Iterierte Nachbarschaftsgraphen

M. Sonntag (Institut für Diskrete Mathematik und Algebra, TU Bergakademie Freiberg)
H.-M. Teichert (Institut für Mathematik, Universität zu Lübeck)

Nachbarschaftsgraph / Operationen auf Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein schlichter, ungerichteter Graph. $N(G) = (V, E_N)$ ist der *Nachbarschaftsgraph* des Graphen G genau dann, wenn

$$E_N = \{\{a, b\} \,|\, a \neq b \,\wedge\, \exists x \,\in V : \,\{x, a\} \in E \,\wedge\, \{x, b\} \in E\}.$$

Der Nachbarschaftsgraph $N(G)$ eines Graphen G liefert in übersichtlicher Form wichtige Informationen über gemeinsame Nachbarknoten der Knoten des zu Grunde liegenden Graphen G.
In Fortsetzung der Strukturuntersuchungen von Nachbarschaftsgraphen in [1] wird nun die iterierte Bildung von Nachbarschaftsgraphen betrachtet:
Für $k \geq 1$ ist der *k-iterierte Nachbarschaftsgraph* $N^k(G)$ des Graphen G der Nachbarschaftsgraph von $N^{k-1}(G)$, wobei $N^0(G) := G$.
Hieraus ergeben sich Fragen nach der Struktur von $N^k(G)$ für große k, nach hinreichenden Bedingungen für die Vollständigkeit von $N^k(G)$ für hinreichend großes k und schließlich nach dem kleinsten k (der sogenannten *Nachbarschaftsvollständigkeitszahl* $cn(G)$), für welches $N^k(G)$ isomorph zum vollständigen Graphen K_n wird, sofern ein solches k existiert.
Die ersten beiden Fragen wurden von G. Exoo und F. Harary geklärt. So besteht für hinreichend großes k der Graph $N^k(G)$ stets aus ungeraden Kreisen und (gegebenenfalls trivialen) vollständigen Graphen. Für zusammenhängende, nicht paare Graphen G, die keine ungeraden Kreise sind, gibt es immer ein k mit $N^k(G)$ vollständig.
Ein wesentliches Ergebnis unseres Forschungsprojektes ist der folgende

Satz ([2]). *Für einen dreiecksfreien, zusammenhängenden, nicht paaren Graphen G, der kein ungerader Kreis ist, sei*

$$s' := \min\left\{\frac{l(C)-1}{2} + \left\lceil \frac{s_{max}(C)}{2} \right\rceil \;\middle|\; C : \textit{ist ungerader Kreis in } G\right\}.$$

Dabei bezeichne $l(C)$ die Länge des Kreises C und $s_{max}(C)$ den maximalen Abstand eines beliebigen Knotens von dem Kreis C.
Dann gilt: $\quad cn(G) \leq \lceil 2 + \log_2(s' + 1) \rceil.$

Es konnte gezeigt werden, dass diese obere Schranke schärfer als die bisher in der Literatur bekannten Schranken für $cn(G)$ ist.

[1] Schiermeyer, I.; Sonntag, M.; Teichert, H.-M.: *Structural properties and hamiltonicity of neighborhood graphs*; Graphs and Combinatorics 26 (2010), 433-456.

[2] Sonntag, M.; Teichert, H.-M.: *Iterated neighborhood graphs*; erscheint in Discussiones Mathematicae Graph Theory.