Fakultät für Mathematik und Informatik
TU Bergakademie Freiberg
Dr. A. Franke-Börner

16. Januar 2014

Numerik für ingenieur- und naturwissenschaftliche Studiengänge

Iterative Verfahren

Aufgabe 1

Es ist die Nullstellenaufgabe

$$f(x) = \ln(x+1) + x - 2 = 0 \,, \qquad x > -1 \quad . \tag{N}$$

gegeben.

a) Man zeige, daß f im Intervall [1,2] mindestens eine Nullstelle x^* besitzt.

b) Man gebe für (N) die Iterationsschrift
(i) des NEWTON-Verfahrens $(x^0 = 1)$
(ii) des Sekantenverfahrens $(x^0 = 1\,,\ x^1 = 2)$
an, skizziere den Verlauf der Iteration und berechne nach beiden Verfahren jeweils einige verbesserte Näherungen.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein nichtlineares Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= x_1^2 - 2x_1 - x_2 + \frac{1}{2} \\ f_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 4 \qquad . \end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie ausgehend vom Startvektor $x^0 = (0,1)^T$ mit dem NEWTON–Verfahren eine Näherung x^1.

b) Bestimmen Sie ausgehend vom gleichen Startvektor x^0 mit dem gedämpften NEWTON–Verfahren eine Näherung z^1, wobei als Dämpfungsparameter $\alpha = 0.8$ zu verwenden ist.

c) Entscheiden Sie nach Berechnung von $\|F(x^1)\|_\infty$ und $\|F(z^1)\|_\infty$, welche der beiden Näherungen x^1 und z^1 "besser" ist.

Aufgabe 3

Das Polynom vierten Grades

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

besitzt zwei reelle Nullstellen, eine im Intervall $[-1,0]$ und eine im Intervall $[0,1]$. Versuchen Sie, diese Nullstellen mit den folgenden Verfahren bis auf 10^{-6} genau zu bestimmen:

– Intervallschachtelung

– Sekantenverfahren
– Newtonverfahren.

Aufgabe 4

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}$$

soll näherungsweise mit dem Gesamtschrittverfahren gelöst werden. Berechnen Sie ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$ die Iterierte $x^{(2)}$.

Aufgabe 5

Gegeben sind die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Iterationsmatrizen P für das Einzel- und das Gesamtschrittverfahren und stellen Sie fest, in welchen Fällen Konvergenz vorliegt.

b) Untersuchen Sie mittels bekannter Kriterien (Sätze aus der Vorlesung) für welche Matrix bei welchem Verfahren Konvergenz vorliegt.

c) Ermitteln Sie das Konvergenzverhalten durch Überprüfung des hinreichenden Konvergenzkriteriums $\rho(P) < 1$.

d) Führen Sie mehrere Schritte des Einzel– und des Gesamtschrittverfahrens für die Gleichungssysteme $A_1x = b_1$ und $A_2x = b_2$ mit

$$b_1 = (1,\,-1,\,3)^T\ ,\quad b_2 = (2,\,-1,\,1)^T$$

durch und überprüfen Sie daran Ihre theoretischen Ergebnisse.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die ersten beiden Iterierten x^1 und x^2 des Einzelschrittverfahrens für das angegebene lineare Gleichungssystem. Benutzen Sie als Startvektor $x^0 = (0,\,0,\,0)^T$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -12 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 16 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -16 \end{array}$$

b) Für die Iterationsmatrix P des Einzelschrittverfahrens für dieses Gleichungssystem gilt $\|P\|_\infty = 0.75$. Wieviele Iterationsschritte k sind ausreichend, damit die Norm des Fehlers $\|z^k\|_\infty = \|x^k - x^*\|_\infty$ auf das 10^{-4}–fache des Anfangsfehlers $\|z^0\|_\infty$ reduziert wird?