Wavelets auf Lie-Gruppen und homogenen Räumen.

Bearbeiter: S. Bernstein, S. Ebert

Wavelets sind nicht nur ein moderner Forschungsgegenstand, sondern werden in der Mathematik und in den Natur- und Ingenieurwissenschaften angewandt, wenn es darum geht Signale verschiedenster Art zu beschreiben, zu analysieren und zu bearbeiten. Die Vorteile der Wavelets bestehen darin, dass mit Hilfe von Dilatation und Translation ein „zooming-in-Effekt“ entsteht. Diese Eigenschaft von Wavelets im R^n ist nicht so einfach auf Mannigfaltigkeiten übertragbar. In vielen Fällen lässt sich zwar eine Translation finden, die sich daraus ergibt, dass die Mannigfaltigkeit selbst eine Gruppe ist bzw. durch eine Gruppenaktion auf der Mannigfaltigkeit, z. B. können Rotationen als Translationen der Kugeloberfläche betrachtet werden. Viel schwieriger wird es aber Dilatationen sinnvoll zu definieren. Für die Kugeloberfläche gelang dies zum einen durch Betrachtung von Faltungsintegralen (Freeden und Koautoren [3]) und zum anderen durch die Betrachtung der Kugeloberfläche als homogenem Raum (Antoine und Vandergheynst [1], [2]). In Verallgemeinerung dieser Ideen wurde der Begriff der Wavelets vom Diffusionstyp (diffusive wavelets) entwickelt, der es gestattet Wavelets auf Mannigfaltigkeiten wie kompakten Lie-Gruppen (Sphäre S^3) oder homogenen Räumen (Torus, Sphäre S^n) oder auch stratifizierten nicht kompakten Lie-Gruppen (Heisenberg-Gruppe) zu konstruieren. Bei Wavelets vom Diffusionstyp werden Translation und Dilatation voneinander getrennt betrachtet. Die Translation ist durch einen linken Verschiebungsoperator und damit eine linksreguläre Darstellung gegeben. Die linksreguläre Darstellung ist i. Allg. nicht irreduzibel in L^2 (G), zerfällt aber in irreduzible Komponenten. Jede dieser Komponenten kann als Skalenraum betrachtet werden. Um zulässige Wavelets zu finden, benötigt man einen Dilatationsoperator, der zwischen den verschiedenen Skalenräumen wirkt. Dies wird erreicht durch einen Evolutionsprozess, der der Wärmeleitung bzw. Diffusion entspricht. Ein entsprechender Diffusionsoperator ist mit Hilfe des Laplace- bzw. Sub-Laplace-Operators in allen vorher genannten Fällen verfügbar.

Der Vorteil der kompakten Lie-Gruppen besteht darin, dass eine Charakterisierung von L^2-Funktionen auf der Gruppe mit Hilfe irreduzibler Darstellungen gemäß dem Satz von Peter-Weyl möglich ist. Die Konstruktion von Wavelets vom Diffusionstyp geht über kompakte Lie-Gruppen und homogene Räume hinaus, da die wichtigste Eigenschaft, die Existenz eines Plancharel-Maßes bzw. die Gültigkeit einer Parsevalschen Gleichung auch im nicht kompakten Fall erfüllt sein kann. Dies gilt z. B. für stratifizierte Gruppen und insbesondere für die Heisenberg-Gruppe.

Wavelets werden auch zur Analyse von Radon-Transformationen eingesetzt. Eine spezielle Art von Radon-Transformation modelliert mathematisch das Problem der Rekonstruktion von Orientierungs-dichtefunktionen aus gemessenen Polfiguren wie es in der Kristallographie und den Material-wissenschaften vorkommt. Zur Untersuchung sogenannter scharfer Texturen, d. h. die Polfiguren bestehen nur aus einigen wenigen Delta-Peaks, eignen sich insbesondere Wavelets. Aus diesem Grund wurden Wavelets vom Diffusionstyp auf der Sphäre S^2, der Menge $S^2 \times S^2$ und der Gruppe SO(3) betrachtet. Da dem inversen Problem der Texturanalyse zu Grunde liegende kristallo-graphische Radon-Transformation eine Abbildung von SO(3) nach $S^2 \times S^2$ ist, wurde auch das Abbildungsverhalten der entsprechenden Wavelets untersucht. Eine Möglichkeit der numerischen Lösung des inversen Problems der Texturanalyse besteht in der Verwendung von Splines.

Dieses Projekt fand mit der Promotion [4] von Herrn Ebert seinen vorläufigen Abschluss. Herr Ebert hat seine Promotion innerhalb von 3 Jahren abgeschlossen und das Prädikat „summa cum laude“ für seine hervorragenden Leistungen erhalten. Innerhalb dieses Projekts sind 10 Veröffentlichungen ([5]-[14]) entstanden und die Forschungsergebnisse wurden auf verschiedenen internationalen Konferenzen, wie z. B. der AMAT 2010, ICNAAM 2009, 2010, ISAAC 2009 und 2011 sowie der ICCA9 vorgestellt.

[1] J. P. Antoine and P. Vandergheynst, *Wavelets on the 2-sphere: A group-theoretical approach*, Applied and Computational Harmonic Analysis, **7,**1999, 262-291,

[2] J. P. Antoine and P. Vandergheynst, Wavelets on the n-sphere and other manifolds, J. Math. Physics, **39**, 1998, 3987-4008,

[3] W. Freeden, T. Gervens, and M. Schreiner, Constructive Approximation on the Sphere with Applications to Geomathematics, Oxford Univ. Press, Oxford, 1999,

[4] S. Ebert, *Wavelets and Lie groups and homogeneous spaces*, PhD thesis, TU Bergakademie Freiberg, Department of Mathematics and Computer Sciences, 2011,

[5] S. Bernstein, S. Ebert, F. Sommen, *Diffusive Wavelets on Spheres and Spin groups*, eingereicht, (Preprint 2011-05 Fakultät für Mathematik und Informatik, TU Bergakademie Freiberg),

[6] S. Bernstein, S. Ebert, I. Pesenson, *Splines for Radon transforms on compact Lie groups with applications to SO(3)*, eingereicht bei Journal of Applied Functional Analysis,

[7] S. Ebert, J. Wirth, *Diffusive wavelets on groups and homogeneous spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 141A:497-520, 2011

[8] S. Bernstein, S. Ebert, R.S. Krausshar, *On the diffusion equation and diffusion wavelets on flat cylinders and the n-torus*, Math. Meth. Appl. Sci. 34, No. 4, 2011, 428-441,

[9] S. Bernstein, S. Ebert, Wa*velets on* S^3 *and SO(3) - Their construction, relation to each other and Radon transform of wavelets on SO(3)*, Math. Meth. Appl. Sci. 30, no. 16, 2010, 1895-1909,

[10] G. Bernardes, S. Bernstein, P. Cerejeiras, U. Kähler, *Wavelets invariant under finite reflection groups*, Math. Meth. Appl. Sci., vol. 33, issue 4, 2010, 473-484,

[11] S. Bernstein, S. Ebert, *Kernel based Wavelets on* S^3*, Journal of Concrete and Applicable Mathematics*, vol.8, no.1, 2010, 110-124,

[12] S. Bernstein, *Spherical Singular Integrals, Monogenic Kernels and Wavelets on the Three Dimensional Sphere*, Adv. Appl. Clifford Alg., **19**, no. 2, 2009, 173-189,

[13] S. Bernstein, P. Cerejeiras, S. Ebert, U. Kähler, *Non-zonal wavelets on* S^n, in: K. Gürlebeck, C. Könke (eds.) 18th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, Weimar, 2009 (auf CD),

[14] S. Bernstein, *Wavelets on the Group SO(3) and the sphere* S^n, AIP Conference Proceedings 936, Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Corfu, Greece, 16--20 September 2007, American Institute of Physics, Melville, New York, 2007, 713-716.