Exklusive Summenzahlen von Hypergraphen

M. Sonntag (Institut für Diskrete Mathematik und Algebra, TU Bergakademie Freiberg)
in Kooperation mit
H.-M. Teichert (Institut für Mathematik, Universität zu Lübeck)

Summenzahl / Summenhypergraph

Das Konzept des Summengraphen wurde 1990 von Harary [1] eingeführt. Die besondere Bedeutung der Summengraphen resultiert daraus, dass die vollständige Information über den Summengraphen bereits in seiner Knotenmenge, die als Menge natürlicher Zahlen betrachtet wird, enthalten ist. In den letzten 20 Jahren wurde dieses Gebiet stark beforscht, einen Überblick dazu findet man etwa in Gallian [2]. In Teichert [6] wurde das Konzept der Summengraphen auf Hypergraphen verallgemeinert.

Sei $S \subset \mathbb{N}^+$ endlich und $\underline{d}, \overline{d} \in \mathbb{N}^+$, so dass $2 \leq \underline{d} \leq \overline{d}$.

$\mathcal{H}^+_{\underline{d},\overline{d}}(S) = (V, \mathcal{E})$ ist $(\underline{d}, \overline{d})$-*Summenhypergraph von* S genau dann, wenn $V = S$ und

$$\mathcal{E} = \left\{ e \subseteq S \,:\, \underline{d} \leq |e| \leq \overline{d} \text{ und } \sum_{x \in e} x \in S \right\}.$$

Der Hypergraph $\mathcal{H}$ ist ein *Summenhypergraph* genau dann, wenn es eine Menge $S \subset \mathbb{N}^+$ und $\underline{d}, \overline{d} \in \mathbb{N}^+$ gibt, so dass $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^+_{\underline{d},\overline{d}}(S)$.

Für einen Hypergraphen $\mathcal{H}$ ist seine *Summenzahl* $\sigma = \sigma(\mathcal{H})$ die minimale Anzahl isolierter Knoten $y_1, \ldots, y_\sigma \notin V$, so dass $\mathcal{H} \cup \{y_1, \ldots, y_\sigma\}$ ein Summenhypergraph ist. Für zusammenhängendes $\mathcal{H}$ ist offensichtlich $\sigma(\mathcal{H}) \geq 1$.

Zunächst führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$d_{min} := d_{min}(\mathcal{H}) := \min\{\, |e| \,:\, e \in \mathcal{E} \,\}$ und $d_{max} := d_{max}(\mathcal{H}) := \max\{\, |e| \,:\, e \in \mathcal{E} \,\}$.

Des Weiteren sei $\mathcal{H} \cup Y$ der Hypergraph, welcher aus einem Hypergraphen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ und einer Menge $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$ isolierter Knoten besteht, die nicht zu V gehören. Eine injektive Abbildung $r \,:\, V \cup Y \longrightarrow \mathbb{N}^+$ ist eine *Summennummerierung* von $\mathcal{H}$ genau dann, wenn $\mathcal{H} \cup Y \simeq \mathcal{H}^+_{d_{min},d_{max}}(S)$, wobei $S = \{r(v) \,:\, v \in V \cup Y\}$. Im Fall $|Y| = \sigma(\mathcal{H})$ heißt die Summennummerierung r *optimal*.

Für eine gegebene Summennummerierung r heißt der Knoten $w \in V \cup Y$ ein *arbeitender Knoten* genau dann, wenn es Knoten $v_1, \ldots, v_l \in V \cup Y$ mit $r(w) = \sum_{i=1}^{l} r(v_i)$ gibt, wobei $d_{min} \leq l \leq d_{max}$. Wir schreiben oft kurz $r^*(\{v_1, \ldots, v_l\}) = \sum_{i=1}^{l} r(v_i)$. Betrachten wir r^* als Nummerierung $r^* \,:\, \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}^+$ der Hyperkanten des Hypergraphen $\mathcal{H}$, so nennen wir r^* die *durch die Knotennummerierung* r *induzierte Kantennummerierung*.

Eine Summennummerierung von $\mathcal{H} \cup Y$ ist *exklusiv*, wenn alle arbeitenden Knoten zu Y gehören. Die minimale Anzahl von Knoten in Y, die für eine exklusive Summennummerierung von $\mathcal{H} \cup Y$ benötigt wird, heißt die *exklusive Summenzahl* $\varepsilon(\mathcal{H})$. Wie oben heißt im Fall $|Y| = \varepsilon(\mathcal{H})$ die zugehörige exklusive Summennummerierung *optimal*.

Diese Definitionen implizieren $1 \leq \varepsilon(\mathcal{H})$ und $\sigma(\mathcal{H}) \leq \varepsilon(\mathcal{H})$, für jeden Hypergraphen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \neq \emptyset$.

Im Fall $d = 2$ erhält man die entsprechenden Begriffe für Graphen. So wurden im Jahr 2005 die Begriffe *exklusive Summennummerierung* und *exklusive Summenzahl* für Graphen definiert. In verschiedenen Publikationen wurden die exklusiven Summenzahlen für diverse Graphenklassen bestimmt; einen Überblick über die wichtigsten Resultate findet man in [4] oder [5].

Aufbauend auf einigen Ergebnissen aus [6] für sogenannte *d-uniforme* vollständige bzw. *d-partite* vollständige Hypergraphen, welche implizit die exklusive Summenzahl dieser Hypergraphenklassen enthalten, wurde die Frage untersucht, inwieweit sich Ergebnisse für die exklusive Summenzahl von Graphen auf Hypergraphen verallgemeinern lassen. Neben einigen weiteren Resultaten konnte dabei – unter der Voraussetzung, dass jede Hyperkante einen Knoten vom Grad 1 enthält – als Hauptergebnis sogar eine Charakterisierung der Hypergraphen mit exklusiver Summenzahl 1 erhalten werden:

Satz ([3]). *Sei $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ ein Hypergraph, in welchem jede Hyperkante einen Knoten vom Grad 1 enthält. Es gilt:*

$$\varepsilon(\mathcal{H}) = 1 \;\; \text{genau dann, wenn} \;\; \forall e, e' \in \mathcal{E}: \; |e \setminus e'| = 1 \implies 1 < |e' \setminus e| < d_{min}.$$

Dieses Resultat geht weit über die aus der Literatur bekannte Ergebnisse für Graphen hinaus:

- Zum Ersten sind – bis auf Trivialfälle – kaum Graphen mit exklusiver Summenzahl 1 bekannt.
- Zum Zweiten findet man in der Literatur zwar etliche Resultate zu exklusiven Summenzahlen von einfachen Graphenklassen, jedoch keine Charakterisierungen von Graphen vorgegebener Summenzahl.

Literatur

[1] F. Harary, *Sum graphs and difference graphs*; Congr. Numer. **72** (1990), 101-108.

[2] J.A. Gallian, *A dynamic survey of graph labeling*; Electronic J. of Comb. **19** (2012), # DS6, 144-150.

[3] M. Sonntag, H.-M. Teichert, *Some results on exclusive sum labelings of hypergraphs*; eingereicht bei Graphs and Combinatorics (2013), 1-12

[4] M. Miller, D. Patel, J. Ryan, K.A. Sugeng, Slamin and M. Tuga, *Exclusive sum labeling of graphs*; JCMCC **55** (2005), 137-148.

[5] J. Ryan, *Exclusive sum labeling of graphs: a survey*; AKCE J. Graphs Combin. **6** (2009) 1, 113-126.

[6] H.-M. Teichert, *The sum number of d-partite complete hypergraphs*; Disc. Math. Graph Theory **19** (1999), 79-91.