

Eine spezielle Klasse von Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben

S. Lohse, S. Dempe (Institut für Numerische Mathematik und Optimierung)

Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben sind mathematische Probleme, welche als Nebenbedingung eine parametrische Optimierungsaufgabe beinhaltet, die als untere Ebene bezeichnet wird. In vielen praktischen Anwendungen, wie der Bestimmung einer optimalen Mautgebühr, besitzt man keinerlei Kontrolle über die Auswahl einer optimalen Lösung der unteren Ebene, für den Fall dass diese Lösung nicht eindeutig bestimmt ist. Als Ausweg haben sich in der Literatur daher zwei Vorgehensweisen etabliert. Eine Möglichkeit bietet der optimistische Ansatz, der darin besteht anzunehmen, dass die beste Optimallösung der unteren Ebene bezüglich der Zielfunktion der oberen Ebene realisiert wird. Dieser Zugang wurde in der Literatur sowohl theoretisch als auch algorithmisch ausgiebig untersucht, wofür beispielsweise auf [1, 2, 3] verwiesen sei. Bei der pessimistischen Herangehensweise geht man hingegen davon aus, dass die schlechteste Optimallösung der unteren Ebene bezüglich der Zielfunktion der oberen Ebene für jeden Parameterwert ausgewählt wird. Diese Betrachtungsweise ist in der Literatur eher selten, weil es bereits sehr schwierig ist die Existenz einer Lösung zu sichern, selbst bei linearen Zwei-Ebenen-Optimierungsproblemen. Praktisch gesehen gab es bisher auch noch keinerlei Algorithmen zur Bestimmung von pessimistischen Lösungen.

Um nun einige Resultate zu erzielen, wurde eine spezielle Struktur für die Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe vorausgesetzt, welche darin besteht, dass die untere Ebene eine lineare parametrische Optimierungsaufgabe mit Parametern b in der rechten Seite und c in der Zielfunktion ist, die Nebenbedingungen an die Parameter separiert gestellt sind und die Zielfunktion der oberen Ebene unabhängig von c ist. Damit lässt sich nun zeigen, dass diese Aufgabenklasse unter wenig restriktiven Voraussetzungen eine pessimistische Lösung besitzt. Außerdem kann man für den linearen Fall einen auf der Enumeration von Eckpunkten basierenden Algorithmus beschreiben, welcher eine global pessimistische Lösung berechnet. Dieses Verfahren kann leicht modifiziert werden, um eine optimistische Lösung zu berechnen, wobei dieser Lösungsbegriff für die vorliegende Aufgabenklasse verallgemeinert wird. Außerdem lassen sich ein simplexähnliches Abstiegsverfahren zur Bestimmung einer lokal optimistischen Lösung sowie in Polynomialzeit überprüfbare Optimalitätsbedingungen konstruieren. Letzteres stellt im Allgemeinen selbst für lineare Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben ein \mathcal{NP} -vollständiges Problem dar.

Als Anwendungsgebiet dieser Aufgabenklasse kann man einerseits die Bestimmung einer besten schwach effizienten Lösung einer linearen Vektoroptimierungsaufgabe sehen, wobei hier volle Kontrolle über die Lösung der unteren Ebene vorliegt und damit der optimistische Zugang gerechtfertigt ist. Bei der Bestimmung einer optimalen Mautgebühr als Beispiel der inversen Optimierung liegt der Fall etwas anders, denn dort kann man ein solch kooperatives Verhalten nicht erwarten, weshalb hier unter Umständen der pessimistische Ansatz eher angebracht ist.

Literatur

- [1] S. Dempe: Foundations of Bilevel Programming, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [2] S. Dempe: Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Optimization 52, 2003, 333–359.
- [3] S. Dempe, J. Dutta: Is Bilevel Programming a Special Case of a Mathematical Program with Complementarity Constraints, Mathematical Programming, accepted.
- [4] S. Dempe, S. Lohse: Optimale Straßenbenutzungsgebühren - Modelle und ein Optimalitätstest, Preprint 2005-6, TU Bergakademie Freiberg.
- [5] S. Dempe, S. Lohse: Inverse Linear Programming, Recent Advances in Optimization, Springer Verlag, 2006, 19–28.
- [6] S. Dempe, S. Lohse: Optimale Mautgebühren, Die Kunst des Modellierens, Vieweg+Teubner Verlag, 2008, 113–126.
- [7] S. Lohse: Eine Spezielle Klasse von Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben, Dissertations, TU Bergakademie Freiberg, 2011.