TECHNICAL UNIVERSITY BERGAKADEMIE
FREIBERG
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE
FREIBERG
FACULTY OF ECONOMICS AND BUSINESS ADMINISTRATION
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

Ursula Walther

Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

FREIBERG WORKING PAPERS
FREIBERGER ARBEITSPAPIERE

08
2002

The Faculty of Economics and Business Administration is an institution for teaching and research at the Technical University Bergakademie Freiberg (Saxony). For more detailed information about research and educational activities see our homepage in the World Wide Web (WWW): „www.wiwi.tu-freiberg.de/index“.

Addresses for correspondence:

Dr. Ursula Walther

Technische Universität Bergakademie Freiberg
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre
mit den Schwerpunkten Bankbetriebslehre,
Investition und Finanzierung

Lessingstr. 45
D-09596 Freiberg

Tel.: 03731/39-2440
Fax: 03731/39-4053
E-mail: ursula.walther@bwl.tu-freiberg.de

ISSN 0949-9970

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik vergleicht und bewertet Zahlungsströme. Dazu ist eine Bewertung von Zeit und von Unsicherheit notwendig. Aus einem mathematischen Blickwinkel gesehen ist die Bewertung eine Äquivalenzrelation. Diese Darstellungsweise gibt einen einheitlichen formalen Rahmen. In der Finanzmathematik wird Zeit durch Verzinsung bewertet. Bei der Bewertung der Unsicherheit stehen sich das klassische Bernoulli-Prinzip mit individuellen Präferenzen und die personenunabhängige, kapitalmarkttheoretische Preistheorie gegenüber. Der Artikel bettet beide Ansätze in den gleichen formalen Kontext ein, so dass Gemeinsamkeiten und Unterschiede verdeutlicht werden.

JEL-Klassifikation: G 12, C60
Schlagworte: Finanzmathematik, Äquivalenzprinzip, Zahlungsstrom, Bewertung.

Abstract

„The principle of equivalence in mathematics of finance“

The principle of equivalence in mathematics of finance compares and values cash flows. It requires a valuation of time and uncertainty. From a mathematical point of view the valuation is an equivalence relation. This perspective offers a unified formal framework. In mathematics of finance time is valued by interest. In valuation of uncertainty one distinguishes two approaches. The classical Bernoulli´s rule rests on individual preferences while modern capital market theory offers a preference free valuation methodology. This article discusses both approaches within the same formal context that clarifies similarities and differences.

JEL-classification: G12, C60
Keywords: principle of equivalence, financial mathematics, cash flow stream, valuation.

1 Einleitung

Die Aufgabenstellung, unterschiedliche Zahlungsströme zu vergleichen und zu bewerten, hat eine lange Tradition, die von den Anfängen des Versicherungswesens in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts bis zur modernen Finanzmarkttheorie reicht. Das Kernproblem ist stets das gleiche geblieben. Verschiedene Zahlungsströme, die eine ganz unterschiedliche Struktur aufweisen und unterschiedlichen Umwelteinflüssen unterliegen, sollen als gleichwertig beziehungsweise als besser oder schlechter klassifiziert werden. In der Versicherungsmathematik findet sich diese Problemstellung bei der Kalkulation der Versicherungsprämien. Der Einzahlungsstrom der Prämieneinnahmen muss den unsicheren Auszahlungsstrom der Versicherungsleistungen zuzüglich der Kosten decken. Ganz ähnlich soll in der Theorie der Kapitalmärkte der theoretische Preis eines Wertpapiers ein faires Äquivalent für den durch das Wertpapier generierten zukünftigen Rückzahlungsstrom sein.

Jeder Zahlungsstrom wird durch die drei Dimensionen Breite, zeitliche Struktur und Unsicherheit charakterisiert[1]. Ein Vergleich von Zahlungsströmen erfordert die Vergleichbarkeit dieser Eigenschaften. Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik beruht auf Verfahren, mit denen sowohl der Zeitbezug als auch die Unsicherheit von Zahlungsströmen in konsistenter Weise zu einer einzigen Maßgröße zusammengefasst werden.
In der Mathematik wird Gleichwertigkeit durch den Begriff der Äquivalenzrelation erfasst. Eine Äquivalenzrelation teilt die Elemente einer Menge in Klassen gleichwertiger Elemente. Können die Klassen zudem geordnet, das heißt in eine eindeutige Reihenfolge gebracht werden, so sind Aussagen über „besser“ und „schlechter“ möglich. Es können Entscheidungen gefällt werden.
Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik kann als mathematische Äquivalenzrelation beschrieben werden. Unter diesem Blickwinkel bildet die Finanzmathematik Äquivalenzklassen gleichwertiger Zahlungsströme, so genannte „Wertklassen“. Auf diesen Wertklassen liegt in natürlicher Weise eine Ordnung vor. Zudem lassen sich eine Addition und eine Multiplikation für Wertklassen definieren. Mit Zahlungsströmen kann gerechnet werden.

Ziel des vorliegenden Artikels ist eine Darstellung des Äquivalenzprinzips der Finanzmathematik im mathematischen Kontext der Äquivalenzrelation. Dadurch wird die einheitliche formale Struktur des finanzmathematischen Ansatzes besonders deutlich. In allen finanzma-

[1] SCHMIDT/TERBERGER (1997), S. 50.

thematischen Bewertungen wird die Zeit gemäß dem Opportunitätsprinzip mit dem Zinsertrag einer Alternativanlage bewertet. Dieses Bewertungskonzept für die Zeit kann mit verschiedenen Bewertungskonzepten für die Unsicherheit verknüpft werden. Dafür gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Ansätze[2]. Das klassische Bernoulli-Prinzip beruht auf individuellen Präferenzen. Das aus der modernen Kapitalmarkttheorie stammende Konzept der präferenzfreien Bewertung ist hingegen personenunabhängig und steht damit dem objektiven Ansatz der Verzinsung näher. In beiden Fällen genügt es, jeweils die Unsicherheitsstruktur fester Zeitpunkte zu bewerten. Die Verknüpfung über die Zeit hinweg kann einheitlich über das Konzept der Verzinsung erfolgen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Abschnitt 2 stellt vor dem Hintergrund der zentralen Problemfelder Zeitbezug und Unsicherheit das Grundkonzept der Finanzmathematik vor. In Abschnitt 3 wird die Einbettung des finanzmathematischen Verfahrens in das Konzept der mathematischen Äquivalenzrelation für den Fall sicherer Zahlungen dargestellt. Dabei werden verschiedene Varianten der Verzinsung betrachtet. Abschnitt 4 bezieht die Unsicherheit von Zahlungsströmen sowohl in präferenzabhängiger als auch präferenzfreier Bewertung in das Äquivalenzprinzip mit ein. Abschnitt 5 fasst die Ergebnisse zusammen.

2 Grundlagen des Äquivalenzprinzips

2.1 Zeitabhängigkeit und Unsicherheit

Der Wert einer Zahlung hängt wesentlich von dem Zeitpunkt ab, an dem sie erfolgt. Diese zunächst wenig spektakulär anmutende Beobachtung ist von zentraler Bedeutung für Entscheidungen über finanzielle Größen. Zusammen mit der Tatsache, dass zukünftige Zahlungen unsicher sind, kann sie sogar das Problemfeld der Finanzwirtschaft definieren:

„**Finance** is the study of how people allocate scarce resources *over time*. Two features that distinguish financial decisions from other resource allocation decisions are that the costs and benefits of financial decisions are (1) spread out over time and (2) usually not known with certainty in advance by either the decision makers or anybody else“ [3]

Der Zeitbezug von Zahlungen ist an einem einfachen Beispiel leicht zu verdeutlichen: Fließt ein heute benötigter Geldbetrag erst zu einem späteren Zeitpunkt zu, so muss das Geld für die

---

[2] Vgl. FRANKE/HAX (1999), S. 287.

[3] BODIE/MERTON (1998), S.2. Hervorhebungen im Original.

Zwischenzeit geliehen werden. Dafür sind üblicherweise Zinsen zu bezahlen. Dem Wert der Zahlung heute entspricht zu einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt nicht derselbe, sondern ein um Zinsen erhöhter Betrag. In vielen Anwendungen ist der Zeitbezug bereits in der Struktur des einzelnen Entscheidungsobjektes angelegt. So sind etwa bei der Planung eines komplexen Investitionsvorhabens mehrere, zeitlich aufeinander folgende Zu- und Abflüsse zu berücksichtigen. Es liegt ein Zahlungsstrom vor. Der Zeitbezug von Zahlungen ist eng mit dem Problem der Unsicherheit verknüpft. Denn alle in der Zukunft liegenden Ereignisse sind mit einem mehr oder weniger großen Maß an Unsicherheit behaftet. Planen wir heute den Kauf einer Aktie zu einem festen, späteren Zeitpunkt, so muss berücksichtigt werden, dass sich der Preis der Aktie im Zeitablauf verändern kann. Soll heute ein ausreichend großer Betrag für den geplanten Kauf zur Seite gelegt werden, so muss neben der Verzinsung auch die mögliche Änderung des Preises in die Planung miteinbezogen werden.

Die Bedeutung und der enge Zusammenhang zwischen Zeit und Unsicherheit waren schon vor fast 200 Jahren in der Versicherungswirtschaft wohl bekannt. So finden sich in der ersten Satzung der heutigen Gothaer Lebensversicherung auf Gegenseitigkeit aus dem Jahr 1827 unter dem Abschnitt „I. Grundbestimmungen“ die beiden folgenden Paragraphen:

§ 10 Die Einnahme der Bank besteht zunächst in den Prämien und Antrittsgeldern; die Ausgabe in der Auszahlung der Versicherungssummen und der Verwaltungskosten.
Was übrig bleibt wird verzinslich benutzt und bildet zugleich den Fonds der Bank.

§ 11 Der Fonds der Bank hat eine doppelte Bestimmung. Ein Theil desselben dient, wie es das Wesen der Sache mit sich bringt, als Reserve, zur vollständigen Deckung künftiger wahrscheinlicher Sterbefälle. Ein anderer Theil als Sicherheitsfonds, um für außerordentliche Fälle hinlängliche Mittel darzubieten.
Durch Beides wird den Theilnehmern wegen pünktlicher Erfüllung des Versprochenen für alle künftigen Zeiten Beruhigung und Sicherheit gewährt[4].

2.2 Grundkonzept und Annahmenrahmen der Finanzmathematik

Das Grundkonzept der Finanzmathematik besteht in einer wertmäßigen Erfassung von Zeitabständen. Diese Bewertung der Zeit kann mit verschiedenen Ansätzen zur Bewertung der Unsicherheit zu einer Bewertung unsicherer Zahlungsströme verknüpft werden. Aus entscheidungstheoretischer Sicht legt die Finanzmathematik damit eine Präferenzfunktion für die Zeit

4 Zitiert nach REICHEL (1976), S. 53.

fest[5]. Das Maß, mit dem die Zeit bewertet wird, sind Zinsen. Bei der Bewertung einer Zahlung im Zeitablauf wird der Wert aus dem Vergleich mit einer alternativen Verwendungsmöglichkeit ermittelt. Dieses Vorgehen entspricht dem Opportunitätsprinzip, das auch bei anderen Bewertungsprozessen in der Betriebswirtschafslehre angewandt wird[6]. Die Bewertung ist frei von individuellen Präferenzen und in diesem Sinne objektiv[7]. Die in der Finanzmathematik zur Bewertung von Zahlungen übliche Vergleichsalternative ist die Einzahlung auf ein Bankkonto. Sofern auch negative Zahlungen auftreten, wird aus der Einzahlung ein Abheben vom Konto. Die Vergleichsalternative besteht dann nicht notwendig aus einer Geldanlage, sondern kann eine Kreditaufnahme sein. Die Vergleichsanlage entspricht einem Girokonto mit Überziehungsmöglichkeit, bei dem jederzeit Ein- und Auszahlungen getätigt werden können[8].

Zur Festlegung der Verzinsung müssen bei einem Bankkonto Vereinbarungen über die Zinssätze und die Termine der Zinsgutschriften bestehen. Für beides gibt es eine Vielzahl von Varianten. Die Zinssätze können fix, das heißt im Voraus für alle betrachteten Zeiträume festgelegt, oder variabel sein. In beiden Fällen können die Zinsen vom Anlagezeitraum abhängen. Gilt jeweils für alle Anlagefristen der gleiche Zinssatz, so wird implizit eine flache Zinsstrukturkurve angenommen. Variieren die Zinssätze mit dem Anlagezeitraum, so können auch andere Formen der Zinsstrukturkurve abgebildet werden. Weiter können Zinssätze von einer Vielzahl zusätzlicher Faktoren abhängen. Beispielsweise sind in der Regel die Zinsen einer Kreditaufnahme höher als bei einer Geldanlage, der Zinssatz kann von der Person und der Höhe des aufgenommenen bzw. angelegten Betrages abhängen. Derartige Einflussfaktoren werden im Folgenden vernachlässigt. Bei einer variablen Verzinsung sind die zukünftigen Zinssätze im Vorfeld nicht bekannt. Der finanzmathematische Bewertungsprozess erfordert dann ein Verfahren zur Bewertung der daraus resultierenden Unsicherheit[9]. Auch dieser Fall der Verzinsung wird hier nicht betrachtet.

[5] Diese finanzmathematische Zeitpräferenz ist insbesondere zeitadditiv. Entscheidungstheoretisch stellt dies eine sehr restriktive Annahme dar, die vor dem Hintergrund der real existierenden Geldanlage- und Kreditaufnahmemöglichkeiten jedoch gerechtfertigt erscheint. Vgl. EISENFÜHR/WEBER (1999), S. 307 oder HUANG/LITZENBERGER (1988), S. 12-13.

[6] Beispiele sind die Marktzinsmethode im Bank-Rechnungswesen oder die Wahl des Kalkulationszinses bei der Unternehmensbewertung, vgl. z.B. PERRIDON/STEINER (1999), S. 221.

[7] Durch die Möglichkeit die Alternative konkret zu wählen besteht natürlich eine subjektiv geprägte Einflussnahme auf den Bewertungsprozess. Es geht jedoch keine individuelle Nutzenfunktion ein.

[8] In der Praxis ist der Verfügungsrahmen der Kreditaufnahme üblicherweise beschränkt. Dies wird hier vernachlässigt.

[9] Es ist eine Modellierung der Stochastik des Zinsprozesses bzw. der ganzen Zinsstruktur notwendig. Vgl. LOHMANN (1995), S. 42 – 123.

Die Zeitabstände, in denen die Zinsen gutgeschrieben werden, heißen Zinsperioden[10]. Je häufiger die Zinsgutschrift erfolgt, desto schneller wächst ein angelegter Kapitalbetrag an. Denn ab der Zinsgutschrift wird der Zinsbetrag in der nächsten Periode mitverzinst. Es entsteht ein Zinseszinseffekt, der mit der Häufigkeit der Zinsgutschriften stärker wird. Ist die Zinsperiode echt positiv, so werden die Zinsen zu einzelnen, diskreten Zeitpunkten gutgeschrieben. Man spricht von zeitdiskretem Zinszuschlag. Die kürzeste in der realen Welt vorkommende Zinsperiode ist 1 Tag. Theoretisch kann aber auch der Extremfall des kontinuierlichen bzw. zeitstetigen Zinszuschlags betrachtet werden. Hier ist jeder Zeitpunkt Zinszuschlagstermin, die Zinsperiode hat die Länge null.

Für jede Anwendung der Finanzmathematik müssen Zinsperiode und die Struktur der Zinssätze exakt fixiert sein. In den folgenden Abschnitten wird Verzinsung mit zeitdiskretem und zeitkontinuierlichem Zinszuschlag für flache und nicht-flache Zinsstrukturkurven bei festen Zinssätzen behandelt. Da Soll- und Habenzinsen als gleich angenommen werden, muss nicht beachtet werden, ob der Kontostand des Vergleichskontos positiv oder negativ ist. Außer der Zeit werden keine weiteren Einflussfaktoren auf den Zinssatz betrachtet. Für die formale Darstellung der Verzinsung ist es sinnvoll, eine Zeitachse zu wählen. Damit werden Zeitpunkte als reelle Zahlen auf dieser Achse interpretiert. Bei zeitstetigem Zinszuschlag ist jeder Punkt ein Zinszuschlagstermin. Die konkrete Zuordnung der Zeitpunkte zu den Zahlen, das heißt die Wahl eines Nullpunkts und das Festlegen der Zeitspanne zwischen zwei ganzen Zahlen ist unerheblich. Bei diskretem Zinszuschlag ist es sinnvoll, die Achse so zu wählen, dass die Zinszuschlagstermine gerade den ganzen Zahlen entsprechen. Eine derartige Zeitachse heißt zinsperiodenkonform, jede Zinsperiode hat die Länge eins[11].

3 Finanzmathematik als Äquivalenzrelation im Fall von Sicherheit

Aus einem mathematischen Blickwinkel heraus kann das Äquivalenzprinzip als Äquivalenzrelation formuliert werden[12]. Mit den bekannten Formeln der Finanzmathematik wird in einer geeignet gewählten Grundmenge die entsprechende Struktur geschaffen. Die Äquivalenzklassen, die Wertklassen der Finanzmathematik, bilden einen mathematischen Raum mit Addition und Skalarmultiplikation.

---

[10] Hierbei werden im Folgenden stets gleich lange Zinsperioden angenommen. Anders ist dies bei der so genannten „amerikanischen Zinsrechnung“, bei der mit jeder Zahlung ein Zinszuschlag erfolgt (z.B. SCHIERENBECK/ROLFES (1985)). Ebenfalls anders bei Gericht gemäß § 367 BGB (siehe z.B. ENKE/LOHMANN (1995)).

[11] Vgl. LOHMANN (1989), S. 11.

[12] Diese Darstellung findet sich bei LOHMANN (1989), S. 163 - 242.

3.1 Diskreter Zinszuschlag und flache Zinsstruktur

Wir betrachten zunächst den diskreten Fall mit positiver Zinsperiode bei flacher Zinsstruktur. Der Periodenzinssatz i_p ist für alle Laufzeiten konstant. Im ersten Schritt wird die Äquivalenzrelation für einzelne Zahlungen definiert. Eine Addition auf den Wertklassen bildet anschließend die Grundlage zur Erweiterung der Relation auf Zahlungsreihen. In der formalen Darstellung wird deutlich, dass das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik nur für Zahlungen gilt, die zu Zinszuschlagsterminen anfallen. Die Unmöglichkeit eines Äquivalenzprinzips für Zahlungen mit abweichenden Zahlungsterminen wird in Abschnitt 3.1.3 gezeigt. Außerhalb von 3.1.3 sind alle betrachteten Zeitpunkte t_x Zinszuschlagstermine.

3.1.1 Einzelne Zahlungen

Dem Betrag K_1 zum Zeitpunkt $t = t_1$ entspricht gemäß den bekannten Formeln der Zinseszinsrechnung[13] zum Zeitpunkt $t = t_2$ finanzmathematisch der Betrag $K_2 = K_1 \cdot \left(1 + i_p\right)^{t_2 - t_1}$. Dies gilt unabhängig davon, ob der Zeitpunkt t_2 zeitlich vor oder nach t_1 liegt. Die Differenz $t_2 - t_1$ ist die Anzahl der Zinsperioden zwischen t_1 und t_2.

Der formale Zusammenhang zwischen den beiden Zahlungen erzeugt eine Äquivalenzrelation auf einer geeignet definierten Grundmenge. Wir betrachten die Menge aller Zahlenpaare, die aus einer reellen und einer ganzen Zahl bestehen, $\mathbb{R}$ x $\mathbb{Z}$. Jede Zahlung mit einem festen Betrag *K*, die zu einem festen Zeitpunkt *t* erfolgt, lässt sich in dieser Menge durch das Zahlenpaar $(K, t) \in \mathbb{R}$ x $\mathbb{Z}$ beschreiben. Da umgekehrt auch jedes Zahlenpaar $(R, z) \in \mathbb{R}$ x $\mathbb{Z}$, das aus einer reellen und einer ganzen Zahl besteht, eindeutig als die Zahlung mit dem Betrag *R* zum Zeitpunkt z interpretiert werden kann, ist die Zuordnung eineindeutig. Die Menge $\mathbb{R}$ x $\mathbb{Z}$ beschreibt in vernünftiger Weise alle möglichen Zahlungen, die zu Zinszuschlagsterminen erfolgen.

Als nächstes definieren wird auf der Menge $\mathbb{R}$ x $\mathbb{Z}$ eine Relation[14], die mit dem Symbol ~ bezeichnet wird. Zwei Zahlenpaare (K_1, t_1) und (K_2, t_2) heißen äquivalent, wenn sie sich gemäß der Zinseszinsrechnung finanzmathematisch entsprechen[15]:

---

[13] Diese Formel ist in jedem Standardlehrbuch der Finanzmathematik zu finden, beispielsweise LOHMANN (1989), S. 31 oder LOCAREK-JUNGE (1997), S. 56.

[14] Der Begriff „Relation" ist fundamental in der Mathematik. Dabei ist eine Relation *R* auf einer Menge *X* nichts anderes als eine Teilmenge von $X \times X$. MEYBERG (1980), S. 13.

$(K_1,t_1) \sim (K_2,t_2)$ genau dann, wenn $K_2 = K_1 \cdot (1+i_p)^{t_2-t_1}$. (1)

Eine Relation ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie drei Eigenschaften erfüllt, die als Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bezeichnet werden[16].

Reflexivität: Es gilt $(K,t) \sim (K,t)$ für alle $(K,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.
Symmetrie: Aus $(K_1,t_1) \sim (K_2,t_2)$ folgt $(K_2,t_2) \sim (K_1,t_1)$.
Transitivität: Aus $(K_1,t_1) \sim (K_2,t_2)$ und $(K_2,t_2) \sim (K_3,t_3)$ folgt $(K_1,t_1) \sim (K_3,t_3)$.

Die gleichen Forderungen stellt die Entscheidungstheorie an rationale Präferenzen. Individuelle Präferenzen, die diese Eigenschaften nicht erfüllen, sind inkonsistent und gelten als irrational[17]. Für die hier definierte Relation ergeben sich alle drei Eigenschaften unmittelbar aus den Rechenregeln für Potenzen: Die Reflexivität ist wegen $K \cdot (1+i_p)^{t-t} = K \cdot (1+i_p)^0 = K$ erfüllt. Die Symmetrie ergibt sich aus der Umformung von $K_2 = K_1 \cdot (1+i_p)^{t_2-t_1}$ zu $\frac{K_2}{(1+i_p)^{t_2-t_1}} = K_1$ und weiter zu $K_1 = K_2 \cdot (1+i_p)^{t_1-t_2}$. Die Voraussetzungen der Transitivität $(K_1,t_1) \sim (K_2,t_2)$ und $(K_2,t_2) \sim (K_3,t_3)$ bedeuten laut Definition $K_2 = K_1 \cdot (1+i_p)^{t_2-t_1}$ und $K_3 = K_2 \cdot (1+i_p)^{t_3-t_2}$. Durch Einsetzen folgt $K_3 = K_1 \cdot (1+i_p)^{t_2-t_1} \cdot (1+i_p)^{t_3-t_2}$ $= K_1 \cdot (1+i_p)^{t_2-t_1+t_3-t_2}$ $= K_1 \cdot (1+i_p)^{t_3-t_1}$.

Die Bedeutung einer Äquivalenzrelation liegt darin, dass sie die Grundmenge überschneidungsfrei in so genannte Äquivalenzklassen zerlegt. Jedes einzelne Element (K,t) liegt in genau einer solchen Klasse. Daher beschreibt jedes Zahlenpaar (K,t) als „Repräsentant" seine Klasse $[K,t]$ eindeutig. Äquivalente Zahlenpaare beschreiben dieselbe Äquivalenzklasse.

---

15 Die Relation hängt vom Zinssatz i_p ab. Jeder Zinssatz beschreibt eine andere Relation. Statt ~ wäre ein Symbol der Art $\sim_{i_p}$ exakter. Zur Vereinfachung der Notation wird diese Ungenauigkeit in Kauf genommen.

16 Siehe z.B. MEYBERG (1980), S. 13.

17 Z.B. EISENFÜHR/WEBER (1999), S. 8.

Aus der Äquivalenz in der Grundmenge $(K_1,t_1)\sim(K_2,t_2)$ folgt die Gleichheit der Äquivalenzklassen $[K_1,t_1]=[K_2,t_2]$[18].

Die hier definierten Äquivalenzklassen lassen sich gut anschaulich interpretieren. In jeder Klasse befindet sich zu jeder „Zeit-Koordinate“ $t\in\mathbb{Z}$ jeweils genau ein Element (K,t). Innerhalb einer Klasse wächst mit wachsender Zeitkoordinate auch der Betrag und zwar gemäß Definition (1) gerade um den jeweiligen Zinsbetrag. Die $|\mathbb{Z}|$ Elemente einer Klasse beschreiben die durch Verzinsung entstehende Wertentwicklung eines Betrages im Zeitablauf. Daher werden sie auch als Wertklassen bezeichnet.
Hält man umgekehrt einen beliebigen Zeitpunkt $\bar{t}\in\mathbb{Z}$ fest, so durchlaufen die Element $(K,\bar{t})$ für $K\in\mathbb{R}$ alle Wertklassen. Alle reellen Zahlen treten als mögliche Zahlungen zum festen Zeitpunkt $\bar{t}$ auf und liegen in verschiedenen Wertklassen. Insbesondere befindet sich in jeder Klasse gerade ein Element mit der Zeit-Koordinate $t=0$. Der Betrag K dieses Elementes $(K,0)$ heißt im üblichen finanzmathematischen Sprachgebrauch der Barwert der Wertklasse.

Bemerkenswert ist, dass es für die Definition der Äquivalenzrelation völlig unerheblich ist, welchem Zinszuschlagstermin formal die Null $t=t_0=0$ zugeordnet wird. Da in die Definition der Äquivalenz laut (1) nur die Anzahl der Zinszuschlagstermine zwischen den Zahlungen eingeht, entstehen für jede Wahl der Null genau dieselben Klassen. Diese Unabhängigkeit spiegelt die Tatsache wider, dass bei der konkreten Wahl einer Zeitachse stets der Freiheitsgrad besteht, eine Null geeignet zu wählen. Bei der Betrachtung nicht-flacher Zinsstrukturkurven oder der Einbeziehung von Unsicherheit geht dieser Freiheitsgrad verloren.

Auf den Wertklassen besteht in natürlicher Weise eine Ordnung, die durch die Höhe der Zahlung zu einem festen Zeitpunkt definiert wird. Betrachten wir den Zeitpunkt null, so lautet die formale Definition:

$$[K_1,0]>[K_2,0] \quad\Leftrightarrow\quad K_1>K_2\,. \qquad (2)$$

Für jeden anderen Zeitpunkt $t\neq 0$ entsteht die gleiche Ordnung. Denn gemäß Definition (1) ist $(K_1,0)\sim\left(K_1\cdot(1+i_p)^{-t},t\right)$ und $(K_2,0)\sim\left(K_2\cdot(1+i_p)^{-t},t\right)$. Mit $K_1>K_2$ gilt aber auch

[18] Siehe z.B. MEYBERG (1980), S. 14.

$K_1 \cdot (1+i_p)^{-t} > K_2 \cdot (1+i_p)^{-t}$, so dass zu jedem Zeitpunkt dieselbe Ordnung resultiert. Ist die Zahlung K_1 zu irgendeinem Zeitpunkt höher als die Zahlung K_2, so bleibt dieses Verhältnis auch nach dem auf- oder abzinsen auf einen anderen Zeitpunkt bestehen.

3.1.2 Verknüpfungen auf Wertklassen und Zahlungsreihen

Mehrere Zahlungen können eine Handlungseinheit bilden. Dies lässt sich für die Wertklassen formal problemlos als Addition und Skalarmultiplikation bezüglich der reellen Zahlen formulieren. Die Definition erfolgt in der folgenden, nahe liegenden Weise:

Addition: $[K_1, t_1] + [K_2, t_2] = \left[K_1 + K_2 \cdot (1+i_p)^{t_2 - t_1}, t_1\right]$.

Skalarmultiplikation: $a \cdot [K_1, t_1] = [a \cdot K_1, t_1]$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Wie sich leicht nachrechnen lässt erfüllen diese Verknüpfungen eine Reihe bekannter Rechenregeln:

Kommutativgesetz: $[K_1, t_1] + [K_2, t_2] = [K_2, t_2] + [K_1, t_1]$. (K1)

Assoziativgesetz: $([K_1, t_1] + [K_2, t_2]) + [K_3, t_3] = [K_1, t_1] + ([K_2, t_2] + [K_3, t_3])$. (K2)

Als Nullelement bezeichnen wir die Wertklasse, die zu einem und damit zu allen Zeitpunkten die Zahlung mit dem Betrag null beschreibt $[0,0]$. Sie bildet das so genannte „neutrale Element“, für das gilt:

$[K, t] + [0,0] = [K, t]$ für alle Wertklassen $[K, t]$. (K3)

Zu jeder Wertklasse $[K, t]$ gibt es auch eine negative Wertklasse $-[K, t]$, deren Elemente Zahlungen mit dem entsprechenden negativen Wert beschreiben. Offensichtlich gilt

$[K, t] - [K, t] = [0,0]$. (K4)

Die Eigenschaften (K1) – (K4) bilden zusammen die Axiome einer kommutativen Gruppe[19]. Für die Skalarmultiplikation gelten ebenfalls das Assoziativgesetz sowie die beiden Transitivitätsgesetze:

$$(a \cdot b) \cdot [K,t] = a \cdot (b \cdot [K,t]) \quad \text{für alle } a,b \in \mathbb{R}, \qquad \text{(A)}$$

$$a \cdot ([K_1,t_1] + [K_2,t_2]) = a \cdot [K_1,t_1] + a \cdot [K_2,t_2], \qquad \text{(T1)}$$

$$(a + b) \cdot [K,t] = a \cdot [K,t] + b \cdot [K,t]. \qquad \text{(T2)}$$

Damit sind alle Axiome für einen Vektorraum über den reellen Zahlen erfüllt. Mit Wertklassen kann also in der nahe liegenden Weise formal korrekt gerechnet werden[20]. Mit Hilfe der Addition auf Wertklassen kann das Äquivalenzprinzip leicht auf Zahlungsreihen übertragen werden. Formal ist eine Zahlungsreihe $ZR = \{(K_1,t_1),(K_2,t_2),\ldots\}$ eine Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$ x $\mathbb{Z}$. Dabei ist unerheblich, ob die Zahlungsreihe endlich oder unendlich ist. Die Wertklasse $[ZR]$ der Zahlungsreihe ZR wird als die Summe der Wertklassen Ihrer einzelnen Zahlungen definiert:

$$[ZR] := [K_1,t_1] + [K_2,t_2] + [K_3,t_3] + \cdots.$$

Wie in jeder Äquivalenzklasse findet sich auch in $[ZR]$ ein Element mit der Zeitkoordinate null $(BW,0) \in [ZR]$. Der Betrag BW ist der Barwert der Zahlungsreihe.

3.1.3 Unmöglichkeit eines Äquivalenzprinzips für gemischte Zinsrechnung

Bei Einbezug von Zahlungen, die nicht zu Zinszuschlagsterminen erfolgen, ist gemischte Zinsrechnung anzuwenden[21]. Bei dieser Zinsrechnung ist jedoch die für eine Äquivalenzrelation erforderliche Transitivität verletzt. Inhaltlich lässt sich dies leicht einsehen, wenn die Vergleichsanlage auf einem Bankkonto betrachtet wird. Wird der gesamte Anlagebetrag zu einem Zeitpunkt abgehoben, der kein Zinszuschlagstermin ist, so werden mit der Auflösung des Kontos dennoch die Zinsen berechnet und ausbezahlt. Dieses Vorgehen spiegelt die gemischte Zinsrechnung wider. Wird der gesamte Betrag sofort wieder neu auf das Konto angelegt, so liegt im Vergleich mit einer durchgehenden Anlage ein zusätzlicher Zinszuschlags-

---

19 Z.B. MEYBERG(1980), S. 28.

20 Für eine Multiplikation von Wertklassen in der Form $[K_1,t_1] \cdot [K_2,t_2]$ gibt es weder eine vernünftige ökonomische Interpretation, noch kann sie in einer intuitiven Weise formal definiert werden.

21 Z.B. LOHMANN (1989), 49.

termin vor, der zu einem etwas höheren Zinseszinseffekt führt[22]. Die beiden Geldanlagen sind nicht gleich. Dieser Widerspruch zur Transitivität lässt sich auch formal leicht nachweisen.

3.2 Diskreter Zinszuschlag bei fristenabhängigen Zinssätzen

Hängt der Zins einer Anlage nicht nur von der absoluten Laufzeit, also dem Zeitabstand zwischen Beginn und Ende der Geldanlage ab, sondern zusätzlich vom Zeitpunkt der Anlage, so liegt keine flache Zinsstruktur vor. Eine einjährige Geldanlage, die erst in einem Jahr beginnt, hat dann im Allgemeinen eine andere Verzinsung als eine einjährige Geldanlage, die sofort beginnt. Damit bekommt der Zeitpunkt null, als der aktuelle Zeitpunkt, eine weitreichende inhaltliche Bedeutung[23]. Nur für Zeiträume, die vom Zeitpunkt null aus in der Zukunft liegen, werden Zinssätze festgelegt. Zahlungen zu Zeitpunkten vor diesem Zeitpunkt null liegen in der Vergangenheit. Sie werden von einer aktuellen Zinsstrukturkurve nicht erfasst.

Im Folgenden sollen nur solche Zahlungen und Zahlungsreihen betrachtet werden, die vollständig in der Zukunft liegen[24]. Diese Zahlungen können mit den Zahlenpaaren der Menge $\mathbb{R}$ x $\{\mathbb{N} \cup 0\}$ identifiziert werden. Die Zinsstrukturkurve sei durch Spot-Rates, also die Renditen von Nullkupon-Anleihen gegeben, die zum Zeitpunkt $t = 0$ erworben und zum Zeitpunkt t fällig werden. Um Zinssätze für alle betrachteten Zahlungen zu erhalten, muss für jeden Zinszuschlagstermin $t \in \mathbb{N}$ die Spot-Rate s_t bekannt sein. Das Aufzinsen einer Zahlung (K_1, t_1) auf den Zeitpunkt $t_2 > t_1$ kann unter Verwendung der Spot-Rates dargestellt werden als Abdiskontieren auf den Zeitpunkt $t = 0$ und anschließendes Aufzinsen auf den Zeitpunkt t_2. Daraus ergibt sich die Definition: $K_2 = K_1 \cdot \frac{1}{1+s_1} \cdot (1+s_2)$. Die Faktoren $f_{i,j} := \frac{1+s_j}{1+s_i}$ werden als Forward-Rates bezeichnet. Sie beschreiben die Verzinsung vom Zeitpunkt t_i zum Zeitpunkt t_j. Wir definieren eine Relation auf $\mathbb{R}$ x $\{\mathbb{N} \cup 0\}$ durch

$$(K_1, t_1) \sim (K_2, t_2) \quad \text{genau dann, wenn} \quad K_2 = K_1 \cdot \frac{1+s_2}{1+s_1} = K_1 \cdot f_{1,2}. \quad (3)$$

---

22 Hieran lässt sich auch erkennen, dass die gemischte Zinsrechnung nicht mit der Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes kompatibel ist.

23 Bisher war die Wahl einer Null eine inhaltlich bedeutungslose, rein technische Maßnahme. Das Modell war vollkommen losgelöst von einem realen zeitlichen Bezug.

24 Bei der Anwendung der Finanzmathematik auf ein konkretes Entscheidungsproblem muss zur Bewertung bereits erfolgter Zahlung gegebenenfalls die Zinsstruktur herangezogen werden, die bei der *Entscheidung* über den zu Grunde liegenden Sachverhalt vorlag.

Die so definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn die Bedingungen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind erfüllt:

Reflexivität: Es gilt $(K,t) \sim (K,t)$ für alle $(K,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, denn $K = K \cdot \frac{1+s_t}{1+s_t}$.

Symmetrie: Aus $(K_1,t_1) \sim (K_2,t_2)$ folgt $K_2 = K_1 \cdot \frac{1+s_2}{1+s_1} \Leftrightarrow K_2 \cdot \frac{1+s_1}{1+s_2} = K_1$,

also $(K_2,t_2) = (K_1,t_1)$.

Transitivität: Aus $(K_1,t_1) \sim (K_2,t_2)$ und $(K_2,t_2) \sim (K_3,t_3)$ folgt

$K_2 = K_1 \cdot \frac{1+s_2}{1+s_1}$ und $K_3 = K_2 \cdot \frac{1+s_3}{1+s_2}$. Durch Einsetzen ergibt sich

$K_3 = K_1 \cdot \frac{1+s_2}{1+s_1} \cdot \frac{1+s_3}{1+s_2} = K_1 \cdot \frac{1+s_3}{1+s_1}$, also $(K_1,t_1) \sim (K_3,t_3)$.

Analog zu (2) ergibt sich auf den Wertklassen die Ordnung $[K_1,0] > [K_2,0] \Leftrightarrow K_1 > K_2$. Einfache Rechnungen zeigen, dass für eine analog zum Fall der flachen Zinsstruktur definierte Addition bzw. Skalarmultiplikation auch alle dort gezeigten Eigenschaften erfüllt sind.

3.3 Kontinuierlicher Zinszuschlag bei flacher Zinsstruktur

Der Zinsfaktor $(1+i_p)^{t_2-t_1}$ konvergiert bei kontinuierlicher Erhöhung der zwischen t_1 und t_2 liegenden Zinszuschlagstermine schließlich gegen den Faktor $e^{i_p(t_2-t_1)}$, der den Grenzfall unendlich vieler zwischenzeitlicher Zinszuschlagstermine beschreibt[25]. Der „Periodenzins“ i_p bezeichnet nach dem Grenzübergang nicht mehr die Verzinsung über die ursprüngliche Periodenlänge eins, sondern über den jetzt unendlich kleinen Abstand der Zinszuschlagstermine. Er wird als Momentanzins bezeichnet. Zur Gültigkeit der Formel muss dieser Zins in der gleichen Zeiteinheit gemessen werden, wie die Zahlungszeitpunkte. Zur Unterscheidung zum diskreten Periodenzins bezeichnen wir ihn mit *r*. Die der Definition (1) entsprechende Definition für Äquivalenz von Zahlenpaaren aus $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ lautet:

$$(K_1,t_1) \sim (K_2,t_2) \text{ genau dann, wenn } K_2 = K_1 \cdot e^{r\cdot(t_2-t_1)}. \qquad (4)$$

25 Siehe z.B. LOHMANN (1989), S. 40 oder LOCAREK-JUNGE (1997), S. 70.

Mit Hilfe der Potenzrechenregeln für $e^{r\cdot(t_2-t_1)}$ kann wie oben gezeigt werden, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Da alle Zinsfaktoren positiv sind, ist die analog zu (2) definierte Ordnung für alle Zeitpunkte gleich. Auch die auf den entstehenden Wertklassen definierte Addition und Skalarmultiplikation überträgt sich unverändert.

3.4 Kontinuierlicher Zinszuschlag bei fristenabhängigen Zinssätzen

Wie im diskreten Fall bezeichnet bei Annahme einer nicht-flachen Zinsstrukturkurve der Zeitpunkt $t=0$ den Moment, zu dem die Zinsstrukturkurve vorliegt. Die Betrachtung muss auf Zahlungen beschränkt werden, die nach diesem Zeitpunkt anfallen. Im zeitstetigen Fall ist jeder Zeitpunkt Zinszuschlagstermin. Für die vollständige Beschreibung der Zinsstruktur ist ein Kontinuum von Nullkuponanleihen notwendig, das für jeden Zeitpunkt t den Momentanzins $r(t)$ festlegt. Diese Momentanzinssätze bilden eine stetige reelle Funktion $r(t)\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Die Verzinsung auf einem Girokonto kann unter Verwendung dieser Funktion durch die Wertentwicklung $B(t)$ einer Geldeinheit beschrieben werden, die zum Zeitpunkt $t_0=0$ angelegt wurde. Es gilt: $B(t)=e^{\int_0^t r(t)dt}$. Die Wertentwicklung zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ist Quotient der entsprechenden Faktoren $B(t_1)$ und $B(t_2)$. Dem liegt wie im diskreten Fall die Überlegung zu Grunde, dass der Betrag K_1 zum Zeitpunkt t_1 zuerst auf den Zeitpunkt $t_0=0$ abgezinst und anschließend auf den Zeitpunkt t_2 aufgezinst wird:

$$K_2 = K_1 \cdot \frac{B(t_2)}{B(t_1)} = K_1 \cdot \frac{e^{\int_0^{t_2} r(t)dt}}{e^{\int_0^{t_1} r(t)dt}} = K_1 \cdot e^{\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt}.$$

Die gewünschte Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{R}$ x $\{\mathbb{N} \cup 0\}$ ergibt sich als

$$(K_1,t_1)\sim(K_2,t_2) \text{ genau dann, wenn } K_2 = K_1 \cdot e^{\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt}. \qquad (5)$$

4 Das Äquivalenzprinzip bei Unsicherheit

Für die Bewertung einer unsicheren Zahlungsreihe muss zusätzlich zur Bewertung der Zeit ein Konzept zur Bewertung der Unsicherheit vorliegen[26]. Hierfür gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Eine Bewertung auf Basis individueller Präferenzen erfolgt meist im Rahmen

[26] Vgl. FRANKE/HAX (1999), S. 287.

des Bernoulli-Prinzips[27]. Das Verwenden einer individuellen Nutzenfunktion führt zur Abhängigkeit der Bewertung von der bewertenden Person. Ein objektiver Wert kann nicht ermittelt werden. Zudem ist aufgrund der fehlenden Wertadditivität die Bewertung einer Zahlung nur unter expliziter Berücksichtigung aller anderen, zum selben Zeitpunkt auftretenden Zahlungen möglich. Bei der präferenzfreien Bewertung wird die individuelle Nutzenfunktion durch die Marktbewertung ersetzt. Die Bewertung durch Marktpreise ist wertadditiv, jede Zahlungsreihe kann unabhängig von anderen Entscheidungen bewertet werden. Dieses Vorgehen entspricht dem finanzmathematischen Ansatz der Bewertung von Zeit. Denn dieser ist zeitadditiv und statt individueller Zeitpräferenzen bilden mit der Vergleichsanlage personenunabhängige Marktinformationen den Bewertungsmaßstab. Voraussetzung ist allerdings die Existenz eines Marktes, der in konsistenter Form alle benötigten Informationen bereitstellt. Das Konzept der präferenzfreien Bewertung erfordert eine Modellierung des Kapitalmarktes mit einer Reihe teils sehr restriktiver Annahmen. In beiden Ansätzen genügt es, die Bewertung der Unsicherheit für Zahlungen vorzunehmen, die zum selben Zeitpunkt erfolgen. Die Verknüpfung über die Zeit erfolgt über die „Verzinsungsrelation“.

Unsicherheit wird üblicherweise in Form von Zufallsvariablen über einem mathematischen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) modelliert[28]. Die Grundmenge Ω enthält die Elementarereignisse, die als Einzelmerkmale der Umwelt aufgefasst werden können. Verschiedene solcher Merkmale zusammen bilden einen Umweltzustand, ein Ereignis. Die im Modell möglichen Umweltzustände bzw. Ereignisse werden durch das Mengensystem F erfasst[29]. Die Abbildung P ordnet den Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu. Eine Zufallsvariable über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) ist eine Abbildung von der Grundmenge Ω in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die reellen Zahlen beschreiben die möglichen Ausprägungen der Variablen, hier die Höhe der Zahlung. Eine unsichere Zahlung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung ihres Zahlungsbetrages.

---

[27] Zu Grundlagen und Bedeutung des Bernoulli-Prinzips sowie möglicher Kritik siehe z.B. LAUX (1998), S. 162 – 195.

[28] Damit beschränken wir uns auf den Fall von Risiko, bei dem eine eindeutige Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt. Die damit zusammenhängende entscheidungstheoretische Problematik soll hier nicht thematisiert werden. Vgl. z.B. SCHMIDT/TERBERGER (1997), S. 281, bzw. LAUX (1998), S. 114-118.

[29] Formal besteht F aus Teilmengen von Ω. Um logische Konsistenz zu gewährleisten muss die Menge F eine σ-Algebra sein. Die Mengen Ω und F bilden zusammen den Maßraum (Ω, F).

4.1 Präferenzabhängige Bewertung

Grundlage des Bernoulli-Nutzens ist eine individuelle Nutzenfunktion $u(x)$, die jede einzelne Ausprägung, also hier die Höhe einer Zahlung, durch Angabe des von ihr erzeugten „Nutzens" bewertet. Formal ist der Nutzen eine reelle Zahl. Eine unsichere Zahlung, modelliert als Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen, wird durch den erwarteten Nutzen $E[u(X)]$ bewertet. Durch die Verwendung einer individuellen Präferenzfunktion ist diese Bewertung notwendigerweise subjektiv. Sie spiegelt die persönlichen Umstände und die Risikoeinstellung des Entscheiders wider.

Mit einer festen Nutzenfunktion $u_t(x)$ erzeugt das Bernoulli-Kriterium formal problemlos eine Äquivalenzrelation für unsichere Zahlungen zum Zeitpunkt *t*. Die als Zufallsvariablen modellierten unsicheren Zahlungen bilden die Grundmenge $\aleph_t$. Für zwei unsichere Zahlungen X_1 und X_2 aus $\aleph_t$ lautet die Relation:

$$X_1 \sim X_2 \text{ genau dann, wenn } E[u_t(X_1)] = E[u_t(X_2)]. \qquad (6)$$

Da auf die Gleichheitsbeziehung der reellen Zahlen zurückgegriffen wird, ist dies eine Äquivalenzrelation. Ebenso überträgt sich die Ordnungsrelation der reellen Zahlen.

Sofern die Nutzenfunktion u_t stetig ist, gibt es in jeder Äquivalenzklasse eine sichere Zahlung. Diese wird als das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(X)$ der Klasse bezeichnet[30]. Anhand des Sicherheitsäquivalents können unsichere Zahlungen verglichen werden, es stellt eine Bewertung der Äquivalenzklasse dar[31]. Die Differenz zwischen Sicherheitsäquivalent und Erwartungswert einer Verteilung kann als Risikoprämie interpretiert werden[32]. Für den Spezialfall der Risikoneutralität mit der Nutzenfunktion $u(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ ist das Sicherheitsäquivalent gleich dem Erwartungswert der Zahlung. Ist das Sicherheitsäquivalent kleiner bzw. größer als der Erwartungswert spricht man von Risikoaversion bzw. Risikofreude[33]. Derartige Nutzenfunktionen sind nicht wertadditiv. Auf Grund von Risikomischungseffekten und sonstigen Interdependenzen ist der Wert einer aus zwei unsicheren Zahlungen zusammengesetzten Zah-

---

30 Bei unstetiger Nutzenfunktion ist die Existenz eines Sicherheitsäquivalents nicht garantiert. Mehrere Sicherheitsäquivalente würden die Gleichwertigkeit verschieden hoher sicherer Zahlungen bedeuten. Vgl. LAUX (1998), S. 217 bzw. FRANKE/HAX (1999), S. 294.

31 LAUX (1998), S. 211. Dort wird allerdings differenziert zwischen dem Sicherheitsäquivalent und dem Wert einer unsicheren Zahlung unterschieden, die nur in Ausnahmefällen übereinstimmen.

32 Z.B. FRANKE/HAX (1999), S. 295.

33 Z.B. LAUX (1998), S. 212 – 218.

lung nicht gleich der Summe der Werte der einzelnen Zahlungen[34]. Entsprechend ist das Sicherheitsäquivalent der gemeinsamen Verteilung nicht die Summe der Sicherheitsäquivalente[35]. Dies hat zur Konsequenz, dass mit dem Bernoulli-Nutzen stets nur eine einzige unsichere Zahlung zu einem festen Zeitpunkt bewertet werden kann. Für mehrere Zahlungen muss zuerst die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt werden und für diese anschließend der Nutzen. Erst nachdem dies erfolgt ist, können die für feste Zeitpunkte definierten Äquivalenzrelationen mit Hilfe der Verzinsung über die Zeit hinweg zu einer gemeinsamen Relation verknüpft werden.

Die Grundmenge dieser gemeinsamen Relation besteht aus der Zeit-Komponente $\mathbb{Z}$ bzw. $\{\mathbb{N} \cup 0\}$[36] und der Komponente der unsicheren Zahlung $\aleph$, die alle Zufallsvariablen eines gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, F, P) enthält. Dabei kann jede Variante der Verzinsung verwendet werden. Zur Formulierung der gemeinsamen Äquivalenzrelation genügt es, in einer der Definitionen (1), (3), (4) oder (5) den Betrag der Zahlung K durch den Erwartungsnutzen $E[u_t(X)]$ zu ersetzen. Sämtliche in Abschnitt 3.1.2 angeführten Rechenregeln bleiben erhalten. Für zeitdiskreten Zinszuschlag bei flacher Zinsstruktur ergibt sich

$$(X_1, t_1) \sim (X_2, t_2) \text{ genau dann, wenn } E\left[u_{t_1}(X_2)\right] = E\left[u_{t_2}(X_1)\right] \cdot \left(1 + i_p\right)^{t_2 - t_1}.$$

Die Relation mit zeitstetigem Zinszuschlag bei nicht-flacher Zinsstruktur lautet:

$$(X_1, t_1) \sim (X_2, t_2) \text{ genau dann, wenn } E\left[u_{t_1}(X_1)\right] = E\left[u_{t_2}(X_2)\right] \cdot e^{\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt}.$$

Diese Formeln beschreiben das Vorgehen, bei dem zuerst die Zahlungen jedes Zeitpunktes gemäß der individuellen Präferenzstruktur bewertet und anschließend mit den allgemeinen Annahmen über die Verzinsung ab- oder aufgezinst werden. Anders ausgedrückt wird der Barwert der Sicherheitsäquivalente bestimmt[37]. Werden mehrere Zahlungsströme betrachtet, können diese Barwerte aufgrund der fehlenden Wertadditivität allerdings nicht addiert wer-

---

34 Zur Wertadditivität und dem Zusammenhang mit vollständigen Kapitalmärkten siehe FRANKE/HAX (1999), S. 324 – 337.

35 FRANKE/HAX (1999), S. 305 und S. 324 – 326.

36 Je nachdem ob eine flache oder eine nicht-flache Zinsstrukturkurve zu Grunde gelegt wird.

37 Vgl. FRANKE/HAX (1999), S. 304. Entsprechend der Grundannahme der Finanzmathematik erfolgt die Bewertung der Zeit allein über die Verzinsung, also das Konzept der Vergleichsanlage. FRANKE/HAX betrachten alternativ die Diskontierung der Erwartungswerte mit einem risikoadjustierten Zinssatz. Dieses Vorgehen durchbricht aber, ähnlich wie alternative Zeitpräferenzen, die einheitliche Verzinsung und damit den zentralen Annahmenrahmen der Finanzmathematik.

den. Denn eventuelle Interdependenzen müssen bereits auf der Ebene der Nutzenfunktionen berücksichtigt werden. Insofern ist der Ansatz für die meisten Entscheidungsprobleme wenig praktikabel.

4.2 Präferenzfreie Bewertung

Bei der präferenzfreien Bewertung tritt an die Stelle der individuellen Präferenzen die Marktbewertung, die das Zusammenwirken der unterschiedlichen Präferenzen von Marktteilnehmern widerspiegelt. Die Grundlage des Bewertungsansatzes ist ein Marktmodell, in dem unsichere Zahlungsströme in Form von Wertpapieren gehandelt werden. Durch den Handel entstehen Preise. Aus diesen Preisen wird das Bewertungsfunktional für unsichere Zahlungen abgeleitet. Eine solche Bewertung anhand von Preisen führt zu Wertadditivität. Das Problem interdependenter Zahlungsströme ist umgangen. Existenz und Eindeutigkeit eines aus Marktpreisen abgeleiteten Bewertungsfunktionals erfordern andererseits eine Reihe starker Annahmen über den Kapitalmarkt[38]. Die Realitätsnähe und Anwendbarkeit des Bewertungsansatzes ist damit naturgemäß ebenfalls beschränkt. Der Ansatz, die Bewertung auf beobachtbare Alternativanlangen zu stützen, entspricht aber konzeptionell der Bewertung von Zeit mit Marktzinsen.

Wir betrachten im Folgenden eine bezüglich der Zeit als auch der Umweltzustände diskrete Modellierung des Marktes für Wertpapiere[39]. Der Zeithorizont ist endlich und durch einen festen Endzeitpunkt N definiert. Die unsichere Welt zu diesem festen Endzeitpunkt liegt in Form eines Wahrscheinlichkeitsraumes vor, dessen Grundmenge Ω aus einer endlichen Anzahl verschiedener Umweltzustände besteht. Investoren, die über eine bestimmte Grundausstattung verfügen, versuchen durch den Handel in Wertpapieren ihren Nutzen zu maximieren. Ist der Markt arbitragefrei so gilt der Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung[40]. Er besagt, dass jeder Wertpapierpreis, ähnlich wie bei der risikoneutralen Bewertung, als Erwartungswert der Rückflüsse berechnet werden kann. Allerdings müssen zuvor im zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum die Wahrscheinlichkeiten abgeändert werden. Dieses neue Wahrscheinlichkeitsmaß, das die Marktbewertung des Risikos enthält, kann in arbitragefreien

---

[38] Je nach Modell sind diese unterschiedlich. Im hier verwendeten Modell muss der Markt insbesondere arbitragefrei sein und es müssen Preise für eine sehr hohe Anzahl unabhängiger Wertpapiere bekannt sein. Eine Darstellung präferenzfreier Bewertung auf Basis von Zustandspreisen bzw. dem CAPM findet sich in FRANKE/HAX (1999), S. 338 – 349.

[39] Für eine genaue Darstellung des Marktmodells siehe z.B. NAIK (1995), S. 33-35. Eine stärker mathematisch orientierte Darstellung findet sich z.B. in ELLIOTT/KOPP (1999), S. 12-17. Sowohl die Zeit als auch die Umweltzustände können stetig modelliert werden. Die zentralen Ergebnisse sind analog. Vgl. z.B. MERTON (1992) oder KARATZAS/SHREVE (1998).

[40] Zu den genauen Voraussetzungen siehe z.B. NAIK (1995), S. 33-36.

Märkten unter bestimmten Voraussetzungen aus beobachtbaren Wertpapierpreisen eindeutig errechnet werden[41]. Es liegt dann ein Bewertungsmaßstab vor, mit dem alle anderen risikobehafteten Zahlungsströme bewertet werden können.

4.2.1 Präferenzfreie Bewertung in der Einperiodenökonomie

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall einer einperiodigen Ökonomie, bei der am Ende der Periode, also zum Zeitpunkt $t = N = 1$ nur zwei verschiedene Umweltzustände möglich sind. Zur Modellierung der Unsicherheit wählen wir den diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P), bei dem Ω aus den beiden Elementen ω_1 und ω_2 besteht[42]. Jedes Wertpapier wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben, die im Zeitpunkt $t = 1$ die zwei möglichen Ausprägungen $X(\omega_1)$ und $X(\omega_2)$ annehmen kann. Neben riskanten Wertpapieren mit $X(\omega_1) \neq X(\omega_2)$ gibt es ein risikofreies Wertpapier X_0, für das $X_0(\omega_1) = X_0(\omega_2) = 1$ gilt. Dieses Wertpapier kann als festverzinsliche Geldanlage aufgefasst werden. Es beschreibt die Verzinsung im Modell und damit die Bewertung der Zeit. Denn der Preis $\pi_0(X_0)$ dieses Wertpapiers zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der abgezinste Wert der sicheren Auszahlung in $t = 1$. Aufgrund der Normierung $X_0(\omega_i) = 1$ im Zeitpunkt $t = 1$, entspricht $\pi_0(X_0)$ gerade den aus Kapitel 3 bekannten Verzinsungsfaktoren. Bei diskretem Zinszuschlag und Periodenzins i_p gilt beispielsweise $\pi_0(X_0) = \frac{1}{(1 + i_p)}$. Bei Wahl einer anderen Variante der Verzinsung ergibt sich analog $\pi_0(X_0)$ als Kehrwert des jeweiligen Zinsfaktors. Das Abzinsen beliebiger Zahlungen über die betrachtete Periode erfolgt durch Multiplikation mit $\pi_0(X_0)$, das Aufzinsen entsprechend durch Division durch $\pi_0(X_0)$.

Die Zustände ω_1 und ω_2 treten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p bzw. $1 - p$ auf, die jedoch nicht bekannt sein müssen[43]. Ist im Zeitpunkt $t = 0$ für ein festes riskantes Wertpapier X_i eine Bewertung in Form des Marktpreises $\pi_0(X_i)$ bekannt, so kann mit dem Ansatz einer risikoneutralen Bewertung auf die so genannten Pseudowahrscheinlichkeiten q und $1 - q$ geschlossen werden. Wir bezeichnen die Rückflüsse des Wertpapiers X_i zum Zeitpunkt $t = 1$ mit $X_i(\omega_1) = a$ und $X_i(\omega_2) = b$. Setzt man die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse

---

41 Üblicherweise wird es als „äquivalentes Martingalmaß“ bezeichnet.
42 Das Mengensystem F besteht hier nur aus den Mengen $\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}$.
43 Vielmehr kann jeder Marktteilnehmer darüber andere Vorstellungen haben.

ω_1 und ω_2 formal mit den Variablen q bzw. 1-q an, so beträgt der Erwartungswert der Rückflüsse zum Zeitpunkt $t = 1$ gerade $E[X_i] = q \cdot a + (1 - q) \cdot b$. Bei risikoneutraler Bewertung unter Annahme der Wahrscheinlichkeiten q und $1 - q$ beträgt der Preis des Wertpapiers X_i dem auf den Zeitpunkt $t = 0$ abdiskontierten Erwartungswert:

$$\pi_0(X_i) = E[X_i] \cdot \pi_0(X_0) = [q \cdot a + (1 - q) \cdot b] \cdot \pi_0(X_0).$$

Auflösen nach q ergibt $q = \dfrac{\dfrac{\pi_0(X_i)}{\pi_0(X_0)} - b}{a - b}$.

Können die beiden Preise $\pi_0(X_i)$ und $\pi_0(X_0)$ am Markt beobachtet werden, so kann q berechnet und als „die vom Markt angenommene Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ereignisse" interpretiert werden. Die Werte q und $1 - q$ werden als Pseudowahrscheinlichkeiten bezeichnet. Sie bilden ein zu P alternatives Wahrscheinlichkeitsmaß Q für den Wahrscheinlichkeitsraum Ω. Mit ihnen kann jedes andere Wertpapier Y, dessen Auszahlungen in Abhängigkeit von den beiden Zuständen ω_1 und ω_2 bekannt sind, durch seinen Erwartungswert unter Verwendung von Q bewertet werden:

$$\pi_0(Y) = E^Q[Y] \cdot \pi_0(X_0) = [q \cdot Y(\omega_1) + (1 - q) \cdot Y(\omega_2)] \cdot \pi_0(X_0) .$$

Das neue Wahrscheinlichkeitsmaß Q der Pseudowahrscheinlichkeiten beschreibt das Bewertungsfunktional des Marktes.

Im obigen, einperiodigen Beispiel mit nur zwei möglichen Umweltzuständen können die Pseudowahrscheinlichkeiten aus den Preisen des risikofreien und eines riskanten Wertpapiers berechnet werden. Besteht der Wahrscheinlichkeitsraum aus mehr als zwei verschiedenen Zuständen, so sind auch mehr Wertpapiere nötig, um das neue Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig zu bestimmen. Im Allgemeinen muss die Anzahl der linear unabhängigen Wertpapiere mindestens so groß wie die Anzahl der Umweltzustände sein. Ein derartiger Markt heißt vollständig[44]. In vollständigen Märkten existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q, mit dem alle Wertpapiere X durch ihren Erwartungswert $E^Q[X]$ bewertet werden können.

---

[44] Vgl. HUANG/LITZENBERGER (1988), S. 125.

4.2.2 Äquivalenzprinzip mit präferenzfreier Bewertung in Einperiodenökonomien

Über die Verzinsung wird die präferenzfreie Bewertung einzelner Zeitpunkte zu einer Äquivalenzrelation für unsichere Zahlungen verschiedener Zeitpunkte verknüpft. Wir nehmen an, dass ein Zeitpunkt $t = 0$, der die Gegenwart beschreibt, fixiert und für die Bewertung der Zeit bereits ein Bewertungsansatz in Form einer Verzinsungsannahme gewählt ist. Für jeden Zeitpunkt $t > 0$ liegt damit ein Verzinsungsfaktor $Z_{(0,t)}$ fest, der die Verzinsung zwischen den Zeitpunkten 0 und t beschreibt. Jeder Zeitpunkt $t > 0$ kann als einperiodige Ökonomie über die Periode $[0,t]$ modelliert werden. Für jede solche Ökonomie muss ein Wahrscheinlichkeitsraum gewählt sowie Arbitragefreiheit und Vollständigkeit vorausgesetzt werden. Der Preis des risikolosen Wertpapiers zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ökonomie zum Zeitraum $[0,t]$ beträgt $\pi_0(X_0) = \frac{1}{Z_{(0,t)}}$. Damit ist eine über alle einperiodigen Ökonomien hinweg einheitliche Verzinsung gewährleistet.

Gemäß den Annahmen existiert für jede Einperiodenökonomie zu einem Zeitraum $[0,t]$ das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_t, mit dem die zum Zeitpunkt t anfallenden Zahlungen bewertet werden können. Für jede unsichere Zahlung X, die als Wertpapier der entsprechenden Ökonomie aufgefasst wird, kann ein Preis $\pi_0(X)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ angegeben werden. Diese Preise, die das Abzinsen bereits enthalten, bilden eine Äquivalenzrelation für unsichere Zahlungen:

$(X_1, t_1) \sim (X_2, t_2)$ genau dann, wenn $\pi_0(X_1) = \pi_0(X_2)$.

Da auf die Gleichheitsrelation der reellen Zahlen zurückgegriffen wird, ist dies eine Äquivalenzrelation. Die Preise erzeugen eine Ordnung auf den Äquivalenzklassen.

4.2.3 Präferenzfreie Bewertung in mehrperiodigen Ökonomien

Statt nur einperiodige Ökonomien zu betrachten, kann die Bewertung unsicherer Zahlungen auch über die Betrachtung von Preisentwicklungen über mehrere Perioden hinweg erfolgen. Ein großer Vorteil der mehrperiodigen Betrachtung liegt darin, dass die Anzahl der Wertpapiere, die zur Vollständigkeit des Marktes notwendig ist, deutlich geringer wird[45]. Das diskre-

[45] HUANG/LITZENBERGER (1988), S. 179.

te Mehrperiodenmodell[46] geht von einer festen Anzahl Zeitpunkte $\{0,1,2,\ldots,T\}$ aus, zu denen gehandelt werden kann. Zum Zeitpunkt $t=T$ endet das Modell. Die Elementarereignisse in Ω beschreiben wie oben die zum Zeitpunkt T möglichen Umweltzustände. Darüber hinaus wird ein Zeitablauf der Unsicherheit modelliert. Formal erfolgt dies durch eine Folge $\{F_t,\ t=0,\ldots,T\}$ zunehmend feiner werdender Partitionen von Ω. Eine solche Partition F_t kann dahingehend interpretiert werden, dass zum Zeitpunkt t bereits bekannt ist, in welcher Teilmenge von F_t der Endzustand liegen wird. Alle übrigen Ereignisse sind bereits ausgeschlossen. Von Zeitpunkt zu Zeitpunkt liegt im Modell schrittweise immer mehr Information darüber vor, welcher Zustand eintreten wird. Der Grad der Unsicherheit nimmt ab. Die Wertpapiere X_i im Modell leisten Auszahlungen ausschließlich zum Zeitpunkt T. Die Auszahlung eines Wertpapiers ist eine Zufallsvariable $X_i(T)$, deren Verteilung bekannt ist. Die Preisentwicklung ist ein stochastischer Prozess $\pi(X_i)=\{\pi_t(X_i), t=0,\ldots,T\}$. Neben riskanten Wertpapieren gibt es ein risikofreies Papier X_0, das zum Zeitpunkt T für jeden Umweltzustand $\omega\in\Omega$ die Auszahlung $X_0(\omega)=1$ leistet. Der Preisprozess dieses Wertpapiers beschreibt die Verzinsung. Genau wie im einperiodigen Modell erfolgt das Abzinsen von Preisen zu einem Zeitpunkt t auf den Zeitpunkt $t=0$ durch Multiplikation mit dem Preis des risikolosen Wertpapiers $\pi_t(X_0)$ zu diesem Zeitpunkt. Der Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung besagt, dass bei Arbitragefreiheit der Ökonomie ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q existiert, mit Hilfe dessen die Wertpapierpreise als abdiskontierte Erwartungswerte berechnet werden können:

$$\pi_t(X_i)=E^Q[X_i(T)]\cdot\pi_t(X_0).$$

Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß entspricht den Pseudowahrscheinlichkeiten in der Einperioden-Ökonomie[47]. Für die Eindeutigkeit genügt eine schwächere Vollständigkeitseigenschaft der Ökonomie, die als dynamische Vollständigkeit bezeichnet wird. In einer so konstruierten, arbitragefreien und dynamisch vollständigen Ökonomie können alle Wertpapierpreise zum Zeitpunkt $t=0$ als Erwartungswert unter dem eindeutig bestimmten äquivalenten Martingalmaß berechnet werden. Somit liegt ein Bewertungsfunktional vor, mit dem zum Zeitpunkt $t=0$ unsichere Zahlungen im Zeitpunkt $t=N$ bewertet werden können.

---

46 Exakte Darstellungen bieten z.B. VAIK (1995), S. 33-35 oder ELLIOTT/KOPP (1999), S. 23-35.

47 Es heißt äquivalentes Martingalmaß, da der stochastische Prozess $\frac{\pi_t(X_i)}{\pi_t(X_0)}=E^Q[X_i(T)]$ ein Martingal ist.

4.2.4 Äquivalenzprinzip mit präferenzfreier Bewertung in Mehrperiodenökonomien

Die präferenzfreie Bewertung unsicherer Zahlungen auf Basis mehrperiodiger Ökonomien lässt sich völlig analog zum Einperiodenfall mit der finanzmathematischen Verzinsung verknüpfen. Wieder muss eine einheitliche Verzinsung über alle betrachteten Zeitpunkte hinweg fixiert werden, so dass ausgehend von einem festen Zeitpunkt $t = 0$ für jeden Zeitpunkt $t > 0$ ein Verzinsungsfaktor $Z_{(0,t)}$ feststeht.

Zur Bewertung einer unsicheren Zahlung, die zum Zeitpunkt $\bar{t} > 0$ anfällt, wird eine mehrperiodige Ökonomie gewählt, die in $t = 0$ beginnt und in $T = \bar{t}$ endet. Die dazwischen liegenden Zeitpunkte müssen Zeitpunkte sein, für die ein Verzinsungsfaktor vorliegt[48]. Dann ist die Preisentwicklung des risikofreien Wertpapiers der Mehrperiodenökonomie in allen Zeitpunkten durch $\pi_t(X_0) = \frac{1}{Z_{(0,t)}}$ festgelegt. Unter der Annahme von Arbitragefreiheit und dynamischer Vollständigkeit existiert das eindeutige, äquivalente Martingalmaß, mit dem der Preis $\pi_0(X)$ jeder unsicheren Zahlung X zum Zeitpunkt $T = \bar{t}$ berechnet werden kann. Wird für jeden betrachteten Zeitpunkt eine derartige Ökonomie fest gewählt, so kann das Äquivalenzprinzip wie oben durch die folgende Äquivalenzrelation definiert werden:

$(X_1, t_1) \sim (X_2, t_2)$ genau dann, wenn $\pi_0(X_1) = \pi_0(X_2)$.

5 Zusammenfassung

Finanzwirtschaftliche Zahlungsströme werden durch die Eigenschaften Zeitabhängigkeit und Unsicherheit charakterisiert. Entscheidungen über verschiedene Zahlungsströme sind nur möglich, wenn diese Eigenschaften durch ein Bewertungsfunktional vergleichbar gemacht werden. Die Finanzmathematik stellt dafür Methoden bereit. Der Beitrag zeigt auf, dass sich die Bewertungsmethodik der Finanzmathematik in das mathematische Konzept der Äquivalenzrelation einbetten lässt. Damit können Äquivalenzklassen für Zahlungsströme, die so genannten Wertklassen, gebildet werden. Diese wiederum bilden selbst eine mathematische Struktur, in der gerechnet werden kann.

Der finanzmathematische Ansatz zur Bewertung der Zeit besteht in der Verzinsung. Dem Zins liegt der Vergleich mit einer Alternativanlage zugrunde, er kann als intertemporale Wert-

[48] Andernfalls träte bei der Verzinsung gemischte Zinsrechnung auf, für die das Äquivalenzprinzip scheitert. Vgl. Abschnitt 3.1.3.

funktion interpretiert werden. Verschiedene Varianten der Verzinsung beruhen auf unterschiedlicher Ausgestaltung der Vergleichsanlage. Formal lassen sich alle Varianten in einheitlicher Form als Äquivalenzrelationen darstellen.

Für die Bewertung von Unsicherheit gibt es verschiedene Ansatzmöglichkeiten. Die Arbeit geht auf die klassische Bewertung mit dem Bernoulli-Nutzen und auf die aus der modernen Kapitalmarkttheorie stammende präferenzfreie Bewertung mit Hilfe des äquivalenten Martingalmaßes ein. Es zeigt sich, dass beide Ansätze konsistent mit der Bewertung der Zeit zu einer Äquivalenzrelation für unsichere Zahlungen verknüpft werden können. Der formale Rahmen der mathematischen Äquivalenzrelation erweist sich damit als tragfähig, auch die modernen Konzepte der Bewertung mit einzuschließen.

Literatur

BODIE, Z.; MERTON, R. (1998): Finance (Preliminary Edition), Prentice Hall, New Jersey.

EISENFÜHR, F.; WEBER, M. (1999): Rationales Entscheiden, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

ELLIOTT, R.J.; KOPP, P.E. (1999): Mathematics of Financial Markets, Springer-Verlag, New York.

ENKE, M.; LOHMANN, K. (1995): Verbraucherschutz bei Finanzdienstleistungen am Beispiel von Ratenkrediten, Freiberger Arbeitspapier Nr. 95/6.

FRANKE G.; HAX, H. (1999): Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin.

HUANG, C.; LITZENBERGER, R. (1988): Foundations for financial Economics, Prentice Hall, New Jersey.

KARATZAS, I; SHREVE, S (1998): Methods of Mathematical Finance, Springer-Verlag, New York.

LAUX, H. (1998): Entscheidungstheorie, 4. neubearb. und erw. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

LOCAREK-JUNGE, H. (1997): Finanzmathematik, Lehr und Übungsbuch, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, München.

LOHMANN, K. (1989): Finanzmathematische Wertpapieranalyse, 2. Aufl., Verlag Otto Schwartz & Co., Göttingen.

LOHMANN, K. (1995): Stochastische Modelle zur Bewertung künftiger Zahlungsleistungen in betriebswirtschaftlicher Sicht, Verlag Otto Schwartz & Co., Göttingen.

MERTON, R.C. (1992): Continuous-time finance, Revised Edition, Blackwell Publishers, Cambridge.

MEYBERG, K. (1980): Algebra Teil 1, Hanser Verlag, München, Wien.

NAIK, V. (1995): Finite State Securities Market Models and Arbitrage, in: Jarrow, R.; Maksimovic, V.; Ziemba, W. (Eds.), Handbooks in Operations Research & Management Sciences, Vol. 9, Finance, Elsevier Science B.V., Amsterdam.

PERRIDON, L.; STEINER, M. (1999): Finanzwirtschaft der Unternehmung, 10. überarbeitete Auflage, Verlag Vahlen, München.

REICHEL, G. (1976): Schriftenreihe angewandte Versicherungsmathematik, Heft 5: Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung, Teil 2: Vom Versicherungsspiel zum Äquivalenzbeitrag, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe.

SCHIERENBECK, H.; ROLFES, B. (1986): Effektivzinsrechnung in der Bankenpraxis, in: Zfbf, Jg. 38, Heft 9, S. 766 – 778.

SCHMIDT, R.H.; TERBERGER, E. (1997): Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie, Gabler, Wiesbaden.