Fakultät für Mathematik und Informatik
TU Bergakademie Freiberg
Dr. A. Franke-Börner

19. Dezember 2013

Numerik für ingenieur- und naturwissenschaftliche Studiengänge

Numerische Interpolation und Approximation

Aufgabe 1

Durch die Punkte

$$P_0(0;3.6),\ P_1(3;54),\ P_2(1;84),\ P_3(-2;30)$$

soll ein Interpolationspolynom niedrigsten Grades gelegt werden.

a) Bestimmen Sie dieses Interpolationspolynom $p(x)$ in der Newton–Darstellung.

b) Berechnen Sie den Funktionswert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$ durch Einsetzen in die Polynomgleichung.

c) Berechnen Sie den Funktionswert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$ mit dem Algorithmus von Neville–Aitken.

Aufgabe 2

a) Das Polynom $p_2(x) = -2 + (x+1) + 3(x+1)x$ erfüllt die drei Interpolationsbedingungen

$$p_2(-1) = -2, \quad p_2(0) = -1, \quad p_2(2) = 19.$$

Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p_4(x)$ vom Grad 4, das den fünf Interpolationsbedingungen

$$p_4(-2) = 3, \quad p_4(-1) = -2, \quad p_4(0) = -1, \quad p_4(1) = 0, \quad p_4(2) = 19$$

genügt.

b) Geben Sie alle Nullstellen des Polynoms $p_{200}(x)$ an, welches die Funktion $f(x) = x^{12}$ an den 201 Knoten $x_j = j$ $(j = 0, 1, \dots, 200)$ interpoliert !

c) Die Funktion $f(x) = x^{12}$ wird über die Knotenmenge $x_j = j,\ j = 0, 1, \dots, 200$ alternativ mittels linearer Splines interpoliert, d.h. in jedem Intervall $[x_{j-1}, x_j],\ j = 1, \dots, 200$ ist die Interpolierende $s(x)$ ein Polynom ersten Grades.
Schätzen Sie den Interpolationsfehler für $x \in (x_0, x_1)$ ab.
Werten Sie anschliessend Ihre Abschätzung für $x = 0.9$ aus und bestimmen Sie ausserdem den exakten Fehler $|f(0.9) - s(0.9)|$.

Aufgabe 3

a) Welche der folgenden drei Funktionen f_i sind kubische Splines bezüglich der Unterteilung $\mathcal{T} = [0,1] \cup [1,2] \cup [2,2.5]$ des Intervalls $[0, 2.5]$ (mit Begründung)?

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |x|, \\ f_2(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \le 1, \\ x^2 - 2\,x + 2 & \text{für } x \ge 1, \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} 6(x-1)^2 + 6x - 3 & \text{für } x \le 1, \\ 3\,x^3 - 3\,x^2 + 3\,x & \text{für } x \ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen α und β so, dass

$$f_4(x) = \begin{cases} \alpha\, x + \beta & \text{für } x \le 2, \\ 3\,(x-2)^3 + 6x & \text{für } x \ge 2. \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich der in b) gegebenen Unterteilung $\mathcal{T}$ des Intervalls $[0, 2.5]$ ist.

Aufgabe 4

Die (2π)-periodisch fortgesetzte Funktion $f(x) = x^2$ $(0 < x < 2\pi)$ soll trigonometrisch interpoliert werden.
Bestimmen Sie das reelle trigonometrische Interpolationspolynom

$$t_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\Big]$$

für $n = 3$ mit $m = 12$ Knoten (x_i, f_i) $(i = 0, 1, ..., m-1)$, wobei an den Sprungstellen von f gelten soll $f(0) = f(2\pi) = 2\pi^2$!