

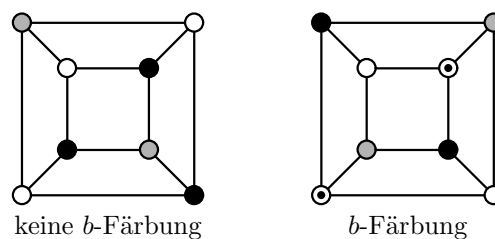
b-Färbungen von Graphen

M. Alkhateeb (Institut für Diskrete Mathematik und Algebra, TU Bergakademie Freiberg)
A. Kohl (Institut für Angewandte Analysis, TU Bergakademie Freiberg)

Graphenfärbungen / b-Färbungen / b-Kontinuität

Eine *b-Färbung* eines Graphen G mit k Farben ist eine zulässige Knotenfärbung bei der jede Farbklasse wenigstens einen farb-dominierenden Knoten enthält, d.h. einen Knoten, der Nachbarn in allen anderen $k - 1$ Farbklassen besitzt. Die *b-chromatische Zahl* $\chi_b(G)$ ist die größte Zahl k , für die eine *b-Färbung* von G mit k Farben existiert. Des Weiteren nennt man einen Graphen G *b-kontinuierlich*, wenn es *b-Färbungen* von G mit k Farben für alle natürlichen Zahlen k mit $\chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)$ gibt.

Das folgende Bild zeigt zwei Färbungen des Hyperwürfels Q_3 mit 3 bzw. 4 Farben, von denen nur die rechte eine *b-Färbung* ist. Dieser Graph ist nicht *b-kontinuierlich*, da für ihn $\chi(Q_3) = 2$ und $\chi_b(Q_3) = 4$ gelten, aber keine *b-Färbung* mit 3 Farben existiert.



Die Theorie der *b-Färbungen* lässt sich beispielsweise bei Clustering-Problemen in Data-Mining-Prozessen und bei der Klassifikation von Web Services anwenden.

Da die Bestimmung der *b-chromatischen Zahl* und die Entscheidung, ob ein Graph *b-kontinuierlich* ist, im Allgemeinen NP-schwere Probleme sind, ist man vor allem an Resultaten für spezielle Graphenklassen interessiert.

Im oben genannten Forschungsprojekt wurden für verschiedene Graphenklassen exakte Werte bzw. Schranken für die *b-chromatische Zahl* ermittelt. Als Beispiele seien hier Graphen mit Unabhängigkeitszahl 2, nicht zusammenhängende Graphen und bipartite Graphen genannt. Die Untersuchungen zu bipartiten Graphen G basieren vor allem auf der Betrachtung des *Bi-Komplements* \tilde{G} , einer bipartiten Variante des gewöhnlichen Komplements \bar{G} , die sich für die Berechnung von $\chi_b(G)$ als sehr nützlich erwies. Neben den Ergebnissen zur *b-chromatischen Zahl* wurden auch einige Ergebnisse zur *b-Kontinuität* erzielt. So konnte z.B. nachgewiesen werden, dass alle Graphen mit Unabhängigkeitszahl 2 *b-kontinuierlich* sind.

Aus dieser Forschung gingen bisher zwei zur Veröffentlichung vorgesehene Manuskripte hervor:

[1] M. Alkhateeb, A. Kohl: *Upper bounds on the b-chromatic number and results for restricted graph classes*

Manuskript (2010), akzeptiert von *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.

[2] M. Alkhateeb, A. Kohl: *Investigating the b-chromatic number of bipartite graphs by using the bicomplement*
Manuskript (2011), eingereicht bei Discrete Applied Mathematics.