

Nichtlineare Geostatistik mit B-Splines

K. Gerald van den Boogaart, Silke Seemann, Institut für Stochastik

Geostatistik / Nichtlineares Kriging / Geostatistische Simulation / Abbauplanung

Im Rahmen der Abbauplanung von Festgesteinslagerstätten ist die Auswahl des abzubauenden Materials einerseits und aufgrund der Diskontierung der Gewinne auch die Reihenfolge des Abbaus andererseits für den Wert einer Lagerstätte von entscheidender Bedeutung, da der erzielbare Kaufpreis vom Gewinn abhängt. Je genauer man die räumliche Struktur der Lagerstätte kennt, desto höhere Gewinne kann man durch geeignete Abbauführung erreichen. Nun ist es aber prinzipiell unmöglich, die Lagerstätte vor ihrem Abbau beliebig genau zu beproben, so dass jede geostatistische Interpolation mit Fehlern behaftet ist. Die Optimierung des Abbauplans muss also die Unsicherheit unserer Kenntnis über die Lagerstätte mit einbeziehen. Dazu werden normalerweise geostatistische Simulationsmethoden verwendet. Diese haben sich jedoch für manche Lagerstättentypen als für diesen Zweck nicht genau genug erwiesen.

Die klassische Geostatistik verwendet lineare Vorhersagefunktionen, um die bedingten Erwartungswerte der Beobachtungen an unbeprobten Orten und in zukünftigen Abbaublöcken vorherzusagen. Die bedingte Varianz wird als von den Beobachtungen unabhängig angesehen. Diese linearen Vorhersagefunktionen sind als bedingte Erwartungswerte und diese festen (Kriging)-Varianzen sind für Gaußsche Zufallsfelder nachweislich korrekt. Die wesentliche Eigenschaft Gaußscher Zufallsfelder ist, dass alle (also auch alle höherdimensionalen) Randverteilungen multivariate Normalverteilungen sind. Im Rahmen der Abbauplanung für Festgesteinslagerstätten treten allerdings Zufallsfelder von Vererzungsgraden auf, die diese Eigenschaft nicht erfüllen. In einer Kooperation mit dem Institut für Bergbau der McGill Universität Montreal sollten nun geostatistische Verfahren entwickelt werden, um auch bedingte Verteilungen für solche Nichtgaußschen Zufallsfelder zu bestimmen, um so korrekte Simulationsalgorithmen für die an den Messwerten bedingten Vererzungsgrade auch für solche realen geologischen Situationen zu entwickeln.

Die verwendete Lösungsidee basiert auf vier Ideen: der Regressionsformulierung der Geostatistik, der Approximation nichtlinearer Vorhersagefunktionen durch B-Splines, dem Konzept des Training Image aus der kategoriellen Geostatistik (z.B. SNESIM, FILTERSIM) und der kanonischen Darstellung von Exponentialfamilien.

Die kanonische Darstellung der Exponentialfamilie erlaubt es, für einen gegebenen Satz von bedingten Erwartungswerten wählbarer Statistiken eine zugehörige Verteilung maximaler Zufälligkeit anzugeben. Um eine möglichst hohe Flexibilität der zu schätzenden Verteilung zu gewährleisten, verwenden wir als suffiziente Statistiken der Exponentialfamilie eine gut approximierende Basis aus der Approximationstheorie, nämlich eine angepasste B-Spline-Basis. Dadurch lassen sich alle glatten (bezogen auf die Logdichte) und beschränkten Verteilungen (bezogen auf die Werte) gut approximieren. Es genügt nun also, die bedingten Erwartungswerte dieser B-Spline-Basiselemente vorherzusagen. Dieser bedingte Erwartungswert wird als glatt (mehrfach stetig differenzierbar) abhängig von den Beobachtungsdaten angenommen. Wieder wird diese Funktion durch einen B-Spline, der allerdings nun multivariat zu wählen ist, approximiert. Unbekannt sind lediglich die Koeffizienten des Splines. Es

konnte ein Weg gefunden werden, diese Koeffizienten mittels der Regressionsformulierung der Geostatistik aus Beispielrealisierungen des Prozesses (Training Images) zu schätzen. Dadurch können nun Approximationen bedingter Verteilungen für nicht-gaußsche Zufallsfelder unbekannter Verteilungsstruktur ermittelt werden.

Durch die Wahl maximalentropischer Verteilungen zur Approximation wird sichergestellt, dass die erzeugten Verteilungen und bedingten Simulationen eher eine zu hohe als eine zu niedrige Zufälligkeit besitzen, so dass die Approximation keine Artefakte hinzufügt.

Diese neue nichtlineare Theorie der Geostatistik erlaubt, einige seit langem offene Probleme zu lösen:

- Vorhersage nichtlinearer Transformationen von Zufallsfeldern
- Vorhersage der bedingten Varianz aus den Daten
- Vorhersage nichtlinearer Blockfunktionale (z.B. hydraulische Kenngrößen)
- Schätzung bedingter Verteilungen in nichttransgaußschen Zufallsfeldern
- Sequentielle Simulation für nichttransgaußsche Zufallsfelder

K. Gerald van den Boogaart, Roussos Dimitrakopoulos (2009) Nonlinear geostatistics based on B-splines: An Overview, Cosmo Research Report 2009, Montreal