Ein Beispiel für ähnliche Matrizen

Es sei $\mathfrak{B}_I = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und

$$A = A_I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

eine Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{B}_I$. Weiterhin sei

$$T = T_I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

eine Transformationsmatrix bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{B}_I$. Wegen $\operatorname{rang}(T) = 2$ ist $\mathfrak{B}_T = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ mit

$$\vec{x}_1 = T\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\vec{x}_2 = T\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$. Wegen $\det(T) = -3 \neq 0$ ist T invertierbar und

$$T^{-1} = T_I^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Somit erhält man durch

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

per Definition der Ähnlichkeit von Matrizen eine zu der Matrix A ähnliche Matrix B. Sei nun

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ein Vektor. Offensichtlich hat $\vec{x}$ bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{B}_I$ den Koordinatenvektor

$$\vec{x}_I = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

da

$$3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bezüglich der Basis $\mathfrak{B}_T$ besitzt $\vec{x}$ den Koordinatenvektor

$$\vec{x}_T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

da

$$\frac{5}{3}\vec{x}_1 + \frac{2}{5}\vec{x}_2 = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Es ist

$$A\vec{x} = A_I\vec{x}_I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 25 \end{bmatrix} = \vec{y}_I = \vec{y}$$

und andererseits

$$B\vec{x}_T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 117 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{y}_T$$

sowie

$$\vec{y}_T = 13\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 = 13 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 25 \end{bmatrix} = \vec{y}$$

also

$$A_I\vec{x}_I = B\vec{x}_T \quad \text{bzw.} \quad B = B_T, \quad \text{d.h.}$$

die Matrix B realisiert dieselbe lineare Abbildung wie die Matrix A, jedoch bezüglich der Basis $\mathfrak{B}_T$.