^{(o)} := \sigma(\{\{\varphi \in M : \varphi(B) = k\}, k \in \mathbb{N}, B \in \mathfrak{X}_o\})$$

eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{M}$. Mit $P_i^{(o)}, i = 1, 2$, wollen wir die Einschränkungen von P_i auf $\big(M, \mathfrak{M}^{(o)}\big)$ bezeichnen und annehmen, daß

$$P_1^{(o)} \sim P_2^{(o)} \tag{3.2}$$

gilt. Damit ist auch der Log-Likelihood-Quotient $L^{(o)}$ von $P_1^{(o)}$ und $P_2^{(o)}$ definiert:

$$L^{(o)} = \left(M, \mathfrak{M}^{(o)}, P_2^{(o)}\right) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \quad \text{mit}$$

$$L^{(o)}(\varphi) = \ln \frac{dP_1^{(o)}}{dP_2^{(o)}}(\varphi). \tag{3.3}$$

[3] Musil, Robert: Der mathematische Mensch.
In: Essays Reden Kritiken, Verlag Volk und Welt, Berlin, 1984.

2. Konstruktion: Mit d_o wollen wir die Einschränkung der Metrik d auf $X_o \subseteq X$ bezeichnen. Dann ist (X_o, d_o) wiederum ein vollständiger separabler metrischer Raum. Wir können nun analog zu Definition 2.1 vorgehen. Die σ-Algebra der BOREL-Mengen von X_o bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_o$. Da $X_o \in \mathfrak{B}$, sind alle Mengen $B \in \mathfrak{A}_o$ beschränkt und N_o ist die Menge aller endlichen Maße auf dem meßbaren Raum $(X_o, \mathfrak{A}_o)$. Mit M_o bezeichnen wir die Menge der ganzzahligen Maße $\varphi_o \in N_o$. Analog zu (2.1) definieren wir

$$\mathfrak{M}_o := \sigma\left(\left\{\{\varphi_o \in M_o : \varphi_o(B) = k\right\}, k \in \mathbb{N}, B \in \mathfrak{A}_o\}\right)$$

als kleinste σ-Algebra von Teilmengen von M_o bezüglich der für alle $B \in \mathfrak{A}_o$ die Projektionen (vgl. (2.2))

$${}_o\pi_B : M_o \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad {}_o\pi_B(\varphi_o) = \varphi_o(B) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{A}_o$$

meßbar sind.

Lemma 3.1 *Es gilt* $\mathfrak{X}_o = \mathfrak{A}_o$.

Beweis: „$\subseteq$“ Wir setzen

$$\mathfrak{C}_o := \{A \subseteq X : A = B \cup (C \setminus X_o), B \in \mathfrak{A}_o, C \in \mathfrak{X})\}$$

und zeigen, daß $\mathfrak{C}_o$ eine σ-Algebra von Teilmengen von X ist.

$$X = X_o \cup (X \setminus X_o)$$

Somit ist $X \in \mathfrak{C}_o$, da $X_o \in \mathfrak{A}_o$ und $X \in \mathfrak{X}$.
Jetzt sei eine Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{C}_o$ mit $A_n = B_n \cup (C_n \setminus X_o), B_n \in \mathfrak{A}_o, C_n \in \mathfrak{X}$, $n = 1, 2, \ldots$, gegeben.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \setminus X_o\right)$$

Da

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{A}_o \quad \text{und} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{X},$$

folgt, daß

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{C}_o.$$

Nun sei $A = B \cup (C \setminus X_o)$ aus $\mathfrak{C}_o$.

$$\begin{aligned} A^c &= B^c \cap (C \setminus X_o)^c \\ &= (B^c \cap C^c) \cup (B^c \cap X_o) \\ &= (X_o^c \cap C^c) \cup (B^c \cap X_o) \\ &= (X_o \setminus B) \cup (C^c \setminus X_o) \end{aligned}$$

Da $(X_o \setminus B) \in \mathfrak{A}_o$ und $C^c \in \mathfrak{X}$, folgt, daß $A^c \in \mathfrak{C}_o$.
Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}_o$ gilt.
Die σ-Algebren $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{A}_o$ werden jeweils durch das System der offenen Mengen $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}_o$ erzeugt. Sei $G \in \mathfrak{G}$. Dann gilt:

$$G = (G \cap X_o) \cup (G \setminus X_o),$$

wobei $G \cap X_o$ eine in (X_o, d_o) offene Menge ist und somit $(G \cap X_o) \in \mathfrak{A}_o$. Dann ist aber $G \in \mathfrak{C}_o$. Somit sind

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}_o \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}_o \subseteq X_o \cap \mathfrak{C}_o.$$

Es sei nun $A \in X_o \cap \mathfrak{C}_o$

$$\begin{aligned} A &= X_o \cap B, \qquad B \in \mathfrak{C}_o \\ &= X_o \cap (C \cup (D \setminus X_o)), \quad C \in \mathfrak{A}_o, \quad D \in \mathfrak{X} \\ &= (X_o \cap C) \cup (X_o \cap D \cap X_o^c) \\ &= C. \end{aligned}$$

Es ist also:

$$\mathfrak{X}_o \subseteq X_o \cap \mathfrak{C}_o \subseteq \mathfrak{A}_o.$$

Damit ist die erste Inklusion gezeigt.
„$\supseteq$“ Andererseits sei jetzt $G_o \in \mathfrak{G}_o$. Dann existiert stets ein $D \in \mathfrak{G}$ mit

$$G_o = X_o \cap D, \quad \text{z. B.} \quad D = \left(\overline{X_o \setminus G_o}\right)^c.$$

Da $D \in \mathfrak{X}$, folgt, daß $G_o \in \mathfrak{X}_o$ und somit

$$\mathfrak{G}_o \subseteq \mathfrak{X}_o \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}_o \subseteq \mathfrak{X}_o$$

und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$

Lemma 3.2 *(1) Sei $\Lambda \in N$. Dann wird für $B \in \mathfrak{X}_o$ durch*

$$_o\Lambda(B) := \Lambda(X_o \cap C) \quad \textit{mit} \quad X_o \cap C = B \quad \textit{und} \quad C \in \mathfrak{X}$$

ein endliches Maß auf $(X_o, \mathfrak{X}_o)$ definiert, d. h. $_o\Lambda \in N_o$.
(2) Ist $\varphi \in N$ ganzzahlig, so auch $_o\varphi \in N_o$, d. h. aus

$$\varphi \in M \quad \textit{folgt, daß} \quad {_o\varphi} \in M_o.$$

(3) Die Abbildung

$$g_o : M \longrightarrow M_o \quad \textit{mit} \quad g_o(\varphi) = {_o\varphi}$$

ist $\mathfrak{M}^{(o)}, \mathfrak{M}_o$-meßbar.

Beweis: (1) Nach (3.1) läßt sich jede Menge $A \in \mathfrak{X}_o$ in der Form $A = X_o \cap B$ mit $B \in \mathfrak{X}$ darstellen. Dann gilt:

$$_o\Lambda(\emptyset) = \Lambda(X_o \cap \emptyset) = 0$$

und für disjunkte Mengen $A_n \in \mathfrak{X}_o, A_n = X_o \cap B_n$ mit $B_n \in \mathfrak{X}, n = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} {_o\Lambda}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \Lambda\left(X_o \cap \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} B_n\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(X_o \cap B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} {_o\Lambda}(A_n). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$_o\Lambda(X_o) = \Lambda(X_o \cap X) = \Lambda(X_o) < \infty, \quad \text{da} \quad X_o \in \mathfrak{B}.$$

(2) Seien $\varphi \in M$ und $A \in \mathfrak{X}_o$. Dann gilt:

$$_o\varphi(A) = \varphi(X_o \cap B) \in \mathbb{N}, \quad \text{da} \quad (X_o \cap B) \in \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \varphi \in M.$$

(3) Für den Beweis der Meßbarkeit von g_o genügt es zu zeigen, daß $g_o^{-1}(D) \in \mathfrak{M}^{(o)}$ für Mengen $D \in \mathfrak{M}_o$ der Form

$$D = \{\varphi_o \in M_o : \varphi_o(B) = k\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathfrak{X}_o$.

$$\begin{aligned} & g_o^{-1}\left(\{\varphi_o \in M_o : \varphi_o(B) = k\}\right) \\ =& \{\varphi \in M : {_o\varphi}(B) = k\} \\ =& \{\varphi \in M : \varphi(X_o \cap C) = k\} \quad \text{mit} \quad X_o \cap C = B \quad \text{und} \quad C \in \mathfrak{X} \\ =& \{\varphi \in M : \varphi(B) = k\}. \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.1 Bezeichnen wir durch

$$P_{i,o} := P_i^{(o)} \circ g_o^{-1}, \qquad i = 1, 2,$$

die durch g_o von $\left(M, \mathfrak{M}^{(o)}\right)$ auf $(M_o, \mathfrak{M}_o)$ übertragenen Maße, so gilt für $i = 1, 2$ und alle $k \in \mathbb{N}$ sowie $B \in \mathfrak{X}_o$:

$$P_{i,o}\left(\{\varphi_o \in M_o : \varphi_o(B) = k\}\right) = P_i^{(o)}\left(\{\varphi \in M : \varphi(B) = k\}\right). \tag{3.4}$$

Insbesondere folgt aus (3.2), daß

$$P_{1,o} \sim P_{2,o}$$

und der Log-Likelihood-Quotient L_o von $P_{1,o}$ und $P_{2,o}$ mit

$$L_o = (M_o, \mathfrak{M}_o, P_{2,o}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \quad \text{und}$$

$$L_o(\varphi_o) = \ln \frac{dP_{1,o}}{dP_{2,o}}(\varphi_o) \tag{3.5}$$

ist $P_{2,o}$-fast sicher definiert.

Definition 3.1 Sei $(J, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. J heißt **aufsteigend filtrierend**, falls für alle $j_1, j_2 \in J$ je ein $j_3 \in J$ existiert, so daß gilt:

$$j_1 \leq j_3 \quad \text{und} \quad j_2 \leq j_3.$$

Definition 3.2 Seien $(E, \|.\|)$ ein normierter Raum und $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq E$ eine Familie bezüglich einer aufsteigend filtrierenden Menge J. x_j **konvergiert entlang J** gegen ein $x \in E$ ($\lim_{j \in J} x_j = x$), falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $j_o \in J$ existiert, so daß für alle $j \in J$ mit $j_o \leq j$

$$\|x_j - x\| < \varepsilon$$

gilt.

Definition 3.3 Seien $\{P_j\}_{j \in J}$ eine Familie von Verteilungsgesetzen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ und J eine aufsteigend filtrierende Menge. P_j **konvergiert entlang J schwach** gegen ein Verteilungsgesetz P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$, falls

$$\lim_{j \in J} P_j(\mathbb{R}) = P(\mathbb{R})$$

und für die Verteilungsfunktionen $F_j(x)$ von $P_j, j \in J$ bzw. $F(x)$ von P gilt in jedem Stetigkeitspunkt der Grenzverteilungsfunktion $F(x)$:

$$\lim_{j \in J} F_j(x) = F(x).$$

Satz 3.1 *Es seien* $(M, \mathfrak{M}, P_i), i = 1, 2,$ *zwei Punktprozesse mit dem Phasenraum* $(X, \mathfrak{X})$ *und* $X_o \in \mathfrak{B}$ *eine abgeschlossene Menge. Es gelte:*

$$P_1^{(o)} \sim P_2^{(o)}. \tag{3.6}$$

Dann besitzen die Log-Likelihood-Quotienten $L^{(o)}$ *(3.3) und* L_o *(3.5) das gleiche Verteilungsgesetz.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Zufallsgrößen

$$D^{(o)} : \left(M, \mathfrak{M}^{(o)}, P_2^{(o)})\right) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \quad \text{mit} \quad D^{(o)}(\varphi) = \frac{dP_1^{(o)}}{dP_2^{(o)}}(\varphi)$$

und

$$D_o : (M_o, \mathfrak{M}_o, P_{2,o}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \quad \text{mit} \quad D_o(\varphi_o) = \frac{dP_{1,o}}{dP_{2,o}}(\varphi_o)$$

das gleiche Verteilungsgesetz besitzen.
Z_o sei die Menge aller endlichen Zerlegungen von X_o durch BOREL-Mengen $B \in \mathfrak{X}_o$, d. h.

$$Z_o = \left\{ z = \{B_1, \dots, B_{n_z}\} : B_i \in \mathfrak{X}_o, i = 1, \dots, n_z, \bigcup_{i=1}^{n_z} B_i = X_o, \right.$$
$$\left. B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ für } i \neq j, i, j = 1, \dots, n_z \right\}.$$

Durch

$$\mathfrak{X}_{o,z} := \sigma(z) \quad \text{für} \quad z \in Z_o$$

definieren wir uns eine Familie $\{\mathfrak{X}_{o,z}\}_{z \in Z_o}$ von endlichen Teilalgebren von $\mathfrak{X}_o$. Vermittels dieser Familie können wir uns zwei Familien $\left\{\mathfrak{M}^{(o,z)}\right\}_{z \in Z_o}$ und $\{\mathfrak{M}_{o,z}\}_{z \in Z_o}$ von Teil-σ-Algebren von $\mathfrak{M}^{(o)}$ und $\mathfrak{M}_o$ durch

$$\mathfrak{M}^{(o,z)} := \sigma\left(\{\{\varphi \in M : \varphi(B) = k\}, k \in \mathbb{N}, B \in \mathfrak{X}_{o,z}\}\right) \tag{3.7}$$

und

$$\mathfrak{M}_{o,z} := \sigma\left(\{\{\varphi_o \in M_o : \varphi_o(B) = k\}, k \in \mathbb{N}, B \in \mathfrak{X}_{o,z}\}\right) \tag{3.8}$$

definieren.
Wir halten uns jetzt ein beliebiges $z \in Z_o$ fest.
Jede Menge $B \in \mathfrak{X}_{o,z}$ läßt sich in der Form

$$B = \bigcup_{k=1}^{k_o} B_{n_k} \quad \text{mit} \quad B_{n_k} \in z, k = 1, \dots, k_o$$

darstellen. Somit sind die Teil-σ-Algebren $\mathfrak{M}^{(o,z)}$ bzw. $\mathfrak{M}_{o,z}$ abzählbar erzeugt und besitzen die Atome

$$\begin{aligned} A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}} &= \{\varphi \in M : \varphi(B_i) = l_i, i = 1,\dots,n_z\}, \quad \text{bzw.} \\ {}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}} &= \{\varphi_o \in M_o : \varphi_o(B_i) = l_i, i = 1,\dots,n_z\}, \end{aligned}$$

wobei $B_i \in z$ und $l_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1,\dots,n_z$. Mit $P_i^{(o,z)}$ bzw. $P_{i,o,z}, i = 1,2$, bezeichnen wir die Einschränkungen von $P_i^{(o)}$ bzw. $P_{i,o}$ auf $(M, \mathfrak{M}^{(o,z)})$ bzw. $(M_o, \mathfrak{M}_{o,z})$. Nach Folgerung 3.1 gilt aufgrund von (3.6) auch $P_{1,o} \sim P_{2,o}$ und somit

$$P_1^{(o,z)} \sim P_2^{(o,z)} \quad \text{bzw.} \quad P_{1,o,z} \sim P_{2,o,z}. \tag{3.9}$$

Da $M_2^{(o)}(D^{(o)}) = 1$ und $M_{2,o}(D_o) = 1$ können wir die bedingten Erwartungswerte

$$\begin{aligned} D^{(o,z)}(\varphi) &:= M_2^{(o)}\left(D^{(o)} | \mathfrak{M}^{(o,z)}\right)(\varphi) \\ &= \sum_{l_1,\dots,l_{n_z}=0}^{\infty} \frac{P_1^{(o,z)}\left(A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)}{P_2^{(o,z)}\left(A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)} \, I_{A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}}(\varphi) \end{aligned} \tag{3.10}$$

und

$$\begin{aligned} D_{o,z}(\varphi_o) &:= M_{2,o}\left(D_o | \mathfrak{M}_{o,z}\right)(\varphi_o) \\ &= \sum_{l_1,\dots,l_{n_z}=0}^{\infty} \frac{P_{1,o,z}\left({}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)}{P_{2,o,z}\left({}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)} \, I_{{}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}}(\varphi_o) \end{aligned} \tag{3.11}$$

bilden. Aufgrund von (3.9) sind in (3.10) und (3.11) Nenner und Zähler stets gleichzeitig Null. In diesen Fällen wollen wir den Wert des Bruches mit Null annehmen.
Für $i = 1,2$ und alle $l_j \in \mathbb{N}, j = 1,\dots,n_z$, gilt:

$$\begin{aligned} P_{i,o,z}\left({}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right) &= P_{i,o}\left({}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right) \\ &= P_i^{(o)}\left(g_o^{-1}\left({}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)\right) \\ &= P_i^{(o)}\left(A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right) \\ &= P_i^{(o,z)}\left(A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$P_2^{(o,z)}\left(\left\{\varphi \in M : D^{(o,z)}(\varphi) < x\right\}\right) = P_{2,o,z}\left(\left\{\varphi_o \in M_o : D_{o,z}(\varphi_o) < x\right\}\right),$$

da in (3.10) und (3.11) über jene $l_1,\dots,l_{n_z}$ summiert wird, für die die jeweiligen Brüche kleiner als x sind. Dies tritt jedoch nach (3.12) stets gleichzeitig ein und die Werte der Maße $P_2^{(o,z)}$ bzw. $P_{2,o,z}$ stimmen auf den Atomen

$$A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}} \quad \text{bzw.} \quad {}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}} \quad \text{für alle} \quad l_i \in \mathbb{N}, i = 1,\dots,n_z,$$

überein.
Damit stimmen die Verteilungsgesetze von $D^{(o,z)}$ und $D_{o,z}$ für alle $z \in Z_o$ überein.
Nun führen wir durch

$$z_1 \leq_o z_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{X}_{o,z_1} \subseteq \mathfrak{X}_{o,z_2} \tag{3.13}$$

eine Halbordnung auf Z_o ein. Diese bedeutet, daß eine Zerlegung z_1 von X_o genau dann kleiner gleich einer Zerlegung z_2 von X_o ist, wenn sich jedes Element $B_i \in z_1, i = 1, \ldots, n_{z_1}$, als endliche Vereinigung von Mengen $C_j \in z_2, j = 1, \ldots, n_{z_2}$, darstellen läßt, d. h., daß z_2 eine feinere Zerlegung als z_1 ist. Aus (3.13) und (3.7) bzw. (3.8) folgt sofort:

$$\begin{aligned} z_1 \leq_o z_2 \quad &\text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{M}^{(o,z_1)} \subseteq \mathfrak{M}^{(o,z_2)} \quad \text{und} \\ z_1 \leq_o z_2 \quad &\text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{M}_{o,z_1} \subseteq \mathfrak{M}_{o,z_2}. \end{aligned}$$

Damit bilden $\left\{\mathfrak{M}^{(o,z)}\right\}_{z \in Z_o}$ bzw. $\{\mathfrak{M}_{o,z}\}_{z \in Z_o}$ aufsteigende Familien von Teil-σ-Algebren von $\mathfrak{M}^{(o)}$ bzw. $\mathfrak{M}_o$.
Wir zeigen jetzt:

$$\sigma\left(\bigcup_{z \in Z_o} \mathfrak{M}^{(o,z)}\right) = \mathfrak{M}^{(o)} \quad \text{und} \tag{3.14}$$

$$\sigma\left(\bigcup_{z \in Z_o} \mathfrak{M}_{o,z}\right) = \mathfrak{M}_o. \tag{3.15}$$

Die Inklusion „$\subseteq$“ ist in (3.14) und (3.15) trivialerweise erfüllt. Sei nun $C = \{\varphi \in M : \varphi(B) = k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathfrak{X}_o$ eine Menge aus dem Erzeugendensystem von $\mathfrak{M}^{(o)}$. Da $B \in \mathfrak{X}_o$, ist $z_B = \{B, B^c\}$ ein Element aus Z_o, also $B \in \mathfrak{X}_{o,z_B}$. Damit liegt C jedoch in $\mathfrak{M}^{(o,z_B)}$ und die zweite Inklusion „$\supseteq$“ in (3.14) ist gezeigt. Zum Beweis der Inklusion „$\supseteq$“ in (3.15) sind die analogen Schlüsse zu ziehen.
Nun seien $z_1, z_2 \in Z_o$, $z_1 = \{B_1, \ldots, B_{n_{z_1}}\}$ und $z_2 = \{C_1, \ldots, C_{n_{z_2}}\}$, beliebig gewählt. Wir setzen:

$$z_3 := \{B_i \cap C_j : B_i \in z_1, i = 1, \ldots, n_{z_1}, C_j \in z_2, j = 1, \ldots, n_{z_2}\}$$

und es gilt $z_3 \in Z_o$, wobei $z_1 \leq_o z_3$ und $z_2 \leq_o z_3$. $(Z_o, \leq_o)$ ist also aufsteigend filtrierend.
Nach [1], § 60, folgt nun, daß $D^{(o,z)}$ in $L_1\left(M, \mathfrak{M}^{(o)}, P_2^{(o)}\right)$ entlang Z_o gegen $D^{(o)}$ und $D_{o,z}$ in $L_1(M, \mathfrak{M}_o, P_{2,o})$ entlang Z_o gegen D_o konvergieren. Aus der Konvergenz im Mittel folgt jeweils die schwache Konvergenz der Verteilungsgesetze $P_{D^{(o,z)}}$ bzw. $P_{D_{o,z}}$ entlang Z_o gegen die Grenzverteilungsgesetze $P_{D^{(o)}}$ bzw. P_{D_o}. Da die Verteilungsgesetze $P_{D^{(o,z)}}$ und $P_{D_{o,z}}$ für alle $z \in Z_o$ übereinstimmen, folgt die Gleichheit der Verteilungsgesetze $P_{D^{(o)}}$ und P_{D_o}. $\square$

Definition 3.4 Seien P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum $(A, \mathfrak{A})$ und μ ein σ-endliches, P_1 und P_2 dominierendes Maß auf $(A, \mathfrak{A})$, d. h. $P_i \ll \mu, i = 1, 2$. Dann heißt für $s \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} H_s(P_1, P_2) &:= \int\limits_A (p_1(a))^s \, (p_2(a))^{1-s} \; \mu(da) \\ &= M_\mu \left(p_1^s p_2^{1-s}\right) \quad \text{mit} \\ p_i(a) &= \frac{dP_i}{d\mu}(a), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.16}$$

HELLINGER-Integral der Ordnung s.

Bemerkung 3.1 $H_s(P_1, P_2)$ existiert für alle $s \in (0, 1)$, da

$$\int\limits_A (p_1(a))^s \, (p_2(a))^{1-s} \; \mu(da) \leq (P_1(A))^s \, (P_2(A))^{1-s} = 1.$$

Weiterhin ist $H_s(P_1, P_2)$ unabhängig von der Wahl des dominierenden Maßes μ.

Satz 3.2 *Seien P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum $(A, \mathfrak{A})$. Dann sind P_1 und P_2 genau dann äquivalent, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} &\lim_{s \uparrow 1} H_s(P_1, P_2) = 1 \quad \textit{und} \\ &\lim_{s \downarrow 0} H_s(P_1, P_2) = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2 Für den Beweis dieses Satzes sei auf [7] verwiesen.

Satz 3.3 *Seien P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum $(A, \mathfrak{A})$. $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$ sei eine aufsteigende Familie von Teil-σ-Algebren von $\mathfrak{A}$ bezüglich einer aufsteigend filtrierenden Menge J und $P_{i,j}, i = 1, 2, j \in J$, die Einschränkungen von P_i auf $\mathfrak{A}_j$. Weiterhin gelte:*

$$\sigma \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{A}_j \right) = \mathfrak{A}.$$

Dann gilt für alle $s \in (0, 1)$:

$$\lim_{j \in J} H_s(P_{1,j}, P_{2,j}) = H_s(P_1, P_2).$$

Beweis: Sei μ ein σ-endliches, P_1 und P_2 dominierendes Maß auf $(A, \mathfrak{A})$. Für $i = 1, 2$ gilt für die Dichten (3.16) $M_\mu(p_i) = 1$ und für alle $j \in J$ existieren die bedingten Erwartungswerte $p_{i,j}(a) := M_\mu(p_i | \mathfrak{A}_j)(a)$. Nach [1], § 60, folgt, daß für $i = 1,2$ $p_{i,j}$ in $L_1(A, \mathfrak{A}, \mu)$ entlang J gegen p_i konvergieren. Für $j \in J$ und $s \in (0,1)$ gilt:

$$H_s(P_{1,j}, P_{2,j}) = M_\mu \left(p_{1,j}^s \; p_{2,j}^{1-s} \right).$$

Wir wählen $s \in (0,1)$ sowie $\varepsilon > 0$ und schätzen unter Verwendung der Ungleichung

$$|x^a - y^a| \leq |x-y|^a \quad \text{für} \quad x,y \geq 0 \quad \text{und} \quad a \in (0,1)$$

ab:

$$\begin{aligned}
&|H_s(P_{1,j}, P_{2,j}) - H_s(P_1, P_2)| \\
\leq & M_\mu \left(\left| p_{1,j}^s \; p_{2,j}^{1-s} - p_{1,j}^s \; p_2^{1-s} \right| \right) + M_\mu \left(\left| p_{1,j}^s \; p_2^{1-s} - p_1^s \; p_2^{1-s} \right| \right) \\
\leq & M_\mu \left(p_{1,j}^s \, |p_{2,j} - p_2|^{1-s} \right) + M_\mu \left(p_2^{1-s} \, |p_{1,j} - p_1|^s \right) \\
\leq & \left(M_\mu \left(|p_{2,j} - p_2| \right) \right)^{1-s} + \left(M_\mu \left(|p_{1,j} - p_1| \right) \right)^s .
\end{aligned}$$

Es existieren ein $j_1 \in J$ mit

$$M_\mu \left(|p_{1,j} - p_1| \right) < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{s}}$$

für alle $j \in J$ mit $j_1 \leq j$ und ein $j_2 \in J$ mit

$$M_\mu \left(|p_{2,j} - p_2| \right) < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{1-s}}$$

für alle $j \in J$ mit $j_2 \leq j$. Wir wählen ein $j_3 \in J$ mit $j_1 \leq j_3$ und $j_2 \leq j_3$. Dann gilt für alle $j \in J$ mit $j_3 \leq j$:

$$|H_s(P_{1,j}, P_{2,j}) - H_s(P_1, P_2)| < \varepsilon.$$

□

Lemma 3.3 *Seien* $(M, \mathfrak{M}, P_\Lambda)$ *ein* POISSON*scher Punktprozeß mit dem Intensitätsmaß* Λ *auf dem Phasenraum* $(X, \mathfrak{X})$ *und* $X_o \in \mathfrak{B}$ *eine abgeschlossene Menge. Dann ist* $(M_o, \mathfrak{M}_o, P_{\Lambda_o})$ *ein* POISSON*scher Punktprozeß mit dem Intensitätsmaß* ${}_o\Lambda$ *auf dem Phasenraum* $(X_o, \mathfrak{X}_o)$.

Beweis: Nach Konstruktion ist $(M_o, \mathfrak{M}_o, P_{\Lambda_o})$ ein Punktprozeß mit dem Phasenraum $(X_o, \mathfrak{X}_o)$. Seien $B \in \mathfrak{X}_o$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach (3.4) und Lemma 3.2 (1) gilt:

$$P_{{}_o\pi_B}(\{k\}) = P_{\pi_B}(\{k\}) = \exp\left(-\Lambda(B)\right) \frac{(\Lambda(B))^k}{k!} = \exp\left(-{}_o\Lambda(B)\right) \frac{({}_o\Lambda(B))^k}{k!}.$$

Seien jetzt für $i = 1, \ldots, n$ $B_i \in \mathfrak{X}_o$ disjunkte Mengen und $k_i \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach (3.12) und Definition 2.2:

$$\begin{aligned} P_{{}_o\pi_{B_1},\ldots,{}_o\pi_{B_n}}(\{(k_1,\ldots,k_n)\}) &= P_{\pi_{B_1},\ldots,\pi_{B_n}}(\{(k_1,\ldots,k_n)\}) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\pi_{B_i}}(\{k_i\}) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{{}_o\pi_{B_i}}(\{k_i\}). \end{aligned}$$

□

Satz 3.4 *Es seien P_{Λ_1} und P_{Λ_2} zwei* POISSON*sche Verteilungsgesetze auf $(M, \mathfrak{M})$ mit den Intensitätsmaßen Λ_1 und Λ_2 auf dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$ und es gelte $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$. Dann gilt für jede abgeschlossene Menge $X_o \in \mathfrak{B}$:*

(1) die POISSON*sche Verteilungsgesetze $P_{\Lambda_{1,o}}$ und $P_{\Lambda_{2,o}}$ auf $(M_o, \mathfrak{M}_o)$ mit den Intensitätsmaßen ${}_o\Lambda_1$ und ${}_o\Lambda_2$ auf dem Phasenraum $(X_o, \mathfrak{X}_o)$ sind äquivalent und*

(2) die Wahrscheinlichkeitsmaße $P^{(o)}_{\Lambda_1}$ und $P^{(o)}_{\Lambda_2}$ auf dem meßbaren Raum $\left(M, \mathfrak{M}^{(o)}\right)$ sind äquivalent.

Beweis: (1) Aus $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ folgt stets, daß ${}_o\Lambda_1 \sim {}_o\Lambda_2$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{X_o} \left(1 - \sqrt{q_o(x)}\right)^2 {}_o\Lambda_2(dx) = \int\limits_{X_o} \left(1 - \sqrt{q(x)}\right)^2 \Lambda_2(dx) \\ &\leq \int\limits_{X_o} (1 + q(x))\ \Lambda_2(dx) = \Lambda_1(X_o) + \Lambda_2(X_o) < \infty \end{aligned}$$

und aus Satz 2.1 folgt der erste Teil der Behauptung.
(2) Wir wollen im folgenden die im Beweis des Satzes 3.1 eingeführten Strukturen verwenden. Für $z \in Z_o$ läßt sich jede Menge $A \in \mathfrak{M}^{(o,z)}$ in der Form

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^z_{l^1_k,\ldots,l^{n_z}_k}$$

darstellen. Für $i = 1, 2$ gilt dann nach (3.12)

$$\begin{aligned} P^{(o,z)}_{\Lambda_i}(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} P^{(o,z)}_{\Lambda_i}\left(A^z_{l^1_k,\ldots,l^{n_z}_k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{\Lambda_{i,o,z}}\left({}_oA^z_{l^1_k,\ldots,l^{n_z}_k}\right) \\ &= P_{\Lambda_{i,o,z}}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} {}_oA^z_{l^1_k,\ldots,l^{n_z}_k}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt jedoch unter Verwendung des ersten Teils der Behauptung dieses Satzes, daß für alle $z \in Z_o$ gilt:

$$P_{\Lambda_1}^{(o,z)} \sim P_{\Lambda_2}^{(o,z)}.$$

Für $z \in Z_o$ und $s \in (0,1)$ gilt für die HELLINGER-Integrale der Ordnung s:

$$\begin{aligned} H_s(P_{\Lambda_{1,o,z}}, P_{\Lambda_{2,o,z}}) &= \sum_{l_1,\dots,l_{n_z}=0}^{\infty} \left(P_{\Lambda_{1,o,z}}\left({}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)\right)^s \left(P_{\Lambda_{2,o,z}}\left({}_oA^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)\right)^{1-s} \\ &= \sum_{l_1,\dots,l_{n_z}=0}^{\infty} \left(P_{\Lambda_1}^{(o,z)}\left(A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)\right)^s \left(P_{\Lambda_2}^{(o,z)}\left(A^z_{l_1,\dots,l_{n_z}}\right)\right)^{1-s} \\ &= H_s(P_{\Lambda_1}^{(o,z)}, P_{\Lambda_2}^{(o,z)}). \end{aligned}$$

Nach (3.14) bzw. (3.15) und der Tatsache, daß $(Z_o, \leq_o)$ eine aufsteigend filtrierende Menge ist, folgt unter der Verwendung des Satzes 3.3, daß für alle $s \in (0,1)$ gilt:

$$H_s(P_{\Lambda_1}^{(o)}, P_{\Lambda_2}^{(o)}) = H_s(P_{\Lambda_{1,o}}, P_{\Lambda_{2,o}}).$$

Da $P_{\Lambda_{1,o}}$ und $P_{\Lambda_{2,o}}$ nach der Behauptung (1) dieses Satzes äquivalent sind, folgt nach Anwendung des Satzes 3.2 die Behauptung (2). $\square$

Satz 3.5 *Es seien P_{Λ_1} und P_{Λ_2} zwei* POISSON*sche Verteilungsgesetze auf $(M, \mathfrak{M})$ mit den Intensitätsmaßen Λ_1 und Λ_2 auf dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$ und es gelte $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$. Dann sind P_{Λ_1} und P_{Λ_2} entweder äquivalent oder gegenseitig singulär in Abhängigkeit davon, ob (vgl. (2.4)):*

$$\int_X \left(1 - \sqrt{q(x)}\right)^2 \Lambda_2(dx)$$

endlich oder unendlich ist.

Bemerkung 3.3 Für den Beweis dieses Satzes sei auf [5] verwiesen.

3.2 Zwei Modelle

Den Ausgangspunkt sollen zwei POISSONsche Punktprozesse $(M, \mathfrak{M}, P_{\Lambda_i})$, $i = 1, 2$, mit den Intensitätsmaßen Λ_1 und Λ_2 auf dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$ bilden. Wir wollen annehmen, daß Λ_1 und Λ_2 äquivalent, P_{Λ_1} und P_{Λ_2} aber gegenseitig singulär sind. Weiterhin sei $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{B}$ eine aufsteigende Folge abgeschlossener Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$. Wir verfahren nun für $n = 1, 2, \ldots$ analog zu den Vorbetrachtungen und erhalten:

(1) zwei Folgen $\left\{\left(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{i,n}}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, POISSONscher Punktprozesse auf den Phasenräumen $(X_n, \mathfrak{X}_n)$ und

(2) zwei Folgen $\left\{\left(M, \mathfrak{M}^{(n)}, P_{\Lambda_i}^{(n)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, von Wahrscheinlichkeitsräumen, die jedoch im Sinne der Definition 2.1 keine Punktprozesse sind.

Nach Satz 3.4 gilt für $n = 1, 2, \ldots$

$$P_{\Lambda_{1,n}} \sim P_{\Lambda_{2,n}} \quad \text{und}$$

$$P_{\Lambda_1}^{(n)} \sim P_{\Lambda_2}^{(n)}.$$

Nach Satz 3.1 besitzen die Log-Likelihood-Quotienten L_n von $P_{\Lambda_{1,n}}$ und $P_{\Lambda_{2,n}}$ bzw. $L^{(n)}$ von $P_{\Lambda_1}^{(n)}$ und $P_{\Lambda_2}^{(n)}$ für $n = 1, 2, \ldots$ das gleiche Verteilungsgesetz. Insbesondere ist das Verteilungsgesetz von $L^{(n)}$ für $n = 1, 2, \ldots$ unbegrenzt teilbar.
Zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des Log-Likelihood-Quotienten L_n von $P_{\Lambda_{1,n}}$ und $P_{\Lambda_{2,n}}$ bzw. seines Verteilungsgesetzes für $n \to \infty$ können die Grenzwertsätze 2.3, 2.6 bzw. 2.4 und 2.7 zur Anwendung gebracht werden.
Die dabei erhaltenen Ergebnisse lassen sich dann auch auf das Modell (2) übertragen.

Interpretation: Modell (1) entspricht anschaulich in etwa der Vorstellung, daß ein Beobachter die beiden Prozesse beliebig lange innerhalb eines beschränkten Beobachtungsfensters beobachten kann, dort uneingeschränkten Zugang zur enthaltenen Information besitzt. In jedem folgenden Beobachtungsschritt wird das Beobachtungsfenster vergrößert, der sichtbare Ausschnitt der Prozesse erweitert. Dem Modell (2) liegt die Vorstellung zugrunde, daß ein Beobachter in jedem Beobachtungsschritt die Prozesse insgesamt zu sehen bekommt, jedoch die Beobachtungszeit limitiert bzw. der Zugang zur enthaltenen Information eingeschränkt, z. B. nur über einen Sekundärprozeß erhältlich. In jedem Beobachtungsschritt wird die Beobachtungszeit verlängert bzw. der Zugang zur Information erweitert. In diesem Sinne sind wir in diesem Abschnitt zu der Aussage gelangt, daß sich das Vorliegen einer „örtlichen“ bzw. „zeitlichen“ Restriktion bei der Beobachtung der beiden Prozesse in einem gewissen Sinne gegeneinander aufwiegt, austauschen läßt.

3.3 Beispiele

Beispiel 3.1 Als Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$ wählen wir $([0,\infty), [0,\infty) \cap \mathfrak{R})$. Das Intensitätsmaß Λ_2 sei das LEBESQUEsche Maß auf $(X, \mathfrak{X})$. Die Dichte (2.5) sei durch

$$q(x) := \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot I_{(0,1]}(x) + \frac{1}{e} \cdot I_{(1,\infty)}(x) \quad \text{mit}$$
$$e := \exp(1) \quad \text{und} \quad q(0) := 0$$

gegeben. Weiterhin sei $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (1,\infty)$ eine aufsteigende Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \infty.$$

Wir erhalten damit eine aufsteigende Folge $\{[0, T_n]\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{B}$ abgeschlossener Mengen. Das Integral (2.4) existiert nicht, P_{Λ_1} und P_{Λ_2} sind also gegenseitig singulär. Da

$$\int\limits_{X_n} l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) = \int\limits_0^{T_n} (\ln(q(x)))^2\, dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\, dx + (T_n - 1) = \infty,$$

existiert für $n = 1, 2, \ldots$ das zweite Moment von L_n nicht.

1. Ein schwaches Gesetz der großen Zahlen (Satz 2.3)

In (2.12) gilt für $n = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_{X_n} \frac{l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)} \Lambda_{2,n}(dx) = \frac{\ln(a_n^2+1)}{a_n^2} + \frac{T_n - 1}{a_n^2+1}$$

und in (2.13):

$$\frac{1}{a_n} \int\limits_{X_n} \left(\frac{a_n^2 l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)} + 1 - q_n(x) \right) \Lambda_{2,n}(dx)$$
$$= \frac{2\arctan(1)}{a_n^2} + \frac{\mathrm{Ei}(-1) - 1}{a_n} + \left(\frac{T_n - 1}{a_n}\right)\left(\frac{1}{a_n^2+1} - \frac{1}{e}\right),$$

wobei $\mathrm{Ei}(x)$ für $x < 0$ die Integralexponentialfunktion bezeichnet.
Setzen wir für $n = 1, 2, \ldots$

$$a_n := \begin{cases} T_n^2, & \text{für} \quad a = 0, \\ \frac{1-T_n}{e\,a}, & \text{für} \quad a \neq 0, \end{cases}$$

so erhalten wir in (2.12) und (2.13) die gewünschten Konvergenzen.

2. Ein zentraler Grenzwertsatz (Satz 2.6)
In (2.37) gilt:

$$\int\limits_{X_n} \frac{l_n^2(x)}{v_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx) = \frac{\ln\left(v_n^2+1\right)}{v_n^2} + \frac{T_n - 1}{v_n^2+1}$$

und in (2.38):

$$\int\limits_{\{x\in X_n : l_n(x) < yv_n\}} \frac{l_n^2(x)}{v_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx)$$

$$= \int\limits_{\left\{x\in(0,1] : \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) < yv_n\right\}} \frac{1}{v_n^2 x + 1}\, dx + \int\limits_{\left\{x\in(1,T_n] : \frac{1}{e} < yv_n\right\}} \frac{1}{v_n^2+1}\, dx.$$

Wir setzen für $n = 1, 2, \ldots$ $v_n := \sqrt{T_n}$ und erhalten in (2.37) und (2.38) ebenfalls die gewünschten Konvergenzen.

Beispiel 3.2 Wir wählen jetzt $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ als Phasenraum. Das Intensitätsmaß Λ_2 sei das Lebesquesche Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$. Die Dichte (2.5) sei durch $q(x) = \exp(x)$ gegeben. Die Folge $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (1, \infty)$ sei wie in Beispiel 3.1 gewählt und wir betrachten die aufsteigende Folge $\{[-T_n, +T_n]\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{B}$ abgeschlossener Mengen. Das Integral (2.4) existiert wiederum nicht. Da

$$\int\limits_{X_n} l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) = \int\limits_{-T_n}^{+T_n} x^2\, dx = \frac{2}{3} T_n^3,$$

existiert für $n = 1, 2, \ldots$ das zweite Moment von L_n.

1. Ein schwaches Gesetz der großen Zahlen (Satz 2.4)
In (2.24) gilt für $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{a_n^2} \int\limits_{X_n} l_n^2(x)\, \Lambda_{2,n}(dx) = \frac{2T_n^3}{3a_n^2}$$

und in (2.25):

$$\frac{1}{a_n} \int\limits_{X_n} \left(l_n(x) + 1 - q_n(x)\right)\, \Lambda_{2,n}(dx) = \frac{1}{a_n} \left(2T_n + \exp(-T_n) - \exp(T_n)\right).$$

Für $n = 1, 2, \ldots$ setzen wir:

$$a_n := \begin{cases} T_n \exp(T_n), & \text{für} \quad a = 0, \\ -\frac{\exp(T_n)}{a}, & \text{für} \quad a \neq 0, \end{cases}$$

und erhalten in (2.24) und (2.25) die gewünschten Konvergenzen.

2. Ein zentraler Grenzwertsatz (Satz 2.7)

Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt in (2.42) bzw. (2.43):

$$v_n^2 = \frac{2}{3} T_n^3 \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{1}{v_n^2} \int\limits_{\{x \in X_n : |l_n(x)| > \varepsilon v_n\}} l_n^2(x) \; \Lambda_{2,n}(dx) = \begin{cases} 1 - \varepsilon^3 \left(\frac{2T_n}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, & \text{für} \quad T_n \leq \frac{3}{2\varepsilon^2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes 2.7.

„Handle, so gut du kannst und so schlecht du mußt, und bleibe dir dabei der Fehlergrenzen deines Handelns bewußt![4]“

Kapitel 4

Eine Abschätzung des Abstandes der Verteilungsfunktionen eines unbegrenzt teilbaren Verteilungsgesetzes und der Standard-Normalverteilung

4.1 Funktionalanalytische Hilfsmittel

Mit $(\mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{C})$ oder kurz $\mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ wollen wir den Vektorraum der beschränkten, LIPSCHITZ-stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bezeichnen. Für $f \in \mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ setzen wir:

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &:= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{und} \\ \|f\|_L &:= \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \end{aligned}$$

wobei $\|.\|_\infty$ eine Norm und $\|.|_L$ eine Halbnorm auf $\mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ sind. Mit der Norm

$$\|f\|_{\mathrm{BL}} := \|f\|_\infty + \|f\|_L \quad \text{für} \quad f \in \mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$$

wird $(\mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), \|.\|_{\mathrm{BL}})$ zum BANACH-Raum. Mit $\mathrm{BL}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ wollen wir den dualen Raum von $\mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ bezeichnen.

[4] MUSIL, ROBERT: Über die Dummheit.
In: Essays Reden Kritiken, Verlag Volk und Welt, Berlin, 1984.

Die Norm auf $\mathrm{BL}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ist durch

$$\|a\|^*_{\mathrm{BL}} := \inf \{c > 0 : |a(f)| \leq c\|f\|_{\mathrm{BL}} \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})\}$$

für $a \in \mathrm{BL}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definiert.
Jedes signierte Maß μ auf dem meßbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ erzeugt durch

$$a_\mu(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx) \quad \text{für} \quad f \in \mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$$

ein Funktional $a_\mu \in \mathrm{BL}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Im folgenden wollen wir das Funktional $a_\mu \in \mathrm{BL}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ mit dem erzeugenden signierten Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ identifizieren.

Lemma 4.1 *Für die durch (1.5) bzw. (1.6) definierte Funktion $k(t,x)$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:*

$$k(t,.) \in BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad \textit{und}$$
$$\|k(t,.)\|_{BL} \leq \frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{3}.$$

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x > 0$. Dann gilt:

$$\exp(itx) - 1 - itx = (it)^2 \int_0^x \int_0^y \exp(itz)\,dzdy.$$

Für $x < 0$ gilt analog:

$$\exp(itx) - 1 - itx = (it)^2 \int_x^0 \int_y^0 \exp(itz)\,dzdy.$$

Mit (1.6) folgt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |k(t,x)| = \frac{t^2}{2}.$$

Der Real- und Imaginärteil von $k(t,x)$ ist partiell nach x differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}(k(t,x)) &= -\frac{tx\sin(tx) + 2(\cos(tx)-1)}{x^3} \quad \text{mit} \\ \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}(k(t,0)) &:= 0 \quad \text{bzw.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}(k(t,x)) &= \frac{tx\cos(tx) - 2\sin(tx) + tx}{x^3} \quad \text{mit} \\ \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}(k(t,0)) &:= -\frac{t^3}{6}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Für $t \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ gilt:

$$-(tx\sin(tx) + 2(\cos(tx) - 1)) = t^3 \int\limits_0^x \int\limits_0^y z\sin(tz)\,dzdy$$

und für $x < 0$ analog:

$$-(tx\sin(tx) + 2(\cos(tx) - 1)) = t^3 \int\limits_x^0 \int\limits_y^0 z\sin(tz)\,dzdy.$$

Mit (4.1) folgt dann:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}(k(t,x)) \right| \leq \frac{|t|^3}{6}. \tag{4.3}$$

Durch analoge Betrachtungen erhalten wir mit (4.2):

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Im}(k(t,x)) \right| = \frac{|t|^3}{6}. \tag{4.4}$$

Seien nun $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ beliebig. Dann können wir unter Verwendung des Mittelwertsatzes und (4.3) bzw. (4.4) abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{k(t,x) - k(t,y)}{x - y} \right| \\
\leq &\left| \frac{\mathrm{Re}(k(t,x)) - \mathrm{Re}(k(t,y))}{x-y} \right| + \left| \frac{\mathrm{Im}(k(t,x)) - \mathrm{Im}(k(t,y))}{x-y} \right| \\
= &\left| \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}(k(t,\xi_1)) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Im}(k(t,\xi_2)) \right| \\
\leq &\frac{|t|^3}{3}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.2 *Es seien μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ mit $v := \mu(\mathbb{R}) > 0, a \in \mathbb{R}$ und $d > 0$. Dann gilt für jedes $c > 0$:*

$$\|(\mu - d \cdot \delta_a)\|_{BL}^* \leq \left(1 + \frac{d}{v}\right) \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |x - a| > c\}\right) + |v - d| + c \cdot d.$$

Beweis: Wir stellen fest, daß $(\mu - d \cdot \delta_a)$ ein signiertes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ ist. Sei $f \in \mathrm{BL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

$$|(\mu - d \cdot \delta_a)(f)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \left(f(x) - \frac{d}{v} f(a) \right) \mu(dx) \right|$$

$$\leq \left| \int\limits_{\{|x-a|>c\}} \left(f(x) - \frac{d}{v} f(a) \right) \mu(dx) \right| + \left| \left(1 - \frac{d}{v} \right) \right| \cdot \left| \int\limits_{\{|x-a|\leq c\}} f(x)\, \mu(dx) \right| +$$

$$\frac{d}{v} \left| \int\limits_{\{|x-a|\leq c\}} (f(x) - f(a))\, \mu(dx) \right|$$

$$\leq \left(1 + \frac{d}{v} \right) \|f\|_\infty\, \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |x-a| > c\}\right) + |v-d|\, \|f\|_\infty + cd\, \|f\|_L$$

$$\leq \left(\left(1 + \frac{d}{v} \right) \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |x-a| > c\}\right) + |v-d| + cd \right) \|f\|_{\mathrm{BL}}.$$

□

4.2 Abschätzung

Satz 4.1 *$A > 0, T > 0$ und $\varepsilon > 0$ seien Konstanten. $F(x)$ bzw. $G(x)$ seien die Verteilungsfunktionen und $f(t)$ bzw. $g(t)$ die charakteristischen Funktionen zweier Verteilungsgesetze. $G(x)$ sei differenzierbar und es gelte:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |G'(x)| \leq A \quad \textit{und} \tag{4.5}$$

$$\varepsilon := \int\limits_{-T}^{+T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt. \tag{4.6}$$

Dann gibt es zu jedem $k = 1, 2, \ldots$ eine endliche, positive, nur von k abhängige Konstante $c(k)$, so daß gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \leq k \frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k) \frac{A}{T}. \tag{4.7}$$

Bemerkung 4.1 Dieser Satz geht auf ESSEEN zurück. Für den Beweis wird auf [8] verwiesen.

Satz 4.2 *$F(x)$ bzw. $f(t)$ seien die Verteilungsfunktion bzw. charakteristische Funktion einer Zufallsgröße X, die ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz besitzt. Es gelte:*

$$M(X^2) < \infty \quad und \quad M(X) = 0. \tag{4.8}$$

$\Phi(x)$ bzw. $g(t)$ seien die Verteilungsfunktion bzw. die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung. Für ein $a > 1$ gelte:

$$\|(K - \delta_0)\|^*_{BL} < \frac{a^2 - 1}{a^2} =: b. \tag{4.9}$$

Dabei bezeichnet K das kanonische Maß aus der KOLMOGOROFF*-Formel (1.4) für die Darstellung der charakteristischen Funktion $f(t)$. Dann gilt:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - \Phi(x)| \le R_{a,k}\left(\|(K - \delta_0)\|^*_{BL}\right) \quad mit \tag{4.10}$$

$$R_{a,k}(x) = \frac{k}{2\pi}\left(a^2 + a^3\frac{\sqrt{2\pi}}{3}\right) \cdot x + \frac{2c(k)}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x}{b - x} \tag{4.11}$$

$$für \quad 0 \le x < b \quad und \quad k = 1, 2, \ldots \quad bzw. \quad a > 1. \tag{4.12}$$

Dabei bezeichnen $c(k), k = 1, 2, \ldots$, die im Satz 4.1 auftretenden Konstanten.

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes verwenden wir den Satz 4.1. Setzen wir dort $G(x) = \Phi(x)$, so ist die Bedingung (4.5) mit $A = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ erfüllt. Die Voraussetzung (4.8) gewährleistet die Darstellung der charakteristischen Funktion $f(t)$ von X durch die KOLMOGOROFF-Formel (1.4). Nach (1.8) und (4.8) gilt:

$$f(t) = \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}} k(t,x)\, K(dx)\right).$$

Nun schätzen wir die Größe ε (4.6) unter Verwendung der Ungleichung

$$|\exp(z) - 1| \le |z| \exp(|z|) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}$$

ab.

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \int\limits_{-T}^{+T} \frac{1}{|t|}\left|\exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}} k(t,x)\, K(dx)\right) - \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}} k(t,x)\, \delta_0(dx)\right)\right| dt \\
&= \int\limits_{-T}^{+T} \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{|t|} \left|\exp\left((K - \delta_0)\left(k(t,.)\right) - 1\right)\right| dt \\
&\le \int\limits_{-T}^{+T} \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{|t|} \left|(K - \delta_0)\left(k(t,.)\right)\right| \exp\left(\left|(K - \delta_0)\left(k(t,.)\right)\right|\right) dt
\end{aligned}$$

$$\leq \|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} \int\limits_{-T}^{+T} \frac{\|k(t,.)\|_{\mathrm{BL}}}{|t|} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} \|k(t,.)\|_{\mathrm{BL}}\right) dt$$

$$\leq \|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} \int\limits_{-T}^{+T} \left(\frac{|t|}{2} + \frac{t^2}{3}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{3}\right)\right) dt$$

$$\leq \|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} \int\limits_{0}^{T} \left(t + \frac{2}{3}t^2\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) dt \quad \text{für}$$

$$\|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} < b \quad \text{und} \quad T := \frac{3}{2}\left(\frac{b}{\|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}}} - 1\right)$$

$$\leq \|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} \left(a^2 + a^3\frac{\sqrt{2\pi}}{3}\right).$$

Nach Einsetzen in (4.7) folgt die Behauptung. □

Folgerung 4.1 Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.2 ist auch die folgende, etwas gröbere Abschätzung möglich:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - \Phi(x)| \leq c(a, a_1, k) \cdot \|(K-\delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}}, \quad \text{wobei} \tag{4.13}$$

$$c(a, a_1, k) = \frac{k}{2\pi}\left(a_1^2 + a_1^3\frac{\sqrt{2\pi}}{3}\right) + \frac{2\,c(k)}{3\sqrt{2\pi}}\,\frac{a_1^2a^2}{a_1^2 - a^2} \tag{4.14}$$

und $1 < a < a_1$ bzw. $k = 1, 2, \ldots$

Beweis: Für $a < a_1$ gilt: $\frac{a^2-1}{a^2} < \frac{a_1^2-1}{a_1^2} =: b_1$. Damit ist die Voraussetzung (4.9) des Satzes 4.2 auch für a_1 erfüllt und es gilt (4.10) mit $a = a_1$ und $b = b_1$ in (4.11) bzw. (4.12). Da jedoch für $0 \leq x \leq b < b_1$ gilt:

$$\frac{x}{b_1 - x} \leq \frac{a_1^2a^2}{a_1^2 - a^2} \cdot x,$$

können wir für $0 \leq x \leq b$ abschätzen:

$$R_{a_1,k}(x) \leq c(a, a_1, k) \cdot x.$$

□

Folgerung 4.2 Ersetzen wir die Voraussetzung (4.9) des Satzes 4.2 durch die Forderung, daß $v := K(\mathbb{R}) > 0$ sowie für ein $a > 1$ und ein $c > 0$ gelte:

$$\left(1 + \frac{1}{v}\right) K\left(\{x \in \mathbb{R} : |x| > c\}\right) + |v - 1| + c < \frac{a^2-1}{a^2},$$

so können wir unter Verwendung von Lemma 4.2 und der Tatsache, daß $c(a, a_1, k) > 0$ und $R_{a,k}(x)$ für $0 \leq x < b$ streng monoton wachsend ist, in (4.10) und (4.13) $\|(K - \delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}}$ durch

$$\left(1 + \frac{1}{v}\right) K\left(\{x \in \mathbb{R} : |x| > c\}\right) + |v - 1| + c$$

ersetzen.

Beispiel 4.1 Wir wollen den Satz 4.2 dazu benutzen, um für das Beispiel 3.2 die Konvergenzgeschwindigkeit der Verteilungsfunktion $F_n(x)$ von $(L_n - a_n)/b_n$ (vgl. Satz 2.7) für $n \to \infty$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normalverteilung abzuschätzen. Da für $n = 1, 2, \ldots$ $\overline{K}_n(\mathbb{R}) = 1$, folgt unter Verwendung von Lemma 4.2, daß gilt:

$$\|(K - \delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} \leq 2\overline{K}_n\left(\{x \in \mathbb{R} : |x| > c_n\}\right) + c_n \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\, T_n^{-\frac{1}{2}}.$$

Dabei wurde für $n = 1, 2, \ldots$

$$c_n = \sqrt{\frac{3}{2}}\, T_n^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt.
Für alle $n = 1, 2, \ldots$ mit $T_n > 6$ gilt:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\, T_n^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2},$$

d. h. in (4.9) können wir

$$a = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2}$$

setzen.
Dann folgt:

$$\begin{aligned}\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| &\leq R_{a,k_n}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, T_n^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &\leq 0,851\, k_n T_n^{-\frac{1}{2}} + 0,266\, c(k_n)\left(\sqrt{\frac{T_n}{6}} - 1\right)^{-1}\end{aligned}$$

bzw. nach Folgerung 4.1 bzw. 4.2

$$\begin{aligned}\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| &\leq c(a, a_1, k_n) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, T_n^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{3}{2} k_n + 2\, c(k_n)\right) T_n^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Dabei wurden $a = \sqrt{2}$ und $a_1 = \sqrt{3}$ gesetzt.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.* Walter de Gruyter, Berin-New York, 1974, 2. Auflage.

[2] Dudley, R.M.: *Probabilities and metrics Convergence of laws on metric spaces, with a view to statistical testing.* Aarhus Universitet, Lecture Notes Series No. 45, 1976.

[3] Gnedenko, B.W.: *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Akademie-Verlag, Berlin, 1968.

[4] Gnedenko, B.W., Kolmogoroff, A.N.: *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1959.

[5] Liese, F.: *Eine informationstheoretische Bedingung für die Äquivalenz unbegrenzt teilbarer Punktprozesse.* Mathematische Nachrichten, Band **70** (1976), S. 183–186.

[6] Liese, F.: Hellinger *Integrals, Error Probabilities and Contiguity of* Gauss*ian Processes with Independent Increments and* Poisson-*Processes.* (im Druck).

[7] Nemetz, T.: *Equivalence – Orthogonality Dichotomies of Propability Measures.* Proceedings of the Colloquium on limit theorems of probability theory and statistics, Keszthely, 1974.

[8] Ибрагимов, И.А., Линник, Ю.В.: *Независимые и стационарно связанные величины.* Издательство „Наука“, Москва, 1965.

[9] Линков, Ю.Н.: *Асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия и проверка гипотез для неоднородных процессов* Пуассон*а.*

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Jena, den 30.11.1984

gez. Udo Lorz

Für die Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit, für die dabei gewährte Unterstützung und für vielfältige Hinweise möchte ich

Herrn Doz. Dr. F. Liese

meinen Dank sagen.

Thesen

1. Es seien $\left\{(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{i,n}})\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, zwei Folgen POISSONscher Punktprozesse mit den Intensitätsmaßen $\Lambda_{i,n}$ auf den Phasenräumen $(X_n, \mathfrak{X}_n)$, $n = 1, 2, \dots$ und $a \in \mathbb{R}$. Für $n = 1, 2, \dots$ gelte:
$$P_{\Lambda_{1,n}} \sim P_{\Lambda_{2,n}} \quad \text{und}$$
$$\Lambda_{2,n}(X_n) < \infty.$$
Notwendig und hinreichend dafür, daß für reelle Zahlen a_n, $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, L_n/a_n für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen a konvergiert, ist, daß gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} \frac{l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx) = 0 \quad \text{und}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \int\limits_{X_n} \left(\frac{a_n^2 l_n^2(x)}{a_n^2 + l_n^2(x)} + 1 - q_n(x) \right) \Lambda_{2,n}(dx) = a.$$
Dabei bezeichnen L_n, q_n und l_n für $n = 1, 2, \dots$ die analog zu (2.3), (2.5) und (2.6) definierten Funktionen.

2. Es seien $\left\{(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{i,n}})\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, zwei Folgen POISSONscher Punktprozesse mit den Intensitätsmaßen $\Lambda_{i,n}$ auf den Phasenräumen $(X_n, \mathfrak{X}_n)$, $n = 1, 2, \dots$ Für $n = 1, 2, \dots$ gelte:
$$P_{\Lambda_{1,n}} \sim P_{\Lambda_{2,n}} \quad \text{und}$$
$$\Lambda_{2,n}(X_n) < \infty.$$
Notwendig und hinreichend für die Existenz reeller Zahlen a_n und $b_n, b_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, so daß das Verteilungsgesetz von $(L_n - a_n)/b_n$ für $n \to \infty$ schwach gegen die Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$ konvergiert, ist die Existenz reeller Zahlen $v_n, v_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, für die gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} \frac{l_n^2(x)}{v_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx) = 1 \quad \text{und}$$
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{x \in X_n:\ l_n(x) < y v_n\}} \frac{l_n^2(x)}{v_n^2 + l_n^2(x)}\, \Lambda_{2,n}(dx) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad y < 0, \\ 1, & \text{für} \quad y > 0. \end{cases}$$
Für $n = 1, 2, \dots$ sind die Zufallsgrößen L_n und l_n wiederum analog zu (2.3) bzw. (2.6) definiert.

3. Es seien P_{Λ_1} und P_{Λ_2} gegenseitig singuläre POISSONsche Verteilungsgesetze auf $(M, \mathfrak{M})$ mit den Intensitätsmaßen Λ_1 und Λ_2 auf dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$ und es gelte $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$. Dann gilt für jede abgeschlossene Menge $X_o \in \mathfrak{B}$:

   (1) $P_{\Lambda_{1,o}}$ und $P_{\Lambda_{2,o}}$ sind äquivalente POISSONsche Verteilungsgesetze auf $(M_o, \mathfrak{M}_o)$ mit den Intensitätsmaßen ${}_o\Lambda_1$ und ${}_o\Lambda_2$ auf dem Phasenraum $(X_o, \mathfrak{X}_o)$,

   (2) die Wahrschenlichkeitsmaße $P^{(o)}_{\Lambda_1}$ und $P^{(o)}_{\Lambda_2}$ auf dem meßbaren Raum $\left(M, \mathfrak{M}^{(o)}\right)$ sind äquivalent und

   (3) die Log-Likelihood-Quotienten L_o von $P_{\Lambda_{1,o}}$ und $P_{\Lambda_{2,o}}$ bzw. $L^{(o)}$ von $P^{(o)}_{\Lambda_1}$ und $P^{(o)}_{\Lambda_2}$ besitzen das gleiche unbegrenzt teilbare Verteilungsgesetz.

4. $F(x)$ bzw. $f(t)$ seien die Verteilungsfunktion bzw. charakteristische Funktion einer Zufallsgröße X, die ein unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz besitzt. Es gelte:

$$M(X^2) < \infty \quad \text{und} \quad M(X) = 0.$$

   $\Phi(x)$ bzw. $g(t)$ seien die Verteilungsfunktion bzw. die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung. Für ein $a > 1$ gelte:

$$\|(K - \delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}} < \frac{a^2 - 1}{a^2} =: b.$$

   Dabei bezeichnet K das kanonische Maß aus der KOLMOGOROFF-Formel (1.4) für die Darstellung der charakteristischen Funktion $f(t)$. Dann gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \Phi(x)| \leq R_{a,k}\left(\|(K - \delta_0)\|^*_{\mathrm{BL}}\right) \quad \text{mit}$$
$$R_{a,k}(x) = \frac{k}{2\pi}\left(a^2 + a^3 \frac{\sqrt{2\pi}}{3}\right) \cdot x + \frac{2c(k)}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x}{b - x}$$

   für $0 \leq x < b$ und $k = 1, 2, \ldots$ bzw. $a > 1$. Dabei bezeichnen $c(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, die im Satz 4.1 auftretenden Konstanten.