



Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

Antje Franke-Börner¹, Martin Afanasjew²

1 Institut für Geophysik und Geoinformatik

2 Institut für Numerische Mathematik und Optimierung



Numerische Simulationsmethoden in der Geophysik

Übung zur gleichnamigen Vorlesung,
WS 2010/11

2. Februar 2011



Numerische Simulation physikalischer Felder ist ...

- wichtig für das Verständnis physikalischer Vorgänge,
- nützlich für die Abschätzung von Messeffekten,
- Grundlage für die Interpretation von Messungen,
- wichtigster Baustein für eine Inversion (Übung im Sommersemester) und
- übergreifend anwendbar in vielen technischen Bereichen.

Inhalt

1. Einführung in MATLAB
2. Klassifikation von Differentialgleichungen und Randbedingungen
3. 1D FD Diffusionsgleichung: Wärmeleitung
4. 2D FD Diffusionsgleichung: Wärmeleitung
5. 3D FD elliptische partielle Differentialgleichung: stationäre elektrische Felder (Gleichstromgeoelektrik)
6. 2D FE elliptische partielle Differentialgleichung: Ausbreitung ebener diffusiver zeitharmonischer elektromagnetischer Felder (MT)
7. ...

Die Kontinuitätsleichung

$$\nabla \cdot (\sigma(\vec{r}) \nabla \phi(\vec{r})) = -I \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) \quad (1)$$

mit

Leitfähigkeit σ ,

Potential ϕ ,

Stärke des eingespeisten Stroms I ,

Quellposition \vec{r}_s und

Ortsvektor \vec{r} .

Das Randwertproblem der Geoelektrik

Gesucht wird die räumliche Verteilung des Potentials ϕ , so dass

$$\nabla \cdot (\sigma(\vec{r}) \nabla \phi(\vec{r})) = -I \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\phi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_d \quad (3)$$

$$\partial_z \phi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_n \quad (4)$$

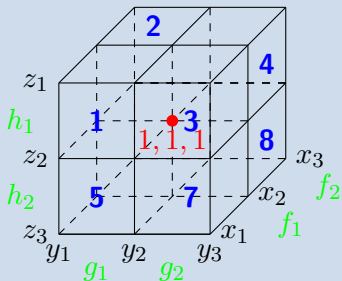
Schritte zur Simulation des elektrischen Potentials

1. Erstellung eines 3D-Leitfähigkeitsmodells
2. Anwendung eines Diskretisierungsschemas
3. Anwendung der Randbedingungen
4. Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems
5. Beseitigung der Quellsingularitäten (Singularity Removal)
6. Genauigkeitstest anhand verschiedener Modelle

Diskretisierungsschema nach Brewitt-Taylor & Weaver

Tensorproduktgitter

Leitfähigkeiten an den Gitterknoten



$$\sigma_{i,j,k} = \sum_{i'=i}^{i+1} \sum_{j'=j}^{j+1} \sum_{k'=k}^{k+1} c_{i,j,k,i',j',k'} \sigma_{i',j',k'}^c \quad (5)$$

mit
 σ^c ... Zelleitfähigkeit
 und

$$c_{i,j,k,i',j',k'} = \frac{f_{i'} g_{j'} h_{k'}}{(f_i + f_{i+1})(g_j + g_{j+1})(h_k + h_{k+1})} \quad (6)$$

Diskretisierungsschema nach Brewitt-Taylor & Weaver, II

Leitfähigkeitsgradienten, z.B. in x-Richtung

$$\partial_x \sigma_{i,j,k} = \sum_{i'=i}^{i+1} \sum_{j'=j}^{j+1} \sum_{k'=k}^{k+1} c_{i,j,k,i',j',k'}^x \sigma_{i',j',k'}^c \quad \text{mit} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} c_{i,j,k,i',j',k'}^x &= \frac{-2f_i g_{j'} h_{k'}}{f_i(f_i + f_{i+1})(g_j + g_{j+1})(h_k + h_{k+1})} \\ &+ \frac{2f_{i+1} g_{j'} h_{k'}}{f_{i+1}(f_i + f_{i+1})(g_j + g_{j+1})(h_k + h_{k+1})} \\ &= \frac{d_{i,i'} g_{j'} h_{k'}}{(f_i + f_{i+1})(g_j + g_{j+1})(h_k + h_{k+1})} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{und } d_{p,q} = \begin{cases} -2 & \text{für } q = p \\ 2 & \text{für } q = p + 1 \end{cases} \quad (9)$$

Diskretisierungsschema nach Brewitt-Taylor & Weaver, III

Leitfähigkeitsgradienten, in y- und z-Richtung

$$\partial_{y,z}\sigma_{i,j,k} = \sum_{i'=i}^{i+1} \sum_{j'=j}^{j+1} \sum_{k'=k}^{k+1} c_{i,j,k,i',j',k'}^{y,z} \sigma_{i',j',k'}^c \quad (10)$$

mit

$$c_{i,j,k,i',j',k'}^y = \frac{f_{i'} d_{j,j'} h_{k'}}{(f_i + f_{i+1})(g_j + g_{j+1})(h_k + h_{k+1})} \quad (11)$$

und

$$c_{i,j,k,i',j',k'}^z = \frac{f_{i'} g_{j'} d_{k,k'}}{(f_i + f_{i+1})(g_j + g_{j+1})(h_k + h_{k+1})} \quad (12)$$

Aufgabe: Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit und ihrer räumlichen Ableitungen an einem Gitterknoten

Erstellen Sie ein dreidimensionales Leitfähigkeitsmodell `node_sigma = node_conductivity(x, y, z, sigma)` mit

- den Gitterpunkten

```
x = [0; 5; 15]; y = [-5; -2; 5]; z = [0; 3; 7];
```

und

- den Zelleitfähigkeiten

```
sigma = [10; 1000; 10; 1000; 10; 100; 10; 100];!
```

Berechnen Sie neben der Leitfähigkeit `node_sigma` auch die räumlichen Ableitungen der Leitfähigkeit an dem Gitterknoten `[node_sigma, dsigma] = node_conductivity(x, y, z, sigma)`! Testen Sie Ihren Code zuerst an einem homogenen Leitfähigkeitsmodell!

Verallgemeinerung auf größeres Gitter und Vektorisierung

Vereinfachung auf 1D

$$\sigma_i = \sum_{i'=i}^{i+1} c_{i,i'} \sigma_{i'}^c \quad \text{mit} \quad c_{i,i'} = \frac{f_{i'}}{(f_i + f_{i+1})} \quad (13)$$

Gleichung (5) für eine Dimension als Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & & & \\ & c_{2,2} & c_{2,3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \sigma_1^c \\ \sigma_2^c \\ \vdots \\ \sigma_n^c \end{bmatrix} \quad (14)$$

Vektorisierung - Vereinfachung auf 1D, II

Matrix C

$$C = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{f_1+f_2} & \frac{f_2}{f_1+f_2} & & & & & \\ & \frac{f_2}{f_2+f_3} & \frac{f_3}{f_2+f_3} & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \frac{f_{n-1}}{f_{n-1}+f_n} & \frac{f_n}{f_{n-2}+f_n} & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^* & & & \\ & f_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}}_{F^*} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & & \\ & f_2 & f_3 & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}}_F, \quad f^* = (f_i + f_{i+1})^{-1}$$

(16)

Damit gilt für Gleichung (13) in Matrix-Vektor-Form: $\sigma = F^* F \sigma^c$.

Vektorisierung - Vereinfachung auf 1D, räumliche Ableitungen

Gleichung (7) in Matrix-Vektor-Form:

$$\partial_x \boldsymbol{\sigma} = F^* D^x \boldsymbol{\sigma}^c \quad (17)$$

mit

$$D^x = \begin{bmatrix} -2 & 2 & & \\ & -2 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (18)$$

Vektorisierung 2D - Kronecker Produkte

Zelleitfähigkeiten in 2D

$$\sigma^c = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}^c & \sigma_{1,2}^c & \cdots \\ \sigma_{2,1}^c & \sigma_{2,2}^c & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \quad (19)$$

Anordnung in einem Vektor

$$\boldsymbol{\sigma}^c = [\sigma_{1,1}^c \sigma_{2,1}^c \cdots \sigma_{1,2}^c \sigma_{2,2}^c \cdots \sigma_{1,n_y}^c \sigma_{2,n_y}^c \cdots \sigma_{n_x,n_y}^c]^T \in \mathbb{R}^{n_x n_y} \quad (20)$$

Gleichermaßen σ

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{1,1} \sigma_{2,1} \cdots \sigma_{1,2} \sigma_{2,2} \cdots \sigma_{1,n_y-1} \sigma_{2,n_y-1} \cdots \sigma_{n_x-1,n_y-1}]^T \in \mathbb{R}^{n_x-1 n_y-1} \quad (21)$$

Vektorisierung 2D - Kronecker Produkte

Mit G und G^* wie F und F^*

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & & \\ & g_2 & g_3 & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & & \\ & f_2 & f_3 & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} =$$

(22)

$$\begin{bmatrix} g_1 f_1 & g_1 f_2 & & g_2 f_1 & g_2 f_2 & & & \\ & g_1 f_2 & g_1 f_3 & & g_2 f_2 & g_2 f_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & g_2 f_1 & g_2 f_2 & & g_3 f_1 & g_3 f_2 & \\ & & & & g_2 f_2 & g_2 f_3 & & g_3 f_2 & g_3 f_3 \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Download

- `node_conductivityA.m`
(http://www.geophysik.tu-freiberg.de/assets/media/Personal/franke/uebungen/mod/node_conductivityA.m)
- `dc3d_diffop.m`
(http://www.geophysik.tu-freiberg.de/assets/media/Personal/franke/uebungen/mod/dc3d_diffop.m)
- `dc3d_parts.m`
(http://www.geophysik.tu-freiberg.de/assets/media/Personal/franke/uebungen/mod/dc3d_parts.m)
- `dc1d_parts.m`
(http://www.geophysik.tu-freiberg.de/assets/media/Personal/franke/uebungen/mod/dc1d_parts.m)

Download, II

- kron3.m (<http://www.geophysik.tu-freiberg.de/assets/media/Personal/franke/uebungen/mod/kron3.m>)
- extend_grid.m
(http://www.geophysik.tu-freiberg.de/assets/media/Personal/franke/uebungen/mod/extend_grid.m)

Aufgabe: 3D Geoelektrik-Simulation

1. Erstellen Sie mit Hilfe der heruntergeladenen Code-Bausteine ein Matlab-Script, mit dessen Hilfe Sie das elektrische Potential ϕ simulieren können!
2. Benutzen Sie als Gleichungslöser vorerst '\', als Gitter
`x=linspace(-20,20,41);`
`y=linspace(-20,20,41);`
`z=linspace(0,20,21);`
sowie als Quellposition (1,0,0) und (-1,0,0)!
3. Rechnen Sie im ersten Schritt für das Modell eines homogenen Halbraums von $\sigma=0.01 \text{ Sm}^{-1}$!

Aufgabe: Genauigkeitstest

1. Berechnen Sie die analytische Lösung für einen homogenen Halbraum anhand von $\phi_a = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{r}$, wobei ϕ_a das Potential einer Punktquelle im Abstand r zur Quellposition und I die Stärke des eingespeisten Stroms darstellen!
2. Vergleichen Sie die analytische Lösung mit der Lösung der numerischen Simulationsrechnung! Beachten Sie die Superposition der Potentiale zweier Punktquellen bei Anwendung einer geoelektrischen Dipolquelle!

Aufgabe: Gleichungslöser und Vorkonditionierung

1. Benutzen Sie nun zur Lösung des Gleichungssystems die Methode der konjugierten Gradienten (`help pcg`) zunächst ohne Vorkonditionierung!
2. Wählen Sie dann zur Vorkonditionierung
 - eine Diagonalmatrix D , welche die Hauptdiagonale von A enthält (Jacobi),
 - die Matrix $M = L \cdot U$, wobei sich L und U aus der LU-Zerlegung der Systemmatrix A ergeben (`help luinc`),
 - die Matrix $M = R^T \cdot R$; R erhält man aus der Cholesky-Zerlegung von A (`help cholinc`)!
3. Vergleichen Sie die Rechenzeiten und Genauigkeiten!

Singularity Removal

... dient der Beseitigung der Singularitäten an den Stromquellen. Das Potential ϕ besitzt eine Zerlegung in einen singulären Anteil $\phi_s(1/|\vec{r} - \vec{r}_s|)$ und einen regulären Anteil ϕ_r : $\phi = \phi_s + \phi_r$. Die Kontinuitätsgleichung (1) lautet damit:

$$\nabla \cdot (\sigma(\vec{r}) \nabla \phi_s(\vec{r})) + \nabla \cdot (\sigma(\vec{r}) \nabla \phi_r(\vec{r})) = -I \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) \quad (23)$$

Das singuläre Primärpotential wird von den Quellen erzeugt und ist bekannt für einen homogenen Halbraum mit $\sigma(\vec{r}) = \sigma_0$:

$$\phi_s(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\sigma_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_s|}. \quad (24)$$

Für $\sigma(\vec{r}) = \sigma_0$ erfüllt $\phi = \phi_s$ Gleichung (1):

$$\nabla \cdot (\sigma_0 \nabla \phi_s(\vec{r})) = -I \delta(\vec{r} - \vec{r}_s). \quad (25)$$

Die Sekundärpotentiallösung

Einsetzen in Gleichung (23) liefert:

$$\nabla \cdot (\sigma(\vec{r}) \nabla \phi_r(\vec{r})) = \nabla \cdot ((\sigma_0 - \sigma(\vec{r})) \nabla \phi_s(\vec{r})). \quad (26)$$

Die Quellen für dieses reguläre Sekundärpotential ϕ_r sind also zu deuten als Abweichungen von der Hintergrundleitfähigkeit σ_0 . Je größer die Leitfähigkeitskontraste sind, desto stärker ist das Sekundärpotential.

Vorteile der Sekundärpotentiallösung:

- Lösung ohne Quellsingularitäten
- geringerer Fehler für homogene Dirichletsche Randbedingungen
- gitterunabhängige Wahl der Elektrodenposition

Aufgabe: Singularity Removal

1. Wählen Sie eine inhomogene Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{r})$ und berechnen Sie $\Delta\sigma(\vec{r}) = \sigma_0 - \sigma(\vec{r})!$
2. Lösen Sie Gleichung (26) für das reguläre Potential ϕ_r mit Hilfe der Methode der konjugierten Gradienten! Setzen Sie das Totalpotential ϕ aus analytisch berechnetem singulären und dem regulären Potential zusammen und stellen Sie es dar!
3. Vergleichen Sie die Rechnungen mit und ohne Singularity Removal!

Belegaufgabe 2

1. Erstellen Sie das dreidimensionale Modell eines Dikes von $\rho_1 = 10 \Omega\text{m}$ bei $20 \text{ m} < x < 25 \text{ m}$ in einem Halbraum von $\rho_2 = 100 \Omega\text{m}$!
2. Berechnen Sie das elektrische Potential mit und ohne Singularitätsbeseitigung für eine Quelle bei $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)^T$! Vergleichen Sie Iterationszahl und Rechenzeit bei Anwendung der Methode der konjugierten Gradienten mit verschiedenen Vorkonditionierern!
3. Bestimmen Sie aus den Potentialwerten für $y = 0$ und $z = 0$ den scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstand und vergleichen Sie diesen mit der analytischen Lösung (http://www.geophysik.tu-freiberg.de/assets/media/Personal/franke/uebungen/mod/rhoa_dike_ana.dat)!

Elliptische partielle Differentialgleichung

... am Beispiel der Ausbreitung ebener diffusiver zeitharmonischer elektromagnetischer Felder (Magnetotellurik)

Grundlage zur Beschreibung der Ausbreitung elektromagnetischer Felder sind die Maxwell-Gleichungen. Daraus kann man die Induktionsgleichungen für das elektrische Feld \vec{E} und das Magnetfeld \vec{H} ableiten:

$$\Delta \vec{F} = \mu \sigma \dot{\vec{F}} + \mu \varepsilon \ddot{\vec{F}} = \mu \sigma \dot{\vec{F}} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{F}} \quad \text{mit} \quad (27)$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon} \quad \text{und} \quad F = E, H. \quad (28)$$

Der Ansatz ebener zeitharmonischer Wellen

... der Form

$$\vec{F} = \vec{F}_0 e^{i(\omega t - k\vec{e} \cdot \vec{r})} \quad (29)$$

in großer Entfernung von der Quelle mit $\vec{e} = (0, 0, e_z)^T$ und $k\vec{e} = (0, 0, k_z)^T$ liefert unter Berücksichtigung der quasistationären Näherung ($T \geq 10^{-5}$ s):

$$\Delta \vec{F} = i\omega\mu\sigma \vec{F} = -k^2 \vec{F}, \quad k^2 = -i\omega\mu\sigma. \quad (30)$$

Die Induktionsgleichung für E-Polarisation:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad \text{bzw.} \quad (31)$$

$$-\nabla \cdot (c \cdot \nabla u) + au = f \quad \text{mit} \quad c = 1, \quad a = -k^2 = i\omega\mu\sigma, \quad f = 0 \quad (32)$$

Die Induktionsgleichung für H-Polarisation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} - i\omega\mu H_y = 0 \quad \text{bzw.} \quad (33)$$

$$-\nabla \cdot (c \cdot \nabla u) + au = f \quad \text{mit} \quad c = 1/\sigma, \quad a = i\omega\mu, \quad f = 0 \quad (34)$$

Randbedingungen

Zusätzlich beschreiben inhomogene Dirichletsche Randbedingungen das Abklingen der Felder an den äußeren Modellrändern:

$$\vec{F} = \vec{F}_0 e^{-ikz} \quad \text{mit} \quad F = E, H \quad \text{und} \quad k = -\sqrt{-i\omega\mu\sigma}. \quad (35)$$

Aufgabe: Simulation elektromagnetischer Felder mit COMSOL MULTIPHYSICS

1. Starten Sie COMSOL mit MATLAB! Wählen Sie aus den allgemeinen Anwendungen die Koeffizientenform der allgemeinen elliptischen partiellen Differentialgleichung!
2. Erstellen Sie eine einfache Modellgeometrie für H-Polarisation, z.B. einen homogenen Halbraum mit $-2000 < x < 2000$, $-2000 < z < 0$!
3. Legen Sie unter „Physics“ → „Subdomain Settings“ die Koeffizienten a und c mit den Modellparametern $\sigma = 0.01 \text{ S/m}$, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 20 \text{ kHz}$ fest wie auf Folie 27 beschrieben!
4. Weisen Sie unter „Physics“ → „Boundary Settings“ die Randbedingungen zu wie in Gleichung (35) angegeben! Beachten Sie, dass im vorliegenden Fall z die Streichrichtung ist und die Felder in y -Richtung abklingen!

Lösung des RWP

1. Vernetzen Sie das vorliegende Modell!
2. Lösen Sie das Gleichungssystem mit einem direkten Löser!
3. Verbessern Sie die Lösung mittels Gitterverfeinerung (h-Verfeinerung) und Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktionen (p-Verfeinerung)!

Finite-Elemente-Methode

1. Exportieren Sie die Struktur fem, welche alle getroffenen Einstellungen (Geometrie, Parameter, Gleichungstyp, Gitter ...) enthält!
2. Assemblieren Sie die Systemmatrizen für $\tilde{K}\vec{U} = \vec{L}$ und $\tilde{N}\vec{U} = \vec{M}$:
`[K,L,M,N]=assemble(fem)!`

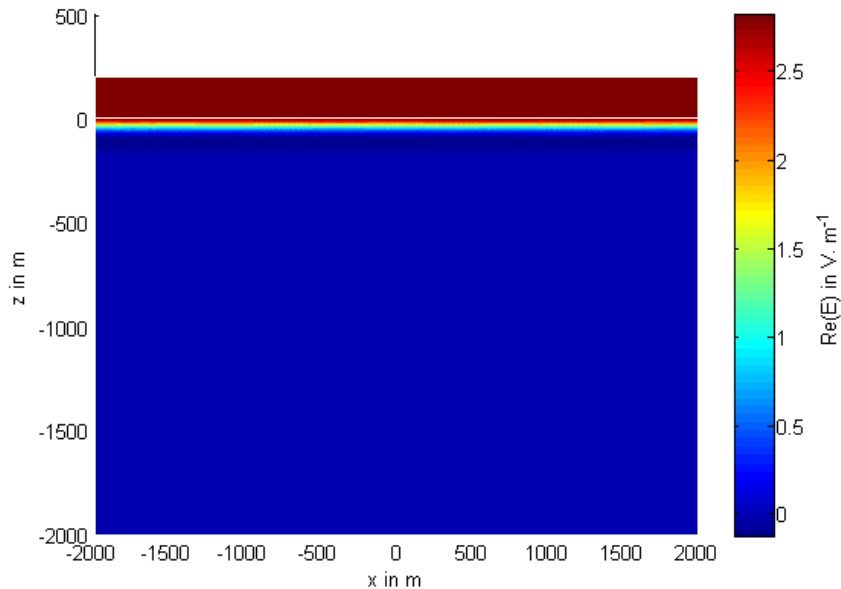
Mit

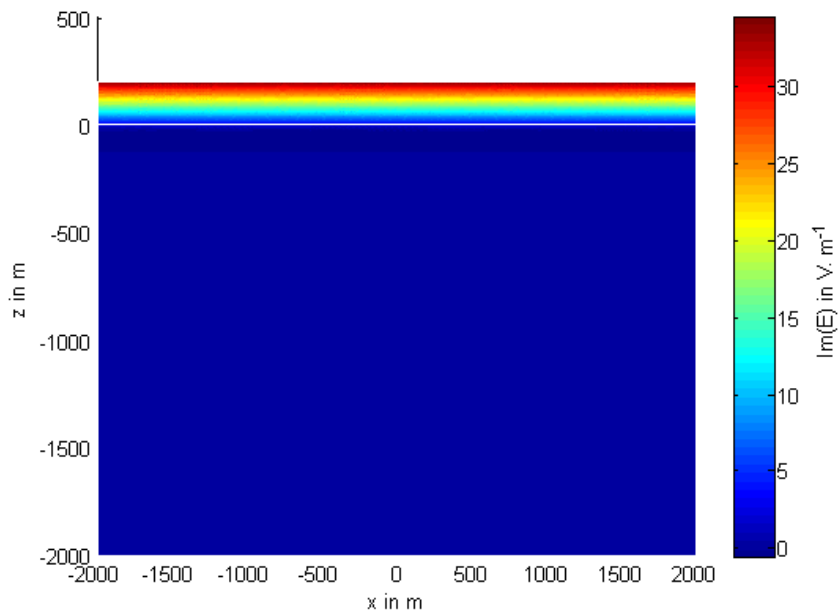
```
[null,compl,range]=f1null(N);  
ud=compl*((range'*N*compl)\(range'*M));  
KK=null'*K*null;  
f=null'*(L-K*ud);  
uu=KK\f;  
u=null*uu+ud;
```

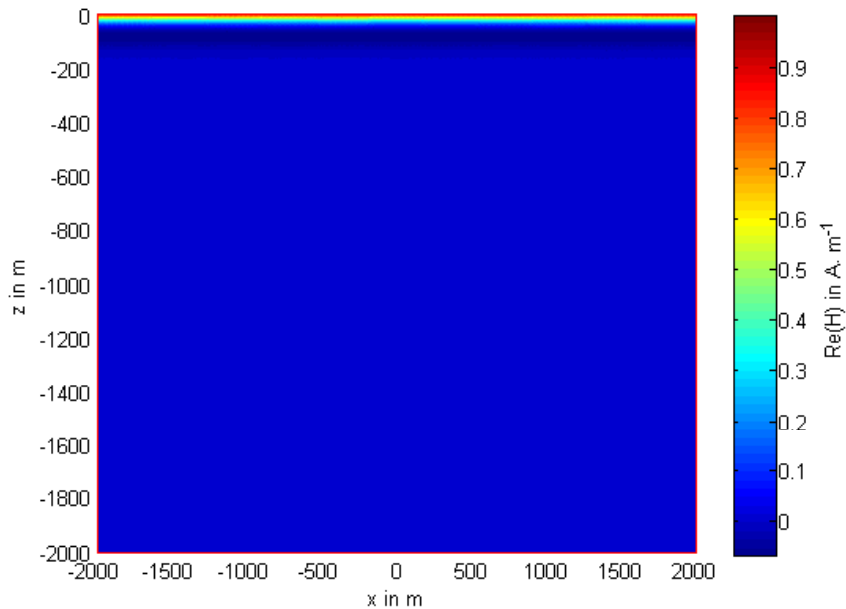
ergibt sich die Finite-Elemente-Lösung des Gleichungssystems.

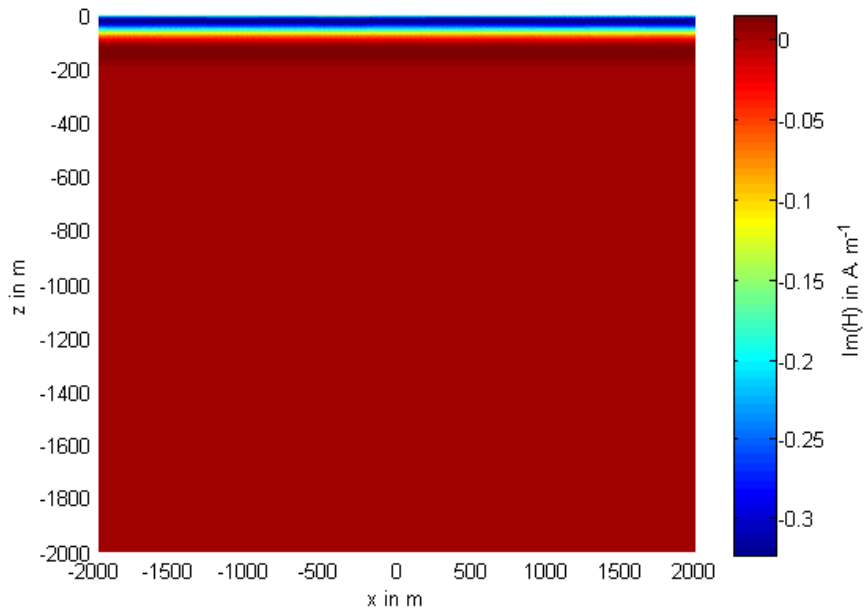
E-Polarisation

1. Fügen Sie zum homogenen Halbraum den Lufthalbraum (z.B. $-2000 < x < 2000, 0 < z < 200$) hinzu!
2. Für Luft gilt: $\sigma_0 = 10^{-14}$ S/m. Vereinbaren Sie die entsprechenden Koeffizienten der PDE für E-Polarisation (Folie 27)!
3. Setzen Sie auch neue Randbedingungen (Gleichung (35))! Das elektrische Feld an der Erdoberfläche hat den Wert $E_0 = -\frac{ik_1}{\sigma_1}$ und berechnet sich im Lufthalbraum zu $E = -\frac{ik_1}{\sigma_1} + i\omega\mu z$.



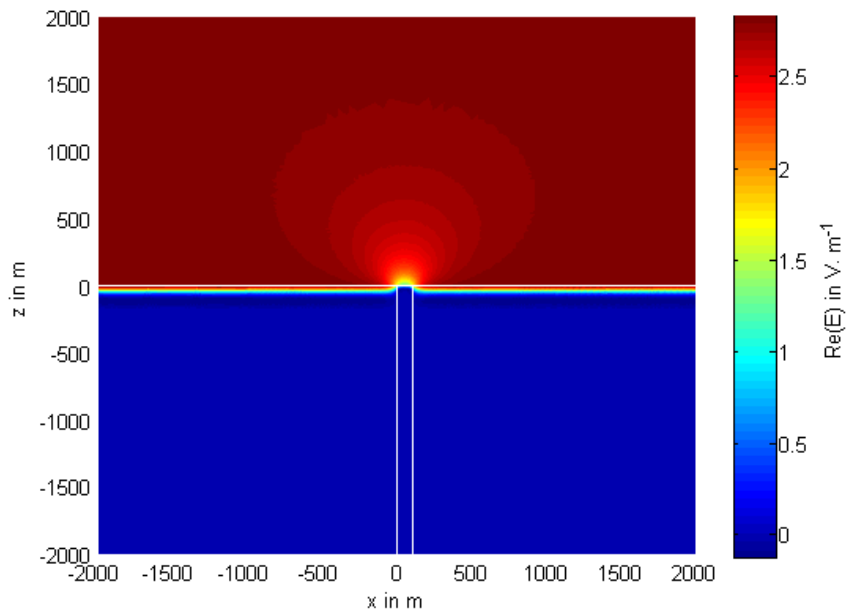


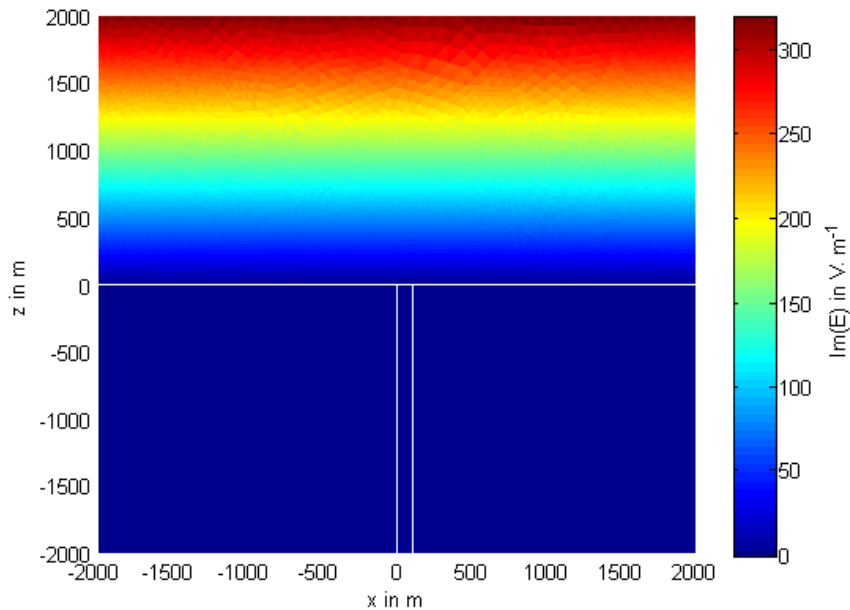


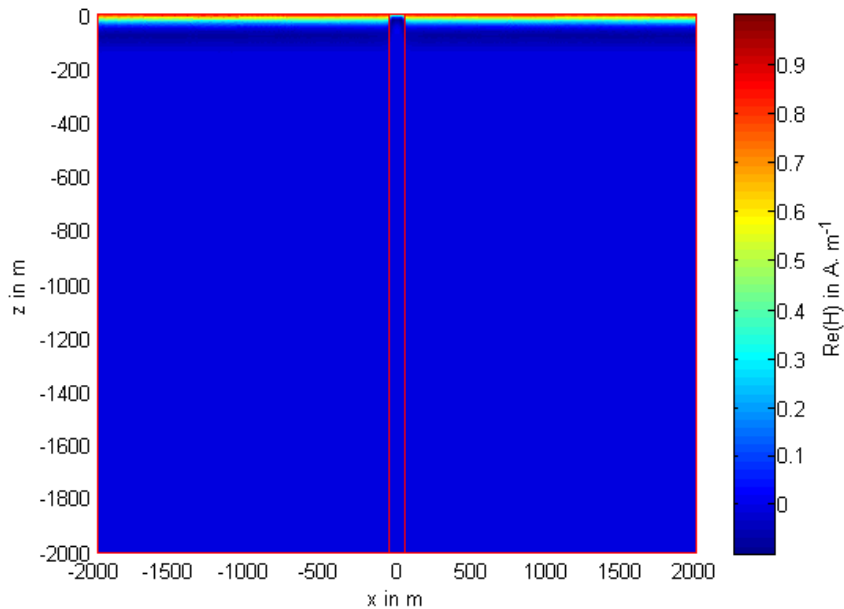


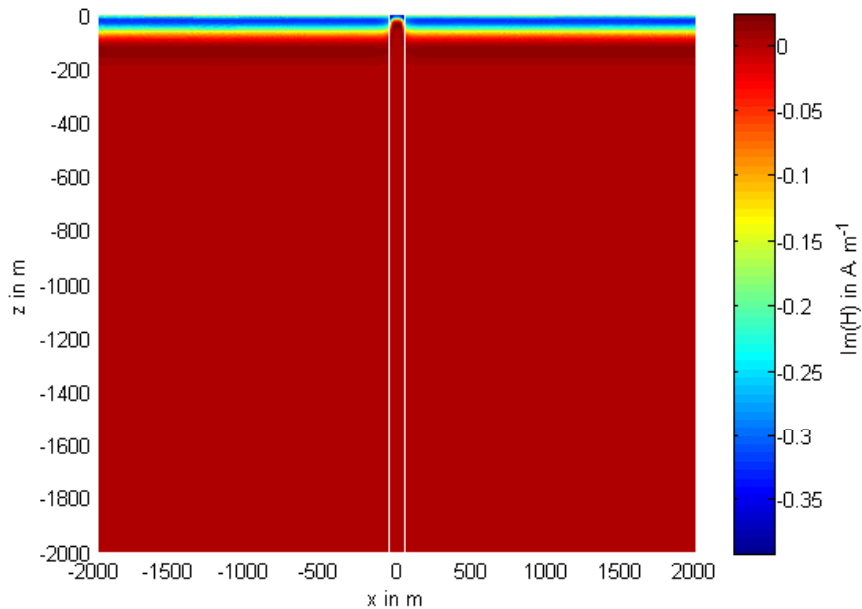
Post-Processing

1. Berechnen Sie die Darstellungsgrößen scheinbarer spezifischer elektrischer Widerstand $\rho_a = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_{horiz}}{H_{horiz}} \right|^2$ und Phase $\phi = \frac{180}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{\operatorname{Im}(E_{horiz}/H_{horiz})}{\operatorname{Re}(E_{horiz}/H_{horiz})} \right)$, wobei die fehlenden horizontalen Felder aus den Vertikalableitungen der simulierten zu berechnen sind! Vereinbaren Sie diese Größen unter „Options“ → „Expressions“ als „Scalar Expressions“, plotten Sie sie („Postprocessing“ → „Cross-Section Plot Parameters“) und überprüfen Sie die Genauigkeit der Simulationen!
2. Berechnen Sie Sondierungskurven für ρ_a und ϕ für einen Frequenzbereich von $f = 10^2 \dots 10^5$ Hz („Solver Parameters“ → „Parametric“)!
3. Führen Sie die Simulationen für weitere Modelle (z.B. Viertelräume, Dike, geschichteter Halbraum, ...) durch!









Belegaufgabe 3

1. Erstellen Sie ein für die Magnetotellurik übliches Modell eines $100 \Omega\text{m}$ -Halbraums ($-100000 \text{ m} < x, z < 100000 \text{ m}$) mit einem eingebetteten Dike von $\rho = 10 \Omega\text{m}$ bei $-20000 \text{ m} < x < 20000 \text{ m}$ bei einer Frequenz von $f = 0.1 \text{ Hz}$!
2. Berechnen Sie die elektromagnetischen Felder für E- und H-Polarisation!
3. Stellen Sie den scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstand ρ_a und die Phase ϕ auf einem Profil mit $\Delta x = 2 \text{ km}$ Punktabstand dar!
4. Fügen Sie dem Modell eine Stufe von $\Delta h = 5 \text{ km}$ bei $x = -20 \text{ km}$ hinzu! Beschreiben Sie den Einfluss der Topographie auf die Mess- und Interpretationsgrößen!
5. Berechnen Sie Sondierungskurven für ρ_a und ϕ im Frequenzbereich von $f = 10^{-4} \dots 1 \text{ Hz}$!

Finite-Elemente-Methode

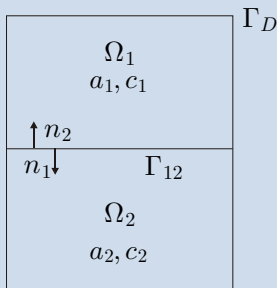
Wir betrachten das Randwertproblem der MT (vgl. (32) - (35))

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = 0 \quad \text{auf } \Omega_1, \Omega_2, \quad (36)$$

$$u = r(x, z) \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad (37)$$

$$\vec{n}_1 \cdot c_1 \nabla u_1 + \vec{n}_2 \cdot c_2 \nabla u_2 = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{12} \quad (38)$$

für das einfache Modell



Die Äquivalente Formulierung ...

... von Gleichung (36) im Sinne des Innenproduktes mit einer beliebigen Testfunktion v aus dem Funktionenraum V liefert

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot (c\nabla u) v + auv) d\vec{x} = 0 \quad \forall v \in V. \quad (39)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes und unter Berücksichtigung von Vektoridentitäten lässt sich Gleichung (39) umschreiben zur sogenannten schwachen Formulierung

$$b(u, v) = \int_{\Omega} (c\nabla u \nabla v + auv) d\vec{x} = 0 \quad \forall v \in V, \quad (40)$$

wobei

$$U := \{u \in H^1(\Omega) : u = r \text{ auf } \Gamma_D\} \quad \text{und} \quad (41)$$

$$V := \{v \in H^1(\Omega) : v \equiv 0 \text{ auf } \Gamma_D\} \quad (42)$$

die Funktionenräume der Lösungen bzw. der Testfunktionen sind. Der Hilbertraum $H^1(\Omega)$ ist definiert als

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega), \nabla v \in L^2(\Omega)^2\}. \quad (43)$$

Die Projektion des Problems in einen N_p -dimensionalen Funktionenraum V_{N_p} mit den Basisfunktionen ϕ_i liefert

$$\sum_{j=1}^{N_p} \left(\int_{\Omega} ((c \nabla \phi_j) \cdot \nabla \phi_i + a \phi_j \phi_i) d\vec{x} \right) U_j = 0, \quad i = 1, \dots, N_p. \quad (44)$$

Die approximierte Lösung u^h berechnet sich dabei als Linearkombination der Basisfunktionen ϕ_j und der Koeffizienten U_j :

$u^h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N_p} U_j \phi_j(\vec{x})$. Mit $\phi_i(\vec{x}_i) = 1$ und $\phi_i(\vec{x}_j) = 0 (i \neq j)$ erhält man

$$u^h(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^{N_p} U_j \phi_j(\vec{x}_i) = U_i. \quad (45)$$

Für das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form

$$(\tilde{K} + \tilde{M})\vec{U} = \vec{0}, \quad (46)$$

ergeben sich die Steifigkeitsmatrix \tilde{K} und die Massematrix \tilde{M} zu

$$K_{i,j} = \int_{\Omega} (c \nabla \phi_j) \cdot \nabla \phi_i d\vec{x} \quad i, j = 1, \dots, N_p \quad (47)$$

$$M_{i,j} = \int_{\Omega} a \phi_j \phi_i d\vec{x} \quad i, j = 1, \dots, N_p. \quad (48)$$

Ihre Berechnung mittels Quadraturformel liefert

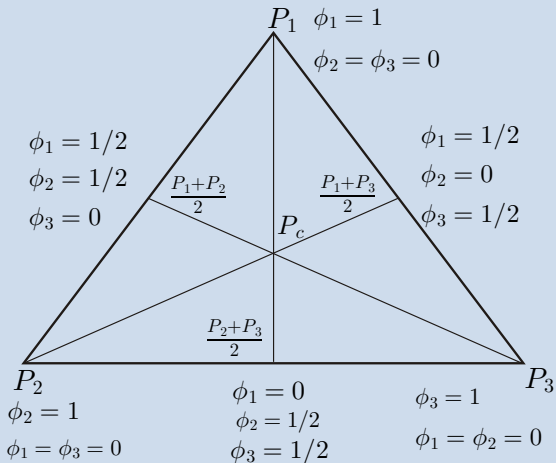
$$K_{m,n}^t = c(P_c) \frac{1}{4A^t} \begin{pmatrix} \beta_n \\ \alpha_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \beta_m \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad m, n = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad (49)$$

$$M_{m,n}^t = a(P_c) \frac{A^t}{12} (1 + \delta_{m,n}), \quad m, n = 1, 2, 3, \quad (50)$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_3 - x_2, & \beta_1 &= y_2 - y_3, \\ \alpha_2 &= x_1 - x_3, & \beta_2 &= y_3 - y_1, \\ \alpha_3 &= x_2 - x_1, & \beta_3 &= y_1 - y_2 \end{aligned} \quad (51)$$

und A^t der Flächeninhalt des Dreiecks t sind.



Assemblierung der Systemmatrizen K und M aus den lokalen Elementmatrizen K^t und M^t sowie die Berücksichtigung der Dirichletschen Randbedingungen U_D liefert letztendlich die Lösung U für das gesamte Modellgebiet:

$$\vec{U} = \vec{U}_{\Omega \setminus \Gamma_D} + \vec{U}_{\Gamma_D} \quad (52)$$

und damit

$$(\tilde{K} + \tilde{M})\vec{U}_{\Omega \setminus \Gamma_D} = -(\tilde{K} + \tilde{M})\vec{U}_{\Gamma_D}. \quad (53)$$

A-posteriori Fehlerschätzer

... bilden die Grundlage für eine adaptive Gitterverfeinerung. Der geschätzte Fehler für jedes Dreieck t

$$E^2(t) = \alpha \| -au^h \|^2 h_t^2 + \beta \frac{1}{2} \sum_{\tau \in \Gamma_K} \|\vec{n}_\tau \cdot c \nabla u_h\|^2 h_\tau. \quad (54)$$

enthält das Residuum und den Sprung in den Tangentialkomponenten der elektromagnetischen Felder über die Dreiecksseiten. Anhand dieser Fehlerfunktion und eines absoluten oder relativen Kriteriums werden Dreiecke zur Verfeinerung ausgewählt.