

# Bayessche Inversion zur Parameteridentifikation in partiellen Differentialgleichungen

Oliver G. Ernst<sup>1</sup>, Björn Sprungk<sup>1</sup>, Hans-Jörg Starkloff<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut für Numerische Mathematik und Optimierung

<sup>2</sup>Institut für Stochastik

Eine häufige Problemstellung in Geo- wie Ingenieurswissenschaften ist es, aus Beobachtungen eines physikalischen Prozesses (z.B. Wärmeleitung bzw. Temperaturverlauf) auf Materialparameter des zu Grunde liegenden Mediums zu schließen (z.B. thermische Leitfähigkeit). Mathematisch entspricht dies der Identifikation eines Parameters in einer partiellen Differentialgleichung durch Beobachtungen der Lösung selbiger. Dies ist ein in der Regel schlecht gestelltes Problem, d.h., kleine Störungen in den Beobachtungen führen zu großen Störungen in den rekonstruierten Parametern, und bedarf der Regularisierung.

Eine Möglichkeit einer solchen Regularisierung bietet der Zugang der Bayesschen Inversion. Er erlaubt zudem eine flexible Modellierung von oft bereits vorhandenem Vorwissen über mögliche Parameterwerte mittels einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese a priori Verteilung wird mit Hilfe der Beobachtungen präzisiert bzw. aktualisiert. Das mathematische Werkzeug ist dabei die Bayessche Formel. In unserem Projekt untersuchen wir, wie die aus der Bayesschen Formel resultierende a posteriori Verteilung numerisch zugänglich gemacht

werden kann. Moderne Ansätze sind dabei beispielsweise Markov Chain Monte Carlo Sampling (MCMC) oder Extended bzw. Ensemble Kalman Filter (EKF, EnKF). Im Kontext von partiellen Differentialgleichungen mit hochdimensionalen Parametern können diese Methoden allerdings sehr schnell sehr kostspielig werden. Wir untersuchen inwieweit sich Surrogat-techniken zur Reduzierung des Rechenaufwandes einsetzen lassen. Dabei bauen wir auf unseren früheren Arbeiten über stochastische Galerkin- und Kollokationsmethoden zur Unsicherheitsquantifizierung auf.

Am Ende des Projektes soll die Bayessche Inversion erfolgreich im Kontext der Simulation eines realen, hydrogeologischen Problems angewandt werden. Die zu berechnende Größe ist dabei die Reisezeit von (Schad)Partikeln durch einen Grundwasserleiter, dessen Leitfähigkeit i.A. unbekannt ist und mittels geostatistischer und bayesscher Inversionsmethoden aus Messungen des Grundwasserstandes und der Durchlässigkeit an einzelnen Bohrstellen rekonstruiert werden muss.

*Förderung:* DFG Schwerpunktprogramm 1324