Zwei-Ebenen-Optimierung: Transformation mit Hilfe der Optimalwertfunktion – Motivation, Perspektiven und Ergebnisse

S. Dempe, A. G. Mersha, S. Franke, S. Lohse (Institut für Numerische Mathematik und Optimierung)

Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben / parametrisches Optimierungsproblem / nichtkonvexe Optimierungsaufgabe / Optimierungsaufgabe mit Komplementaritätsbedingungen / nichtdifferenzierbare nichtkonvexe Optimierungsaufgabe

Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben (ZEOA) sind Probleme der mathematischen Optimierung, bei denen die Menge der zulässigen Lösungen (zum Teil) durch eine zweite (parametrische) Optimierungsaufgabe beschrieben ist. Mathematisch lassen sie sich wie folgt formulieren:

Das parametrische Optimierungsproblem (der unteren Ebene) sei gegeben als

$$\min_y \{ f(x,y) : g(x,y) \le 0 \}$$

wobei $f : R^m \times R^n \to R$ und $g : R^m \times R^n \to R^p$ gegebene (stetig differenzierbare) Funktionen sind. Die Menge der optimalen Lösungen dieser Aufgabe für einen fixierten Wert x sei mit **O(x)**, der optimale Zielfunktionswert dieser Aufgabe sei mit **v(x)** bezeichnet.

Dann schreibt sich die Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe als

$$\min\{F(x,y) : x \in X, y \in O(x)\} .$$

Hier ist X eine gegebene abgeschlossene Menge. Diese Aufgabe ist eine nichtkonvexe Optimierungsaufgabe. Sie kann als eine Verallgemeinerung hierarchischer Spiele (sogenannter Stackelberg-Spiele) interpretiert werden und besitzt viele Anwendungen. Die Monographie [1] gibt eine gute Einführung in diese Klasse von Optimierungsaufgaben. Die Bibliographie [2] gibt einen Überblick über Veröffentlichungen zu Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben.

Zur Lösung dieser Aufgaben muss diese in eine klassische Optimierungsaufgabe überführt werden. Dazu gibt es im wesentlichen zwei Zugänge:

1. Das Problem der unteren Ebene kann (wenn es eine reguläre konvexe, parametrische Optimierungsaufgabe ist) mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen transformiert werden. Es entsteht eine Optimierungsaufgabe mit Komplementaritätsbedingungen (MPEC, MPCC), die in der Literatur intensiv untersucht wurde. Die meisten Zugänge zur Lösung der (ZEOA) benutzen diesen Zugang mit der (nie bewiesenen) Behauptung, das (MPCC) sei äquivalent zur (ZEOA). In der Arbeit [3] konnten wir nachweisen, dass dies nur für die globale Lösung korrekt ist. Lokal optimale Lösungen des (MPCC) entsprechen im allgemeinen keiner lokal optimalen Lösung der (ZEOA). Die Arbeit [4] beschreibt generische Eigenschaften für spezielle Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben.
2. Lösungsalgorithmen für nichtkonvexe (und auch noch nicht reguläre) Optimierungsaufgaben berechnen stationäre Lösungen, im besten Fall lokal

optimale Lösungen. Damit ist der Zugang zur Lösung von (ZEOA) über die Lösung von (MPCC) zumindest problematisch. A. G. Mersha [5], [6] konnte Algorithmen zur Lösung von (MPCC) so anpassen, dass sie stationäre Punkte für die (ZEOA) berechnen.

3. Unter Verwendung der Optimalwertfunktion wird die (ZEOA) transformiert in die Aufgabe
$$\min\{F(x,y) : x \in X, g(x,y) \le 0, f(x,y) \le v(x)\},$$
die eine nichtdifferenzierbare nichtkonvexe Optimierungsaufgabe ist. In den Arbeiten [7], [8] werden Optimalitätsbedingungen für diese Aufgabe beschrieben.
4. In der Arbeit [9] werden diskrete Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben untersucht, eine Klasse von Aufgaben mit vielen Anwendungen, die in der Literatur bisher zu wenig Beachtung gefunden haben.

Die im Punkt 3. beschriebene Optimierungsaufgabe ist vollkommen äquivalent zur (ZEOA), sie ist eine nichtdifferenzierbare Optimierungsaufgabe eines speziellen Typs. Sowohl nichtdifferenzierbare Optimierungsaufgaben als auch Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben werden derzeit sehr intensiv international untersucht. Schwerpunkt in der Zukunft sind Lösungsalgorithmen für diese Aufgabe. Eine Möglichkeit ist die Verwendung einer exakten Straffunktion bei Zugrundelegung der partiellen Calmness-Bedingung. Dieser Weg wurde in der Arbeit [10] gewiesen, ist aber bisher (noch) nicht zufriedenstellend bearbeitet worden.

Literatur:

[1] S. Dempe: Foundations of Bilevel Programming, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[2] S. Dempe: Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Optimization, 52 (2003) 333-359.

[3] S. Dempe, J. Dutta: Is Bilevel Programming a Special Case of a Mathematical Program with Complementarity Constraints? (akzeptiert in der Zeitschrift Mathematical Programming, Januar 2010, Preprint 2009 – 03, Fakultät für Mathematik und Informatik der TU Bergakademie Freiberg).

[4] S. Dempe, H. Günzel, H. Th. Jongen: On reducibility in bilevel problems. SIAM Journal on Optimization 20 (2009), pp. 718-727.

[5] A. G. Mersha: Solution Methods for Bilevel Programming Problems, Diss. TU Bergakademie Freiberg, 2008.

[6] A. G. Mersha, S. Dempe: Direct Search Algorithm for Bilevel Programming Problems, Computational Optimization and Applications. Zur Veröffentlichung angenommen September 2009, Preprint 2009 – 01, Fakultät für Mathematik und Informatik der TU Bergakademie Freiberg.

[7] S. Dempe, N. Gadhi: Second order optimality conditions for bilevel set optimization problems, Journal of Global Optimization zur Veröffentlichung angenommen, Elektronische Vorabveröffentlichung: September 2009.

[8] S. Dempe, N. Gadhi: Optimality results for a specific bilevel optimization problem. Optimization (zur Veröffentlichung angenommen Dezember 2009).

[9] D. Fanghänel, S. Dempe: Bilevel programming with discrete lower level problems. Optimization 58 (2009), 1029–1047.

[10] S. Dempe, J. Dutta, B. Mordukhovich: New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming, Optimization 56 (2007) 5 & 6, 577-604.