Skript zum Vorkurs für Studierende mathematischer Studiengänge

Prof. K. Gerald van den Boogaart, Dr. Jan Kurkofka,
M.Sc. William Joseph Turner, Dr. Gunter Semmler, Prof. Sebastian Aland

(basierend auch auf Materialien von
Prof. Udo Hebisch (Kapitel 3), Prof. Elias Wegert (Kapitel 4)
und Prof. Michael Eiermann (Kapitel 5))

[aus organisatorischen Gründen Vorlesungen/Übungen
dieses Jahr in der Reihenfolge der Kapitel 5,3,4,1,2]

TU Bergakademie Freiberg
Fakultät für Mathematik und Informatik
WS 2025/2026

letzte Änderung: 10. September 2025

Kapitel 1

Was ist Mathematik?

(Prof. K. Gerald van den Boogaart)

1.1 Mathematik

- Axiome, Definitionen und was aus ihnen folgt.
- Mathematik ist wahr, trifft aber nur „wenn, dann“ Aussagen.
- Es gibt keine allgemeingültige Definition der Mathematik.
- Mathematik = griechisch für Lernen.
- Wird Mathematik entdeckt oder entwickelt?
- Mathematik ist die einfachste aller Wissenschaften, da sie bisher als einzige in der Lage war, Beweise für ihre Aussagen beizubringen.
- Mathematik ist die schwierigste Wissenschaft, da jeder etwas wirklich neues beizubringen hat.

1.1.1 Reine Mathematik

- Nur wahre Aussagen, nur innermathematisch.
- Alles, was man mit reiner Logik erreichen kann.
- Zitat: Mathematik ist ein Glassperlenspiel (schön, komplex, von inneren Gesetzen getrieben, man interagiert mit dem Spiel, ...).
- Was kann man mit reiner Logik erreichen?

1.1.2 Angewandte Mathematik

- Entwickelt Methoden für große Klassen realer Aufgaben.
  - Numerik / Wissenschaftliches Rechnen.
  - Optimierung.
  - Stochastik.
    - Wahrscheinlichkeitstheorie.
    - Statistik.
    - Stochastische Prozesse.
  - Mathematische Modellierung.

  Dabei werden alle Register der reinen Mathematik gezogen.

1.2 Mathematik im Kontext

1.2.1 Mathematik und Philosophie

- Mathematik und Philosophie haben sich anfangs zusammen entwickelt.
- Mathematik als die reinste Philosophie.
- Logik als gemeinsames Fachgebiet.
- Wittgenstein, Principia Mathematica.

1.2.2 Theoretische Physik

- Gemeinsame Entwicklung.
- Feldtheorie, Riemannsche Geometrie, Potentialtheorie, Gruppentheorie, ...

1.2.3 Informatik

- Komplexitätstheorie.
- Berechenbarkeitstheorie.
- Datenstrukturen = mathematische Strukturen, z.B. relationale Datenbanken.
- Korrektheitsbeweise.

1.2.4 Versicherungsmathematik

- Wie hoch sind die Risiken? Wie hoch müssen die Beiträge sein?
- Wie entwickelt sich ein Portfolio an Verträgen?
- Wie rückversichert man unkontrollierte Risiken?

1.2.5 Wirtschaftsmathematik

- Wie wirtschaftet man am besten?
- Wie gestaltet man ein Portfolio, um für die Zukunft gerüstet zu sein?
- Wie misst man Erfolg? Wie garantiert man ihn?
- Wie verwandelt man Marktdaten in Handlungen?

1.2.6 Ingenieurmathematik

- Wie modelliert, simuliert und optimiert man technische Systeme?
- Auch technische Systeme brauchen Logik. Wie sollte sie sein?
- Wie stellt man Sicherheit her?

1.2.7 Mathematische Geowissenschaften

- Wie verstehen wir einen Ball, an dessen Oberfläche wir nur kratzen können?
- Wie funktioniert die Erde?
- Wie kann der Mensch die Erde nutzen und bewahren?

1.2.8 Biomathematik

- Wie funktioniert das Leben?
- Wie wird das Ökosystem reagieren?

1.2.9 Statistik

- Wir machen aus Daten Wissen.
- Wirkt das Medikament? Ist es sicher?
- Warum kaufen, wählen, sterben, ...?

1.2.10 Öffentliche Statistik

- Wie quantifiziert man die Welt?
- Welche Information ist relevant?
- Wie quantifiziert man Nachhaltigkeit?

1.3 Fachgebiete

Beispiele für Fragen

- Grundlagen der Mathematik
  - Wie funktioniert die Logik?
  - Kann man alle wahren Sätze beweisen?
  - Welche Aussagen könnten wahr sein, müssen aber nicht? Und wann?
  - Gibt es NP-vollständige Probleme, wenn ja für welche Klassen von Rechnern?
  - Wir hinterfragen, was Du für selbstverständlich hälst.
- Algebra
  - Wie löst man $x^3 + 2x + 7 = 0$?
  - Wie rechnet man mit Abbildungen, Gesetzen oder Kategorien?
  - Wie rechnet man ohne Zahlen?
  - Was du mit Zahlen kannst, machen wir mit Allem.
  - $e^{i\pi} + 1 = 0$
- Analysis
  - Ableitungen, Integrale, Folgen und ihre Gesetze.
  - Was ist die Lösung von $f'(x) = F(f(x))$?
  - Was du mit Zahlen kannst, können wir z.B. mit dem Schwerefeld der Erde.

- Diskrete Mathematik
  - Die Gesetze des Endlichen? Nichts ist so schwer wie die Mathematik des Einfachen.
  - Wieviel Farben braucht man, um eine Landkarte zu färben.
  - Wie geht man damit um, wenn man einfach nichts rechnen kann.
- Geometrie
  - Wir verstehen den Raum.
  - Aber leider ist der Raum niemals so flach wie in der Schule.
  - Wir verstehen ihn trotzdem.
- Numerik
  - Computer rechnen immer falsch.
  - Wie kann man trotzdem etwas berechnen, z.B. den Flug einer Marsrakete, den Explosionsverlauf in einem neuen energiesparenden Motor, das Innere eines Körpers aus elektromagnetischen Felddaten oder das Klima im Jahr 2100.
  - Wie rechnet man schnell, richtig und genau?
- Optimierung
  - Wie findet man die beste Lösung für ein Aufgabe?
  - Wie, wenn man nicht alle Lösungen benutzen darf?
  - Wie, wenn es jemanden gibt, der gegen einen arbeitet?
  - Wie, wenn man noch nicht alles weiß?
- Stochastik
  - Was wird wahrscheinlich passieren?
  - Was können wir aus unseren Beobachtungen schließen?
  - Wie geht man mit Dingen um, die jedes Mal anders sind?
  - Wie entscheidet man sich richtig, wenn man noch nicht genug weiß?
  - Du weißt noch nichts, aber wir können trotzdem Antworten.

1.4 Was sind mathematische Fähigkeiten?

Die folgende Definition verwendet die PISA Studie (First Results from Pisa 2003, Executive Summary):

1. At Level 1 students can answer questions involving familiar contexts where all relevant information is present and the questions are clearly defined. They are able to identify information and to carry out routine procedures according to direct instructions in explicit situations. They can perform actions that are obvious and follow immediately from the given stimuli.
   Beispiel: Was ist $23 \cdot 16$?

2. At Level 2 students can interpret and recognise situations in contexts that require no more than direct inference. They can extract relevant information from a single source and make use of a single representational mode. Students at this level can employ basic algorithms, formulae, procedures, or conventions. They are capable of direct reasoning and making literal interpretations of the results.
   Beispiel: Ein rechteckiges Gebiet ist 23 m lang und 16 m breit. Hat es mehr als $1000\,\mathrm{m}^2$?

3. At Level 3 students can execute clearly described procedures, including those that require sequential decisions. They can select and apply simple problem-solving strategies. Students at this level can interpret and use representations based on different information sources and reason directly from them. They can develop short communications reporting their interpretations, results and reasoning.
   Beispiel: Es stehen mehrere Grundstücke zum Verkauf: Eines ist 23 m lang und 16 m breit, ein zweites 30 m lang und 10 m breit und ein drittes 100 m lang und 5 m breit. Welches der Grundstücke ist das größte und warum?

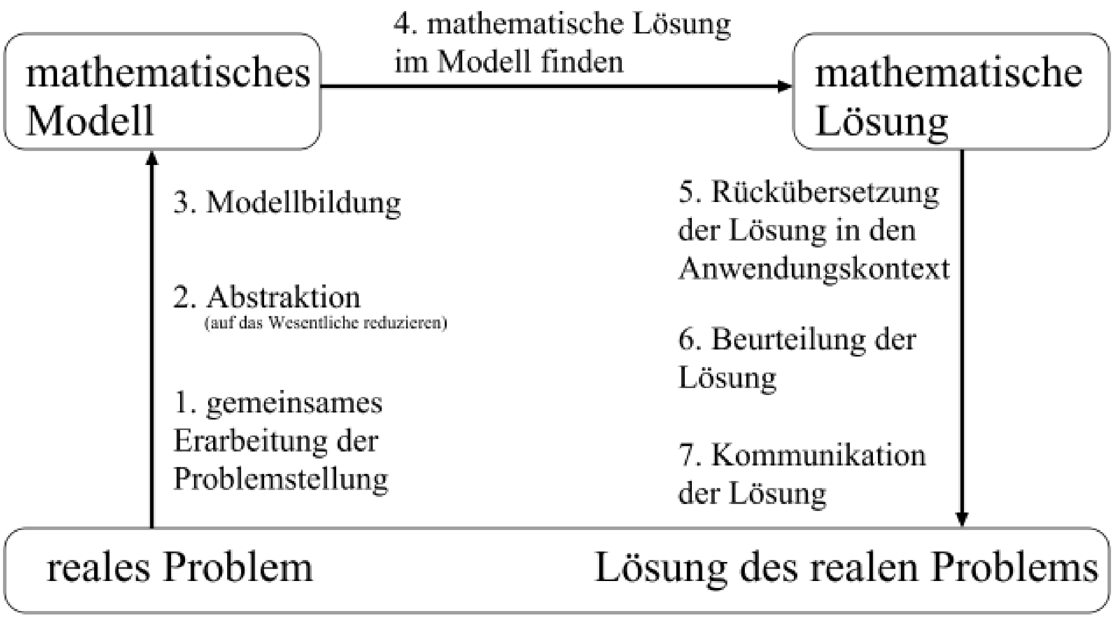
4. At Level 4 students can work effectively with explicit models for complex concrete situations that may involve constraints or call for making assumptions. They can select and integrate different representations, including symbolic ones, linking them directly to aspects of real-world situations. Students at this level can utilise well-developed skills and reason flexibly, with some insight, in these contexts. They can construct and communicate explanations and arguments based on their interpretations, arguments and actions.
   Beispiel: Mehrere Grundstück stehen zum Verkauf. Informationen zu den Grundstücken finden sie in der vorherigen Aufgaben. Die Grundstücke kosten 50.000 \$, 45000 \$ und 40.000 \$. Kommentieren und begründen Sie, welches Sie mir empfehlen würden.

5. At Level 5 students can develop and work with models for complex situations, identifying constraints and specifying assumptions. They can select, compare, and evaluate appropriate problem-solving strategies for dealing with complex problems related to these models. Students at this level can work strategically using broad, well-developed thinking and reasoning skills, appropriately linked representations, symbolic and formal characterisations, and insight pertaining to these situations. They can reflect on their actions and formulate and communicate their interpretations and reasoning.
   Beispiel: Wie sollte man die Grundstücke, die derzeit in Freiberg auf dem Markt sind, bewerten?

6. At Level 6 students can conceptualise, generalise, and utilise information based on their investigations and modelling of complex problem situations. They can link different information sources and representations and flexibly translate among them. Students at this level are capable of advanced mathematical thinking and reasoning. These students can

apply insight and understanding along with a mastery of symbolic and formal mathematical operations and relationships to develop new approaches and strategies for dealing with novel situations. Students at this level can formulate and precisely communicate their actions and reflections regarding their findings, interpretations, arguments and the appropriateness of these to the original situations.
Beispiel: Was sind die derzeit wichtigsten Herausforderungen des Freiberger Grundstücksmarkts. Erstellen Sie eine begründete Handlungsempfehlung für den Stadtrat.

1.5 Mathematische Problemlösung



1.6 Der Mathematiker als Beruf

1.6.1 Mathematik in der technischen Industrie

1.6.2 Mathematik in Versicherungen: Die Ausbildung zum Aktuar

1.6.3 Mathematiker in der Informatik

1.6.4 Mathematiker in der Pharmaindustrie

1.6.5 Mathematiker in Unternehmensberatungen

1.6.6 Mathematik in anderen Wissenschaften

1.6.7 Mathematiker in Führungspositionen

1.6.8 Mathematiker im öffentlichen Dienst

1.6.9 Mathematiker in mathematischen Fachbereichen

1.7 Mathematik in Freiberg

- Institut für Angewandte Analysis
  - Frau Prof. Bernstein, Harmonische Analysis und ihre Anwendungen
  - Herr Prof. Hielscher, Signal- und Bildverarbeitung
  - Herr Prof. Waurick, Partielle Differentialgleichungen
- Institut für diskrete Mathematik und Algebra
  - Herr Prof. Carmesin, Diskrete Strukturen
  - Herr Prof. Schneider, Angewandte Algebra
- Institut für Numerische Mathematik und Optimierung
  - Herr Prof. Aland, Numerische Mathematik
  - Herr Prof. Rheinbach, Hochleistungsrechnen in der Kontinuumsmechanik
- Institut für Stochastik

  - Herr Prof. Sprungk, Angewandte Mathematik
  - Herr Prof. Starkloff, Stochastik
  - Herr Prof. van den Boogaart, Angewandte Stochastik

- Institut für Informatik
  - Herr Prof. Jasper, Künstliche Intelligenz und Datenbanken
  - Herr Prof. Jung, Virtuelle Realität und Multimedia
  - Herr Prof. Pfleging, Ubiquitous Computing and Smart Systems
  - Herr Prof. Zug, Softwaretechnologie und Robotik

Kapitel 2

Kombinatorik

(Prof. K. Gerald van den Boogaart)

2.1 Grundprinzipien

2.1.1 Auswahl aus Möglichkeiten

Frage 1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M auszuwählen?

$n = |M|$

2.1.2 Kombination von Auswahlen

Frage 2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M oder einer Menge N auszuwählen?

$|M \dot{\cup} N| = |M| + |N|$

Frage 3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M und dann aus einer Menge N auszuwählen?

$|M \times N| = |M| \cdot |N|$

Frage 4. Wie viele n-Tupel aus einer Menge M gibt es?

$|M^n| = |M|^n$

Frage 5. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Element aus einer Menge M auszuwählen, wenn kein Element der Menge N gewählt werden darf?

$|M \setminus N| = |M| - |N \cap M|$

2.1.3 Identifikation von Möglichkeiten

Frage 6. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Teilmenge von 2 Elementen aus einer Menge von n Elementen auszuwählen?

Idee: Wir wählen nacheinander ein erstes und ein zweites Element. Für das erste gibt es n Möglichkeiten. Für das zweite $n-1$. Es gibt also $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten für diese Auswahl. Wir erhalten jeweils Teilmengen der Mächtigkeit 2. Aber zwei Möglichkeiten ergeben jeweils die gleiche Teilmenge: Jedes der beiden Elemente könnten zuerst ausgewählt worden sein. Es gehören also jeweils zwei Auswahlentscheidungen zu einer gewählten Teilmenge. Wir teilen also die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten $n(n-1)$ durch die Anzahl 2 der jeweils als gleich zu betrachtenden Fälle.

$$|\{\{a,b\}|a \neq b, a, b \in M\}| = (|M|(|M|-1))/2$$

Die Idee lautet also: Können jeweils k Fälle als gleich betrachtet werden, so teilt man die Anzahl aller Fälle durch die Anzahl der jeweils als gleich zu betrachtenden Fälle.

Spielarten des Identifizierens hier:

- Mengen sind Tupel, deren Reihenfolge egal ist.
- Die Auswahl des zweiten Elements erfolgt aus einer Restmenge, deren Zusammensetzung egal ist. Deshalb verwenden wir das Produkt obwohl wir es mit verschiedenen Mengen zu tun haben.
- Zwei Auswahlen werden identifiziert, wenn sie zum gleichen Ergebnis führen.

Merke: Für die Anzahl ist es also immmer wichtig klar zu definieren, welche Situationen als gleich betrachtet werden. Dabei kann ein „Ding“ leicht ein mathematisches Objekt, wie z.B. eine Menge sein.

2.1.4 Mit oder ohne Wiederholen

Bei multiplen Auswahlen aus einer Menge ist es immer wichtig, ob ein bereits gewähltes Element noch mal gewählt werden darf: also $n \cdot n$ vs. $n \cdot (n-1)$.

2.2 Teilmengen

Frage 7. Wie viele Teilmengen hat eine Menge M?

$2^{|M|}$, weil wir für jedes Element eine Auswahl aus $\{ja, nein\}$ treffen können.

2.3 Permutationen: Anordnen

Frage 8. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Elemente einer Menge M in einer Reihenfolge anzuordnen?

$|\{(a_1, \dots, a_n) \,|\, a_i \neq a_j \Leftrightarrow i \neq j \;\wedge\; a_i \in M\}| = \prod_{i=0}^{|M|-1} (M - i) =: |M|!$

2.4 Variationen: Teilauswahlen mit Reihenfolge

Frage 9. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge N mit n Elementen m Elemente in einer Reihenfolge anzuordnen, wobei die Elemente mehrfach gewählt werden dürfen?

$|\{(a_1, \dots, a_m) \,|\, a_i \in M\}| = \prod_{i=0}^{m} n = n^m$

Frage 10. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge M der Größe $|M| = n$ m **verschiedene** in einer Reihenfolge auszuwählen? (Variation ohne Wiederholung)

$|\{(a_1, \dots, a_m) \,|\, a_i \neq a_j \Leftrightarrow i \neq j \;\wedge\; a_i \in M\}| = \prod_{i=0}^{m-1} (n - i) =: \frac{n!}{(n-m)!}$

2.5 Kombinationen: Auswahl

Frage 11. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge N der Größe n k Auswahlen zu treffen, wobei die Elemente mehrfach gewählt werden können, aber ihre Reihenfolge egal ist? (Kombination mit Wiederholung)

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Frage 12. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge N der Größe n Teilmengen der Größe k zu bilden? (Kombination ohne Wiederholung)

$$|\{K | K \subset N, |K| = k\}| = \frac{n!}{(n-k)!k!} =: \binom{n}{k}$$

2.6 Hintergrund zu Aufgaben mit Wahrscheinlichkeitsbezug

Bei Laplacewahrscheinlichkeiten geht man davon aus, dass alle Kombinationsmöglichkeiten gleich wahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gewisse Teilmenge von Möglichkeiten eintritt, entspricht dann dem Anteil dieser Möglichkeiten an der Gesamtzahl aller Möglichkeiten.

Bei Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Experimente geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Möglichkeiten gemeinsam auftreten, dem Produkt ihrer Auftretenswahrscheinlichkeiten entsprechen. Ist also z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein sechsseitiger Würfel eine bestimmte Zahl, wie eine 6 zeigt, 1/6, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Werfen von zwei Würfeln der erste und der zweite Würfel 6 zeigen gleich $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Es gibt aber zwei Möglichkeiten und damit eine Wahrscheinlichkeit von $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ dafür, dass eine 5 und eine 6 gewürfelt wird, da der erste oder der zweite Würfel eine 6 gewürfelt haben könnte und der andere es ergänzt hat.

2.7 Übungsaufgaben

Frage 13. Wir haben eine Klasse mit 24 Schülern, davon 12 Jungen und 12 Mädchen.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, jemanden für eine Aufgabe auszusuchen?
2. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, in der Klasse ein Tanzpaar (also ein Junge und ein Mädchen) zu bilden?
3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Klasse vollständig in Tanzpaare aufzuteilen?
4. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 Schüler oder Schülerinnen für eine Auswähl auszuwählen?
5. Wie ändert sich diese Anzahl, wenn in der Auswahl mindestens ein Junge und ein Mädchen sein muss?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Auswahl von 6 Personen, keine Schülerin in der Auswahl ist?
7. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Fall die Auswahl nur ein Geschlecht zeigt?
8. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 gleich große Mannschaften zu bilden?
9. Der Lehrer wählt angeblich zufällig mit einer Laplacewahrscheinlichkeit 10 mal hintereinander einen Schüler oder eine Schülerin aus. Wie hoch ist unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest ein Schüler oder eine Schülerin zweimal getroffen wird?

Frage 14. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten hat ein 5–stelliges Zahlenschloss?

Frage 15. Was ist die Wahrscheinlichkeit für einen 6-er beim Lotto 6 aus 49 ?

Frage 16. Beim Spiel „Mensch ärgere Dich nicht!“ kann man beginnen, d.h. kann eine der vier Figuren herausgesetzt werden, wenn man eine 6 würfelt.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, nach 10 Runden genau 4 Mal eine 6 gewürfelt zu haben?

2. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn die 4-te Sechs genau in der 10-ten Runde kommen soll?

Frage 17. Wie viele Möglichkeiten gibt es, Rubik's Cube zusammenzubauen? (und wieviele ihn einzustellen, ohne ihn zu zerlegen?)

Frage 18. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Anschlüsse jeweils mit einem von 7 Anschlüssen zu verbinden, so dass jeder der 4 Anschlüsse mit einem anderen der 7 verbunden ist und die verbleibenden frei bleiben?

Frage 19. Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es für 6 Gäste an einem runden Tisch? Wie viele sind es, wenn immer abwechselnd ein Mann und eine Frau sitzen muss? Wie viele sind es, wenn zusätzlich Donald nicht neben Hillary sitzen darf?

Frage 20. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge N der Mächtigkeit $|N|$ in m Folgen der Längen $k_1, \ldots, k_m$ einzuteilen, wobei Wiederholungen erlaubt sind?

Frage 21. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge N der Mächtigkeit $|N|$ in m Folgen der Längen $k_1, \ldots, k_m$ einzuteilen, wobei Wiederholungen nicht erlaubt sind?

Frage 22. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge N mit $n = |N|$ Elementen in m disjunkte Teilmengen der Größen $n_1, \ldots, n_m$ aufzuteilen?

Kapitel 2

Grundlegendes der Mathematik

(Dr. Jan Kurkofka, M. Sc. William Joseph Turner, Skript von Prof. Udo Hebisch)

2.1 Logik

Unter einer „Aussage“ versteht man in der Mathematik einen in einer natürlichen oder formalen Sprache formulierten Satz, für den eindeutig festgestellt werden kann, ob er in einer gewissen „realen Welt“ entweder wahr oder falsch ist. Also ist keine Aussage sowohl wahr als auch falsch! Typische Sätze (aus der „Welt der natürlichen Zahlen“) sind in natürlicher Sprache formuliert etwa

A: 2 teilt 9.

B: 3 ist eine ungerade Primzahl.

C: 6 ist eine perfekte Zahl.

D: 13 ist eine Unglückszahl.

E: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

F: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

Die Wahrheit oder Falschheit von A und B kann dabei sehr schnell bestimmt werden, sobald die in den Aussagen auftretenden Begriffe „teilt“, „ungerade“ und „Primzahl“ geklärt sind (vgl. den Anfang von Abschnitt 2.3). Dasselbe gilt für C, da auch der Begriff „perfekte Zahl“ eine exakte mathematische Bedeutung hat. Dagegen gibt es keine exakte Definition der „Glückszahl“ bzw. „Unglückszahl“ und daher wird D nicht als (mathematische) Aussage betrachtet.

Es ist aber erheblich schwieriger, die Wahrheit von E festzustellen, selbst wenn der Begriff „unendlich“ präzisiert worden ist (vgl. dazu die Sätze 2.3.4 und 2.3.5).

Schließlich wird F ebenfalls als mathematische Aussage betrachtet, obwohl bis heute noch niemand entscheiden konnte, ob dieser Satz wahr oder falsch ist.

Der *Wahrheitswert* $v(A)$ einer beliebigen Aussage A ist also entweder wahr ($v(A) = w$) oder falsch ($v(A) = f$).

Sind A und B Aussagen, so kann man beide durch *logische Junktoren* wie folgt verknüpfen

Negation	$\neg A$	gelesen: „nicht A“
Konjunktion	$A \wedge B$	gelesen: „A und B“
Disjunktion	$A \vee B$	gelesen: „A oder B“
Implikation	$A \rightarrow B$	gelesen: „aus A folgt B“
Äquivalenz	$A \leftrightarrow B$	gelesen: „A ist gleichwertig zu B“

Der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage ergibt sich aus folgenden *Wahrheitswertetafeln.* Man beachte dabei, daß auch bei der Implikation und der Äquivalenz kein *inhaltlicher* Zusammenhang zwischen den Aussagen A und B bestehen muß.

$v(A)$	$v(\neg A)$
f	w
w	f

$v(A)$	$v(B)$	$v(A \wedge B)$	$v(A \vee B)$	$v(A \rightarrow B)$	$v(A \leftrightarrow B)$
f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

Schließlich hat man für die in vielen mathematischen Aussagen auftretenden Formulierungen „für jedes x gilt“ und „es gibt ein x, für das gilt“ die beiden *Quantoren* eingeführt:

Allquantor	$\forall x$	gelesen: „für jedes x gilt“ oder „für alle x gilt“
Existenzquantor	$\exists x$	gelesen: „es gibt ein x, für das gilt“

Formalisierungen und formale Umformungen können in der Mathematik für das Finden von Beweisen hilfreich sein. Beispielsweise ist die folgende Aussage wahr:

Die Quadratwurzel aus 2, also $\sqrt{2}$, ist keine rationale Zahl.

Mit den mengentheoretischen Definitionen des nächsten Abschnitts kann man dies formelmäßig auch so ausdrücken: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ bzw. $\neg(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$.

Diese Schreibweise liefert zunächst noch keine Idee für einen Beweis dieser Aussage, aber man kann den Sachverhalt mit Hilfe des Existenzquantors auch etwas formaler schreiben:

$$\neg(\exists x : x \in \mathbb{Q} \wedge x = \sqrt{2}),$$

oder, wenn man das Zeichen für die Quadratwurzel durch Quadrieren auflöst:

$$\neg(\exists x : x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2),$$

Berücksichtigt man nun noch den Zusammenhang zwischen den beiden Quantoren und der Negation, so erhält man einen Ansatz für einen Beweis (zur Ausführung vgl. Satz 2.4.3):

$$\forall x : x \in \mathbb{Q} \to \neg(x^2 = 2).$$

2.2 Mengen

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Diese „naive“ Definition des Begriffes *Menge* wird in der Vorlesung „Lineare Algebra 1“ bald präzisiert, reicht für unsere Zwecke aber zunächst aus.

Die Objekte x einer Menge M heißen *Elemente von* M, in Zeichen: $x \in M$. Gehört ein Objekt y nicht zu der Menge M, so schreibt man kurz $y \notin M$.

Für zwei Mengen A und B schreibt man $A \subseteq B$ (gelesen: „A ist Teilmenge von B“), wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Damit hat man

$$A = B \;\leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A$$

und man definiert „A ist echte Teilmenge von B“ durch

$$A \subset B \;\leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B.$$

Die Beschreibung von Mengen erfolgt durch

- Aufzählen der Elemente, z. B.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\; B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

- Angabe einer charakteristischen Eigenschaft der Elemente

$$B = \{x \mid x \text{ ist eine gerade ganze Zahl } > 0\},$$

$$C = \{x \mid x \in B \;\wedge\; x \text{ ist durch 3 teilbar}\} = \{6, 12, 18, \ldots\}.$$

Es bezeichnet $|M|$ die *Anzahl der Elemente von* M, also $|A| = 5, |B| = \infty$.

Sind A und B Mengen, so kann man durch die folgenden *Mengenoperationen* neue Mengen bilden.

Durchschnitt	$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
Vereinigung	$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$
Differenz	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$
Kartesisches Produkt	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ \wedge \ y \in B\}$
Potenzmenge	$\mathfrak{P}(A) = \{T \mid T \subseteq A\}$

Für bestimmte Mengen sind spezielle Symbole und Bezeichnungen üblich:

$\emptyset$	die *leere Menge*
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	die Menge der *natürlichen Zahlen*
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	die Menge der *ganzen Zahlen*
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$	die Menge der *rationalen Zahlen*
$\mathbb{R}$	die Menge der *reellen Zahlen*, d. h. die Menge aller endlichen oder unendlichen Dezimalbrüche
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	die Menge der *Irrationalzahlen*

Zwei Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ nennt man *disjunkt*. Ist A Teilmenge einer Menge M, so nennt man $M \setminus A$ auch das *Komplement von A in M*. Offensichtlich sind daher A und sein Komplement $M \setminus A$ stets disjunkt. Also bilden die Irrationalzahlen gerade das Komplement der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen.

2.3 Teilbarkeit und Primzahlen

Auf der Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen wird die Relation $\leq$ (gelesen: „kleiner oder gleich“) definiert durch

$$m \leq n \ \leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = m + k$$

und die Relation $\mid$ (gelesen: „teilt“) durch

$$m \mid n \ \leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = m \cdot k.$$

Für $m \mid n$ nennt man m einen *Teiler von n* und n *ein Vielfaches von m*. Gilt $2 \mid n$, so heißt n *gerade*, andernfalls *ungerade*. Ein Teiler $m \neq n$ von n heißt *echter Teiler*.

Für $m \leq n$ mit $m \neq n$ schreibt man auch $m < n$ (gelesen: „m [ist] echt kleiner [als] n“). Außerdem dreht man $m \leq n$ auch gelegentlich um zu $n \geq m$ und liest dann „n [ist] größer oder gleich m“. Entsprechend liest man $n > m$ als „n [ist] echt größer [als] m“.

Definition 2.3.1. Eine natürliche Zahl $n > 1$ heißt eine *Primzahl*, wenn n nur die Teiler 1 und n besitzt, andernfalls nennt man n zusammengesetzt. Die Menge aller Primzahlen werde mit $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ bezeichnet.

Definition 2.3.2. Für natürliche Zahlen a und b nennt man die natürliche Zahl d einen *größten gemeinsamen Teiler von a und b* (geschrieben: $d = ggT(a, b)$), wenn die folgenden Bedingungen gelten

1. $d \mid a \ \wedge \ d \mid b$,

2. $t \mid a \ \wedge \ t \mid b \ \rightarrow \ t \mid d$.

Für $ggT(a, b) = 1$ heißen a und b *teilerfremd*.

Satz 2.3.3. Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen kleinsten Teiler $d > 1$. Dieser ist stets eine Primzahl.

Beweis: Jedenfalls ist $d = n > 1$ ein Teiler von n und daher die Menge T aller Teiler $d > 1$ von n nicht leer. Ist $d \in T$, so gilt $n = d \cdot m$ für eine natürliche Zahl m. Daher ist $d = \frac{n}{m} \leq n$. Da es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die kleiner oder gleich n sind, ist die Menge $T \neq \emptyset$ endlich und besitzt damit ein kleinstes Element d.

Jede natürliche Zahl k mit $1 < k < d$ ist also kein Teiler von n und daher auch nicht von d, da ein Teiler von d immer auch schon ein Teiler von n ist. Also ist d eine Primzahl. $\diamond$

Satz 2.3.4. (Euklid) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Um den hier noch sehr unpräzisen Begriff „unendlich“ zu vermeiden, kann man den gemeinten Inhalt des Satzes auch folgendermaßen ausdrücken:

Satz 2.3.5. Ist $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ eine beliebige endliche Menge von Primzahlen, dann gibt es eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ mit $p \notin P$.

Beweis: Betrachte zu P die Zahl $n = 1 + \prod_{i=1}^{k} p_i > 1$. Dann besitzt n einen kleinsten Primteiler p. Wäre $p = p_i \in P$, dann wäre p als Teiler von n und von $\prod_{i=1}^{k} p_i$ auch ein Teiler der Differenz $1 = n - \prod_{i=1}^{k} p_i$, was für eine Primzahl unmöglich ist. Also gilt $p \notin P$. $\diamond$

Auch der folgende Satz geht auf Euklid zurück.

Satz 2.3.6. (Division mit Rest) Zu natürlichen Zahlen a und $b \neq 0$ existieren stets eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q und r mit $a = qb + r$ und $0 \leq r < b$.

Beweis: Wegen $b > 0$ kann man die natürlichen Zahlen in halboffene Intervalle $[kb, (k + 1)b)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ einteilen. Diese Intervalle haben die Länge b, sind paarweise disjunkt und überdecken $\mathbb{N}_0$ vollständig. In genau einem dieser Intervalle $[qb, qb + b)$ liegt also a. Dann erfüllt $r = a - qb \in \mathbb{N}_0$ aber $r < b$ und $a = qb + r$. Außerdem bestimmt a die linke Intervallgrenze und damit q eindeutig und r ist als Differenz $a - qb$ dann ebenfalls eindeutig bestimmt. $\diamond$

Satz 2.3.7. (Euklidischer Algorithmus) Es seien a und $b \neq 0$ natürliche Zahlen. Führt man iteriert Divisionen mit Rest gemäß dem folgenden Schema aus, so bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, weil die letzte Division aufgeht. Der letzte Rest $r_n \neq 0$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b.

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 \\
b &= q_2 r_1 + r_2 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\
&\dots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n
\end{aligned}$$

Beweis: Für die Divisionsreste gilt $b > r_1 > r_2 > \ldots > r_n \geq 0$, das Verfahren muß also nach spätestens b Schritten abbrechen. Aus der letzten Gleichung liest man $r_n \mid r_{n-1}$ (und wegen $r_n < r_{n-1}$ auch $q_{n+1} > 1$) ab, dann aus der vorletzten Gleichung $r_n \mid r_{n-2}$ usw. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich schließlich $r_n \mid b$ und aus der ersten $r_n \mid a$. Also ist r_n gemeinsamer Teiler von a und b.

Löst man die ersten n Gleichungen nach den jeweiligen Divisionsresten auf, so erhält man

$$\begin{aligned}
r_1 &= a - q_1 b \\
r_2 &= b - q_2 r_1 \\
r_3 &= r_1 - q_3 r_2 \\
&\dots \\
r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1}
\end{aligned}$$

Ist nun t ein gemeinsamer Teiler von a und b, so folgt aus der ersten Gleichung $t \mid r_1$, dann aus der zweiten $t \mid r_2$ usw. Aus der letzten Gleichung erhält man schließlich $t \mid r_n$. Dies zeigt $r_n = ggT(a, b)$. $\diamond$

2.4 Beweistechniken

2.4.1 Der direkte Beweis

Bei dieser Methode wird eine Aussage durch eine Kette von Implikationen aus einer oder mehreren Voraussetzungen abgeleitet.

Satz 2.4.1. Zu jeder natürlichen Zahl $n > 1$ existieren endlich viele Primzahlen $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_m$ mit

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i. \tag{2.1}$$

Faßt man gleiche Faktoren jeweils zu einer Potenz zusammen, so existieren also stets endlich viele Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ und Exponenten $\alpha_i \geq 1$ für $i = 1, \ldots, k$ mit

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}. \tag{2.2}$$

Beweis: Nach Satz 2.3.3 existiert eine Primzahl p_1 mit $n = p_1 \cdot n_1$ und $n_1 < n$. Im Fall $n_1 = 1$ ist die Aussage für $m = 1$ bewiesen. Sonst besitzt n_1 einen kleinsten Primteiler p_2 mit $n_1 = p_2 \cdot n_2$ und $n_2 < n_1 < n$. Wegen $n = p_1 n_1 = p_1 p_2 n_2$ ist p_2 auch Primteiler von n und es gilt daher $p_1 \leq p_2$. Im Fall $n_2 = 1$ ist die Aussage für $m = 2$ bewiesen. Sonst kann man fortfahren und erhält auf diese Weise eine Folge von Primteilern $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \ldots$ von n und natürlichen Zahlen $n > n_1 > n_2 > \ldots$. Diese muß spätestens nach n Schritten abbrechen und man erhält so ein $n_m = 1$ und die behauptete Zerlegung (2.1).

Die Behauptung über (2.2) ist dann klar. $\diamond$

Man nennt (2.2) die *Primfaktorzerlegung von n* und kann zeigen, daß die darin auftretenden Primzahlen p_i bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt sind. Ebenso ist der jeweilige Exponent α_i von p_i eindeutig bestimmt.

2.4.2 Der Beweis durch Kontraposition

Hierbei ist eine Implikation der Form $A \to B$ zu beweisen, d. h. aus der Voraussetzung A ist die Behauptung B herzuleiten. Da diese Implikation gleichwertig zu der Implikation $\neg B \to \neg A$ ist, wie die entsprechende Wahrheitswertetafel zeigt, kann man auch aus der Voraussetzung $\neg B$ die Behauptung $\neg A$ durch direkten Beweis herleiten.

Satz 2.4.2. Ist das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n gerade, dann ist n selbst gerade.

Beweis: Der Beweis wird durch Kontraposition geführt. Es ist also für die Aussagen $A =$ „n^2 ist gerade“ und $B =$ „n ist gerade“ die Implikation $A \to B$ zu zeigen. Daher kann auch $\neg B \to \neg A$ bewiesen werden.

Dabei ist die Negation $\neg A$ die Aussage „n^2 ist ungerade“ und die Negation $\neg B$ die Aussage „n ist ungerade“.

Sei also n ungerade, d. h. $n = 2k + 1$ für eine natürliche Zahl k. Hieraus folgt $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1 = 2k' + 1$ mit der natürlichen Zahl $k' = 2k^2 + 2$. Also ist auch n^2 ungerade.

Damit ist $\neg B \to \neg A$ und dazu gleichwertig $A \to B$ bewiesen. $\diamond$

Naheliegende Fragen: Gilt die Aussage auch für höhere Potenzen n^k mit $k = 3, 4, \ldots$? Gilt die Aussage auch für andere Teiler $d = 3, 4, 5, \ldots$ von n?

2.4.3 Der Widerspruchsbeweis

Diese Beweistechnik beruht darauf, daß eine Aussage A genau dann wahr ist, wenn ihre Negation $\neg A$ falsch ist. Man zeigt nun, daß $\neg A$ falsch ist, indem man aus der Annahme von $\neg A$ einen Widerspruch zu irgend einer anderen schon als wahr bewiesenen Aussage B herleitet.

Satz 2.4.3. Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis: Der Beweis wird als Widerspruchsbeweis geführt. Dazu nimmt man an, $\sqrt{2}$ sei doch eine rationale Zahl, also $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen $m, n \neq 0$, wobei m und n teilerfremd seien, was man durch Kürzen des größten gemeinsamen Teilers immer erreichen kann.

Es gelte also $n\sqrt{2} = m$ mit natürlichen, teilerfremden Zahlen m und n. Durch Quadrieren erhält man $2n^2 = m^2$. Also ist m^2 und damit nach Satz 2.4.2 auch m gerade, also $m = 2k$ für eine natürliche Zahl k. Es folgt $2n^2 = 4k^2$ und daher $n^2 = 2k^2$. Also ist auch n^2 und damit n gerade. Dies widerspricht der Teilerfremdheit von m und n. Daher kann es keine solche Zahlen m und n geben und $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. $\diamond$.

Naheliegende Fragen: Gilt die Aussage auch für andere natürliche Zahlen n anstelle von $n = 2$? Welche reellen Zahlen sind mit $\sqrt{2}$ noch irrational?

2.4.4 Der Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

Diese Methode kann dann angewandt werden, wenn eine Aussage über mathematische Objekte bewiesen werden soll, die sich in verschiedene Klassen einteilen lassen. Man führt dann den Beweis für jede Klasse einzeln. Dabei kann man jeweils zusätzliche Eigenschaften verwenden, die alle Objekte in der betreffenden Klasse haben.

Satz 2.4.4. Zu jeder Primzahl $p > 2$ gibt es eine natürliche Zahl k, so daß $p = 4k + 1$ oder $p = 4k + 3$ gilt.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Fallunterscheidung nach den (eindeutig bestimmten) möglichen Resten r, die p bei der Division mit Rest durch 4 besitzen kann. Es gilt also $p = k \cdot 4 + r$ mit natürlichen Zahlen k und r sowie $0 \leq r < 4$.

1. Fall: $r = 0$. Dann würde bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4$ gelten und die Primzahl p wäre durch 4 teilbar. Da dies nicht sein kann, tritt dieser Fall niemals ein.

2. Fall: $r = 1$. Dann gilt bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4 + 1$ und eine natürliche Zahl k wie im Satz behauptet ist gefunden.

3. Fall: $r = 2$. Dann würde bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4 + 2 = 2(2k + 1)$ gelten und die Primzahl $p > 2$ wäre durch 2 teilbar. Da dies nicht sein kann, tritt dieser Fall ebenfalls nicht ein.

4. Fall: $r = 3$. Dann gilt bei Division durch 4 also $p = k \cdot 4 + 3$ und eine natürliche Zahl k wie im Satz behauptet ist gefunden.

Es bleiben also für eine Primzahl $p > 2$ nur zwei mögliche Fälle und in jedem von ihnen ist die Aussage des Satzes wahr.

Naheliegende Frage: Welche Darstellungen haben ungerade Primzahlen bei anderen geraden natürlichen Zahlen m anstelle von $m = 4$? ◇

2.4.5 Der Beweis durch vollständige Induktion

Diese Methode kann für den Beweis von Aussagen verwendet werden, die sich auf natürliche Zahlen beziehen. Sie beruht auf dem folgenden *Induktionsprinzip* für natürliche Zahlen:

Zu beweisen ist eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n (oder für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$, wobei n_0 eine bestimmte natürliche Zahl ist).

Zunächst wird als *Induktionsbeginn* die Aussage $A(n_0)$ für eine möglichst kleine natürliche Zahl n_0 gezeigt, meistens $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$.

Dann wird die Implikation $A(n) \to A(n + 1)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ bewiesen. Dabei setzt man also voraus, daß $A(n)$ für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq n_0$ wahr ist und folgert hieraus durch einen direkten Beweis, daß dann auch $A(n + 1)$ wahr sein muß. Diesen Teil des Beweises nennt man den *Induktionsschritt*.

Damit kann man die Wahrheit von $A(n)$ für jede beliebige natürliche Zahl $n \geq n_0$ durch die folgende Schlußkette begründen: Zunächst gilt ja nach dem Induktionsbeginn $A(n_0)$. Hieraus folgt mit dem Induktionsschritt auch die Gültigkeit von $A(n_0+1)$. Nochmalige Anwendung des Induktionsschrittes liefert die Gültigkeit von $A(n_0 + 2)$. Durch $(n - n_0)$-malige Anwendung des Induktionsschrittes gelangt man damit zur Gültigkeit von $A(n)$. Man beachte, daß für jedes konkrete $n \geq n_0$ die benötigte Schlußkette endlich ist.

Satz 2.4.5. Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$2^n < \binom{2n}{n}. \tag{2.3}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n. Für $n = 2$ gilt

$$\binom{2 \cdot 2}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 > 4 = 2^2.$$

Gelte also (2.3) für ein $n \geq 2$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n! n!} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} \\ &> \frac{2n+1}{n+1} \cdot 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt die Voraussetzung der Gültigkeit von (2.3) für dieses $n \geq 2$ ausgenutzt und im letzten Schritt die Ungleichung $2n+1 \geq n+1$ für alle natürlichen Zahlen n. Damit ist der Schluß von n auf $n+1$ gezeigt und aus dem Induktionsprinzip folgt nun die Behauptung für jedes $n \geq 2$. $\diamond$

2.5 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie mittels einer Wahrheitswerttabelle, dass es sich bei dem folgend gegebenen Ausdruck für beliebige Aussagen x und y um eine Tautologie (d.h. eine wahre Aussage) handelt:

$$\big((x \to y) \wedge (\neg y)\big) \to (\neg x).$$

2. Formalisieren Sie die Aussagen

Es gibt eine Menge, deren Potenzmenge höchstens so viele Elemente wie sie selbst besitzt.
Das Quadrat des Nachfolgers jeder ungeraden natürlichen Zahl ist durch 4 *teilbar.*

und negieren Sie diese anschließend.

3. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln für beliebige Mengen A, B, C und D:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D),$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

4. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$47 \,|\, 7^{2n} - 2^n.$$

5. Zeigen Sie mittels eines Widerspruchsbeweises, dass für nichtnegative reelle Zahlen a und b stets die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

6. Zeigen Sie mittels eines direkten Beweises, dass die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 eine Quadratzahl ist.

Kapitel 3

Funktionen, Folgen und Reihen

(Dr. Gunter Semmler, Skript von Prof. Elias Wegert)

3.1 Vorbemerkungen

Die Mathematik zeichnet sich unter anderem durch eine ungewohnte Schärfe der Begriffsbildungen aus – in der Regel ist bei der Beschreibung eines mathematischen Sachverhalts jedes Wort von Bedeutung. Im Laufe der Entwicklung einer „mathematischen Kultur“ haben sich bestimmte standardisierte Redewendungen herausgebildet, von denen Sie einige bereits aus den vorangehenden Kapiteln kennen. Nicht immer sind mathematische Begriffe mit denen in der Schule verwendeten deckungsgleich – achten Sie deshalb genau auf Formulierungen und versuchen Sie, solche Unterschiede festzustellen und zu verstehen.

3.2 Funktionen

Der Begriff „Funktion“ ist eines der wichtigsten mathematischen Konzepte überhaupt. Im Studium werden Sie sehr allgemeine Funktionen kennenlernen, die kaum noch etwas mit den aus der Schule bekannten Funktionen zu tun haben. Wir geben deshalb die folgende Definition, die für unsere Zwecke das Wesen von Funktionen gut beschreibt.

Definition 3.2.1. Eine *Funktion* $f : X \to Y$ ist eine *Zuordnungsvorschrift*, die *jedem* Element x einer Menge X *genau ein* Element $f(x)$ aus einer Menge Y zuordnet. Die Menge X heißt *Definitionsbereich* der Funktion, die Menge Y wird als *Wertevorrat* der Funktion bezeichnet. Das Element $f(x)$ ist der *Funktionswert* des Elements x unter der Wirkung der Funktion f.

Symbolisch schreibt man Funktionen (ausführlich) in der Form

$$f : X \to Y,\ x \mapsto f(x),$$

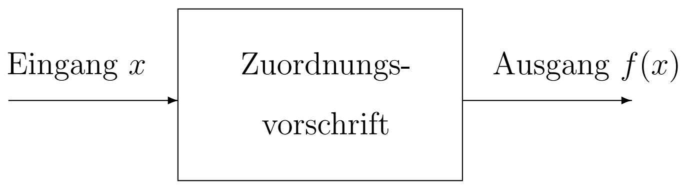
und liest dies (beispielsweise) als „die Funktion f wirkt von X in Y und bildet (das *Argument*) x auf (den *Funktionswert*) $f(x)$ ab.“

Man beachte, dass die Funktion als Ganzes mit dem Symbol f bezeichnet wird, während $f(x)$ für den Funktionswert von x (unter der Abbildung f) steht.[1]

In der Analysis ist *Abbildung* ein Synonym für Funktion, den Definitionsbereich nennt man auch *Definitionsgebiet*, und anstelle von Wertevorrat sagt man auch *Zielbereich*.

Wer ganz kritisch ist (und das ist gut!), wird bemängeln, dass die Definition den Begriff *Zuordnungsvorschrift* verwendet, der genau genommen ebenfalls erklärt werden muss. Dies kann man formal mit Hilfe von *Relationen* tun. Wir gehen aber davon aus, dass dieses Konzept intuitiv verständlich ist: in eine „Zuordnungsvorschrift“ steckt man etwas hinein, nämlich (zulässige) Elemente x des Definitionsbereichs X, und es kommt etwas heraus, nämlich das zugeordenete Element $f(x)$.

Die Wirkung einer Funktion kann man gut mit einem „Blockschaltbild“ veranschaulichen. Die „Eingangsvariable“ x wird auch als *Argument* der Funktion bezeichnet, der Funktionswert $y = f(x)$ ist die „Ausgangsvariable“ der Funktion.



Achtung: Zur Festlegung einer Funktion gehört neben der Zuordnungsvorschrift immer auch die Angabe ihres Definitionsbereichs. Die beliebten Aufgaben der Art „Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion soundso“ (wobei „soundso“ für eine Zuordnungsvorschrift steht) haben keinen Sinn! Die Angabe des Wertevorrats Y ist dagegen mit etwas Willkür behaftet: Jeder mögliche Wertevorrat muss zumindest alle Funktionswerte $f(x)$ von Elementen x des Definitionsgebiets X enthalten, die Menge Y kann aber auch größer gewählt werden. Der kleinstmögliche Wertevorrat

$$W = \{f(x) : x \in X\}$$

wird als *Wertebereich* oder *Bildmenge* der Funktion bezeichnet. Sind A und B beliebige Teilmengen von X bzw. Y, nennt man die Mengen

$$f(A) := \{f(x) \in Y : x \in A\}, \qquad f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Bildmenge von A bzw. *Urbildmenge* von B unter der Abbildung f.

Wie oben bereits erläutert, gehört zu einer Funktion stets die Angabe ihres Definitionsbereichs. Wenn man diesen (künstlich) verkleinert, erhält man eine neue Funktion.

[1]Diese Unterscheidung wird allerdings nicht immer streng eingehalten.

Definition 3.2.2. Eine Funktion $f_1 : X_1 \to Y_1$ heißt *Einschränkung* der Funktion $f_2 : X_2 \to Y_2$, wenn X_1 eine (nicht notwendig echte) *Teilmenge*[2] von X_2 ist, $X_1 \subset X_2$, und für jedes $x \in X_1$ gilt $f_1(x) = f_2(x)$. Die Funktion f_2 wird dann als *Fortsetzung* von f_1 auf X_2 bezeichnet. Zwei Funktionen heißen *gleich*, wenn jede eine Fortsetzung der anderen ist.

Zwei Funktionen $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ sind also genau dann *gleich*, wenn ihre Definitionsbereiche übereinstimmen, $X_1 = X_2$, und für jedes $x \in X_1$ gilt $f_1(x) = f_2(x)$.

Der Funktionsbegriff verlangt, dass eine Funktion $f : X \to Y$ jedem $x \in X$ *genau einen*[3] Funktionswert $y := f(x)$ aus Y zuordnet. Es ist allerdings möglich, dass *verschiedene x denselben* Funktionswert besitzen. Um das gegebenenfalls ausschließen, führt man die folgenden Begriffe ein.

Definition 3.2.3. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

(i) *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets folgt $x_1 = x_2$,

(ii) *surjektiv*, wenn ihre Bildmenge $f(X)$ gleich Y ist,

(iii) *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Der letzte Begriff ist insbesondere wichtig, wenn man Umkehrfunktionen betrachtet. Wie der Name vermuten lässt, kehrt eine Umkehrfunktion g von $f : X \to Y$ die Abbildungsrichtung um und hebt dabei die Wirkung von f auf; also $g : Y \to X$ und $y = f(x)$ gilt genau dann, wenn $x = g(y)$. Dies ist gleichbedeutend mit den Bedingungen $x = g(f(x))$ für alle $x \in X$ und $y = f(g(y))$ für alle y. Um dies noch etwas zu formalisieren, definieren wir einige Begriffe.

Definition 3.2.4. Die *Verkettung* oder *Komposition* zweier Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist die Funktion $g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$. Die Funktion $\mathrm{id}_X : X \to X,\ x \mapsto x$ heißt *identische Abbildung* von X.

Man veranschauliche sich diese Definitionen mit einem „Blockschaltbild“.

Definition 3.2.5. Eine Funktion $g : Y \to X$ heißt *Umkehrfunktion* (*inverse Funktion*) der Funktion $f : X \to Y$, falls $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Man überlege sich, dass eine Funktion genau dann eine Umkehrfunktion besitzt, wenn sie bijektiv ist. Die Umkehrfunktion ist dann eindeutig bestimmt und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Funktionen beschreiben Abhängigkeiten (des Funktionswerts $f(x)$ vom Argument x). Ein zentrales Thema ist deshalb das Verhalten der Funktionswerte bei Änderung des Arguments. Dies kann man unter verschiedenen Aspekten untersuchen. Wir betrachten hier nur Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, die auf einer Teilmenge X der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert sind und reelle Funktionswerte annehmen. Eine einfache Eigenschaft wird in der folgenden Definition beschrieben.

[2] In der Analysis und vielen (aber nicht allen) Bereichen der Mathematik schließt das Teilmengenymbol $X_1 \subset X_2$ die Gleichheit beider Mengen ein.

[3] Man beachte, dass in der Mathematik „es gibt ein(en)“ immer im Sinne von „es gibt mindestens ein(en)“ gebraucht wird.

Definition 3.2.6. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ heißt

(i) *monoton wachsend* (*monoton steigend*), wenn aus $x_1 < x_2$ stets folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$,

(ii) *monoton fallend* (*monoton sinkend*), wenn aus $x_1 < x_2$ stets folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$,

(iii) *monoton*, wenn sie *monoton wachsend* oder *monoton fallend* ist.

Man beachte, dass in den Aussagen (i) und (ii) die Gleichheit von Funktionswerten zugelassen ist. Gelten sogar die strikten Ungleichungen, spricht man von *strenger Monotonie*. Konstante Funktionen (und nur diese) sind deshalb sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend. Monotonie kann man auch auf einer Teilmenge des Definitionsbereichs betrachten (meist auf einem Intervall).

Eine weitere Eigenschaft fällt in die Kategorie „kleine Ursachen haben (nur) kleine Wirkungen“. Die Frage, ob „kleine“ Änderungen des Arguments x auch nur „kleine“ Auswirkungen auf die Änderung des Funktionswerts $f(x)$ haben, hat in einer langen (und nicht ganz schmerzfreien) historischen Entwicklung zum heutigen Konzept der *Stetigkeit* geführt.

Natürlich muss man dazu zunächst die Bedeutung von „klein“ präzisieren. Bei der Stetigkeit von Funktionen geht es darum, dass die Änderungen des Funktionswerts $f(x)$ *beliebig klein* werden, solange nur die Änderung des Arguments x *hinreichend klein* ist. Dies wird in der folgenden berühmten ε-δ-Definition genau beschrieben.

Definition 3.2.7. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ heißt *im Punkt* x_0 aus X *stetig*, falls *für jedes*[4] positive ε ein positives δ existiert, so dass aus $x \in X$ und $|x - x_0| < \delta$ stets folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, also formalisiert

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0| < \varepsilon.$$

Die Funktion f heißt *stetig auf* X, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Um diese kunstvolle Definition besser zu verinnerlichen, kann man die beiden Größen ε und δ als *Toleranz* und *Spiel* interpretieren: Wenn f stetig ist, kann eine (beliebig vorgegebene) Toleranz ε der Funktionswerte $f(x)$ eingehalten werden, solange das zulässige Spiel δ der Argumente x nicht überschritten wird.

Es gibt eine Reihe äquivalenter Stetigkeitsdefinitionen, mit denen wir uns hier (noch) nicht beschäftigen wollen. „Definitionen“ der Art: eine Funktion ist stetig, wenn

(a) sich ihr Graph in einem Zug zeichnen lässt,

(b) sie keine Lücken, Sprünge und Polstellen besitzt,

sind allerdings *völlig unbrauchbar*, wenn man ernsthaft Mathematik betreiben will.

[4] Auch wenn der Quantifikator $\forall$ oft als „für alle“ gelesen wird, sollte man an dieser Stelle (und eigentlich generell) besser „für jedes“ sagen, weil „für alle“ missverständlich suggeriert, dass für alle ε *ein und dasselbe* δ existiert.

3.3 Folgen

Folgen sind Funktionen, die auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ oder der Menge $\mathbb{N}_+ := \{1, 2, 3, \ldots\}$ der positiven natürlichen Zahlen definiert sind. Die Werte einer Folge gibt man meist durch Indizierung an, also beispielsweise $a_1, a_2, a_3, \ldots$, und nennt die a_k *Glieder* oder *Elemente* der Folge. Die Folge als Gesamtheit schreiben wir als $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ oder einfach (a_k). Die Glieder einer Folge können Elemente einer beliebigen Menge sein, wir betrachten hier aber nur reelle (Zahlen-)Folgen mit $a_k \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1. Die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $a_k := a + kd$ heißt *arithmetische Folge* mit dem *Anfangsglied* $a_0 = a$ und der *Differenz* d.

Beispiel 2. Die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $a_k := a\,q^k$ für $k \in \mathbb{N}$ (und $a \neq 0$) heißt *geometrische Folge* mit dem *Anfangsglied* $a_0 = a$ und dem *Quotienten* q.

Wie jede Funktion muss auch eine Folge durch eine Zuordnungsvorschrift definiert werden. Dafür gibt es prinzipiell verschiedene Möglichkeiten. Die beiden obigen Beispiele verwenden eine *explizite* Darstellung des Bildungsgesetzes der Folge. Häufig sind Folgen *rekursiv* definiert. Die arithmetische und die geometrische Folge von oben kann man beispielsweise auch durch Vorgabe des Anfangsgliedes $a_0 = a$ und die *Rekursionsvorschriften*

$$a_{k+1} := a_k + d, \qquad \text{bzw.} \qquad a_{k+1} := q\,a_k, \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

definieren, die der Reihe nach die Werte $a_1, a_2, \ldots$ liefern.

Eigenschaften von Funktionen (Monotonie) sind auch für Folgen sinnvoll. Das Hauptinteresse bei der Untersuchung von Funktionen betrifft aber ihr „Langzeitverhalten“, also die Werte a_k für große k. Dies führt zum einem zentralen Begriff, auf dem die gesamte Analysis aufbaut.

Definition 3.3.1. Eine Zahl a heißt *Grenzwert* der Folge (a_k), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl k_0 existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $|a_k - a| < \varepsilon$. Eine Folge die einen Grenzwert besitzt[5] heißt konvergent (gegen a), in Zeichen $a_n \to a$ oder $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. Folgen die nicht konvergieren nennt man *divergent.*

Konvergenz gegen a bedeutet anschaulich, dass alle Folgenglieder a_k dem Grenzwert a beliebig nahe kommen (nämlich einen Abstand kleiner ε besitzen), wenn nur der Index k hinreichend groß ist (nämlich mindestens k_0). Die Zahl k_0 ist in der Regel von ε abhängig; typischerweise muss k_0 vergrößert werden, wenn ε verkleinert wird.

Beispiel 3. Die arithmetische Folge $(a + kd)$ konvergiert genau für $d = 0$, und zwar gegen a. Die geometrische Folge $\left(a\,q^k\right)$ mit $a \neq 0$ konvergiert genau für $-1 < q \leq 1$, und zwar gegen 0 für $-1 < q < 1$ und gegen a für $q = 1$.

[5] Dieser Grenzwert ist dann eindeutig bestimmt.

3.4 Reihen

Die Glieder einer Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ kann man aufsummieren. Zur Abkürzung definieren wir für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ zunächst ein Symbol (das Summenzeichen) für die Summe aller Folgeglieder von a_m bis a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Addition der ersten aufeinander folgenden Glieder von $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ liefert die sogenannten *Partialsummen* der Folge (a_k),

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Diese bilden eine neue Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$. Mitunter kann man die Partialsummen einer Folge explizit berechnen.

Beispiel 4. Für die Partialsummen der *arithmetischen Reihe* gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (a + kd) = a\,(n+1) + d\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Für $a = 0$ und $d = 1$ ist s_n die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Mit dem „Gaußschen Trick", die Summe einmal vorwärts und einmal rückwärts aufzuschreiben, erhält man

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ \ldots \ + (n-1) + n \\ s_n &= n + (n-1) + (n-2) + \ \ldots + \quad 2 \quad + 1, \end{aligned}$$

Addition und Abzählen liefert $2s_n = n(n+1)$. Die allgemeine Aussage folgt nun aus

$$\sum_{k=0}^{n} (a + kd) = \sum_{k=0}^{n} a + d \sum_{k=0}^{n} k.$$

Beispiel 5. Für die Partialsummen der *geometrischen Reihe* mit $q \neq 1$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a\,q^k = a\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst $a = 1$. Hier besteht der Trick in der Subtraktion von s_n und qs_n,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n \\ q\,s_n &= \qquad q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}, \end{aligned}$$

wobei sich alle Summanden bis auf zwei gegenseitig wegheben,

$$(1 - q)\,s_n = 1 - q^{n+1}.$$

Ein beliebiges a kann man als Faktor vor die Partialsummen ziehen. Für $q = 1$ ist offenbar $s_n = (n+1)\,a$.

Die Untersuchung des Verhaltens der Partialsummen s_n für große n führt schließlich zum Begriff der *Reihe*.

Definition 3.4.1. Wenn die Folge (s_n) der Partialsummen gegen s konvergiert, nennt man die *Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und bezeichnet s als ihre *Summe*, in Zeichen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Beispiel 6. Die geometrische Reihe mit $a \neq 0$ konvergiert genau für $|q| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a\, q^k = \frac{a}{1-q}.$$

Die Aussage folgt aus der Formel für die Partialsummen und der Konvergenz von q^{n+1} gegen 0 für $|q| < 1$ sowie der Divergenz für $|q| \geq 1$.

Fragen der Konvergenz von Folgen und Reihen werden in der Analysis-Vorlesung (aber nicht nur dort!) eine wichtige Rolle spielen.

Kapitel 4

Elementare Funktionen

(Prof. Sebastian Aland, Skript von Prof. Michael Eiermann)

In diesem Abschnitt werden wir einfache Funktionen untersuchen, die Ihnen wahrscheinlich schon bekannt sind. Uns interessieren Polynome, rationale Funktionen und einige spezielle Funktionen. Sie werden im Lauf Ihres Studiums erkennen, dass es aus vielen Gründen zweckmäßig ist, die komplexen Zahlen als den natürlichen Definitions- und Wertebereich dieser Funktionen zu wählen. Wir betrachten in dieser Einführung aber nur *reelle Funktionen*. Darunter verstehen wir Funktionen, die auf Teilmengen der reellen Zahlen[1] definiert sind und die außerdem *reellwertig* sind. Der *Graph* einer Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, ist definiert als[2] $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^2$. Umgangssprachlich ist der Graph von f eine „Kurve in der Ebene". Mit seiner Hilfe kann man sich „ein Bild von f machen".

4.1 Punktweise definierte Operationen

Mit der Komposition zweier Funktionen (vgl. Definition 3.2.4) ist Ihnen bereits eine Methode bekannt, mit der aus bekannten Funktionen neue konstruiert werden können. Die üblichen arithmetischen Operationen (für Zahlen) lassen sich auch für Funktionen definieren, so dass man z. B. die Summe oder das Produkt zweier Funktionen bilden kann.

Definition 4.1.1. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei auf X definierte reellwertige Funktio-

[1] Für eine mathematisch exakte Definition der reellen Zahlen verweisen wir auf die Vorlesungen des ersten Semesters. Man kann sich reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche oder anschaulicher als Punkte auf der Zahlengeraden vorstellen, dabei gehört zu jeder reellen Zahl genau ein Punkt und zu jedem Punkt genau eine reelle Zahl. Dass dies keine wirklichen Definitionen sind, erkennt man schon daran, dass die Begriffe „unendlicher Dezimalbruch" und „Zahlengerade" noch nicht exakt eingeführt wurden.

[2] Bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, dann ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

nen. Dann werden durch

$$\begin{aligned} f+g &: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x), \\ fg &: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)g(x), \\ f/g &: X \setminus \{x \in X \ : \ g(x)=0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)/g(x), \end{aligned}$$

die *Summe*, das *Produkt* bzw. der *Quotient* von f und g definiert. Man spricht von *punktweise definierten Operationen*. Warum wird die *Differenz* nicht definiert?

Viele der Regeln und Gesetze, die uns beim Rechnen mit Zahlen vertraut sind, gelten auch, wenn man die Grundrechenarten auf Funktionen anwendet. Beispielsweise ist $f+g=g+f$, $fg=gf$ (Kommutativgesetze für Addition bzw. Multiplikation) oder $(f+g)h=fh+gh$ (Distributivgesetz). Es gibt aber auch Aussagen, die zwar für Zahlen, nicht aber für Funktionen richtig sind: Aus $xy=0$ $(x,y \in \mathbb{R})$ folgt $x=0$ oder $y=0$. Können Sie Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f,g \neq 0$ konstruieren, die $fg=0$ erfüllen[3]?

Stetigkeit (vgl. Definition 3.2.7) ist eine der Eigenschaften, die unter punktweisen Operationen erhalten bleiben:

Lemma 1. Seien $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ und $f,g : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind die Funktionen $f+g$ und fg stetig in x_0. Gilt $g(x_0) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in x_0.

Beweis. Wir zeigen nur, dass $f+g$ stetig ist. Die anderen Behauptungen beweist man ähnlich. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Weil f stetig in x_0 ist, gibt es zu $\varepsilon/2 > 0$ ein $\delta_f > 0$ mit $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in X$ mit $|x-x_0| < \delta_f$. Analog gibt es $\delta_g > 0$ mit $|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in X$ mit $|x-x_0| < \delta_g$.
Wir definieren $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0$ und erhalten für alle $x \in X$ mit $|x-x_0| < \delta$ mithilfe der Dreiecksungleichung[4]

$$\begin{aligned} & |(f+g)(x)-(f+g)(x_0)| = |f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)| \\ \leq\ & |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $f+g$ stetig in x_0. ◇

4.2 Polynome

Definition 4.2.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

[3] 0 steht hier für die *Nullfunktion*, die jedes $x \in \mathbb{R}$ auf die Zahl 0 abbildet.
[4] $|x+y| \leq |x| + |y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$

ein *Polynom*[5] vom *Grad* $n =: \operatorname{grad}(p)$. Die Zahlen a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, nennt man die *Koeffizienten* von p. a_n ist der *führende Koeffizient* von p. Ein Polynom heißt *monisch*, wenn sein führender Koeffizient gleich 1 ist.
Zusätzlich betrachten wir auch die Nullfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$, als Polynom (ihm wird kein Grad zugeordnet).
Mit $\mathcal{P}_\infty$ bezeichnen wir im Folgenden die Menge aller Polynome und mit $\mathcal{P}_n$ die Teilmenge der Polynome, deren Grad kleiner oder gleich n ist, wobei auch das Nullpolynom Element von $\mathcal{P}_n$ sein soll.

Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen.
Summe und Produkt zweier Polynome p und q sind offenbar wieder Polynome. Man kann Folgendes zeigen: $\operatorname{grad}(p+q) \leq \max\{\operatorname{grad}(p), \operatorname{grad}(q)\}$ (warum gilt hier nicht Gleichheit?) und $\operatorname{grad}(pq) = \operatorname{grad}(p) + \operatorname{grad}(q)$.

Satz 4.2.2. Jedes Polynom ist stetig in $\mathbb{R}$.

Beweis. Jedes Polynom kann als (endliche) Summe bzw. Produkt der konstanten Funktionen $x \mapsto a \in \mathbb{R}$ und der Identität $x \mapsto x$ dargestellt werden. Da diese Funktionen in $\mathbb{R}$ stetig sind, gilt dies nach Lemma 1 auch für jedes Polynom. ◇

Bekanntlich ist für ganze Zahlen eine „Division mit Rest“ definiert (siehe Satz 2.3.6). So gilt etwa $57 = 5 \cdot 11 + 2$ („57 geteilt durch 5 ergibt 11 mit Rest 2“). Der folgende Satz beschreibt ein analoges Resultat für Polynome.

Satz 4.2.3. Zu vorgebenen Polynomen $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_\infty$, $p_2 \neq 0$, gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathcal{P}_\infty$, sodass

$$p_1 = qp_2 + r$$

gilt mit $r = 0$ oder $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(p_2)$. D. h. „$p_1$ geteilt durch p_2 ergibt q mit Rest r“. ◇

Die Aussage dieses Satzes ist nur im Fall $\operatorname{grad}(p_1) \geq \operatorname{grad}(p_2)$ interessant (warum?). Aber auch für diesen Fall werden wir sie nicht beweisen und erinnern stattdessen an den *Divisionsalgorithmus*, mit dem man die Polynome q und r berechnet.

Beispiel 7. Wir teilen zunächst $p_1(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$ durch $p_2(x) = (x^2 - x - 1)$:

$$\begin{array}{l}
x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2 \quad = (x^2 - x - 1)\underbrace{(x^3 + 2x^2 - x + 2)}_{q} \\
\underline{x^5 - x^4 - x^3} \\
\quad 2x^4 - 3x^3 + x^2 \\
\quad \underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} \\
\qquad -x^3 + 3x^2 - x \\
\qquad \underline{-x^3 + \ \ x^2 + x} \\
\qquad\qquad 2x^2 - 2x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{2x^2 - 2x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

[5] Streng genommen müsste man Polynomfunktion sagen. Oft wird auch die Bezeichnung *ganzrationale Funktion* verwendet.

Wir halten fest, dass sich p_1 ohne Rest durch p_2 teilen lässt.
Jetzt teilen wir p_1 (wie oben) durch $p_2(x) = x^2 + x + 1$:

$$\begin{array}{l}
x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2 \quad = (x^2+x+1)\underbrace{(x^3-5x+6)}_{q} + \underbrace{(-2x-8)}_{r} \\
\underline{x^5 + x^4 + x^3} \\
\qquad - 5x^3 + x^2 - x \\
\qquad \underline{-5x^3 - 5x^2 - 5x} \\
\qquad\qquad\quad 6x^2 + 4x - 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x^2 + 6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad - 2x - 8
\end{array}$$

p_1 geteilt durch p_2 ergibt also $x^3 - 5x + 6$ mit Rest $-2x - 8$.

Als Anwendung des Divisionsalgorithmus werten wir ein Polynom p an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ aus, berechnen also $p(x_0)$. Damit das Problem nicht vollkommen trivial ist, nehmen wir $\mathrm{grad}(p) > 0$ an. Nach Satz 4.2.3 gibt es zu $p_1 = p$ und $p_2(x) = x - x_0 \in \mathcal{P}_1$ eindeutige bestimmte Polynome q und r mit $p_1 = qp_2 + r$ und $r = 0$ oder $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(p_2) = 1$, d. h. r ist eine Konstante (eine Zahl). Außerdem ist $p(x_0) = q(x_0)p_2(x_0) + r = q(x_0)(x_0 - x_0) + r = r$. Man kann $p(x_0) = r$ also durch Polynomdivision bestimmen. Dies ist die Idee des *Horner-Schemas*, das nicht nur weniger Operationen erfordert als die konventionelle Berechnung von $p(x_0)$, sondern auch verbesserte Stabilitätseigenschaften besitzt.

Wir sagen, dass $p_2 \in \mathcal{P}_\infty$, $p_2 \neq 0$, *Teiler* des Polynoms $p_1 \neq 0$ ist, wenn es ein Polynom q gibt mit $p_1 = qp_2$. (Man vergleiche dies mit dem analogen Teilbarkeitsbegriff für ganze Zahlen, siehe § 2.3.) Jedes Polynom besitzt triviale Teiler, nämlich sich selbst und alle von Null verschiedenen Konstanten. Es gibt Polynome, die nur triviale Teiler besitzen (sie entsprechen in gewisser Weise den Primzahlen), etwa $p(x) = x^2 + 1$.

Eine reelle Zahl x_0 heißt *Nullstelle* des Polynoms $p \neq 0$, wenn $p(x_0) = 0$ gilt. Nullstellen von Polynomen (und anderen Funktionen) spielen in der Mathematik und ihren Anwendungen eine sehr wichtige Rolle. Leider ist es i. A. unmöglich, Nullstellen „mit Papier und Bleistift“ zu bestimmen. Die Nullstelle eines linearen Polynoms (also eines vom Grad 1) liest man ab. Ein Polynom $p(x) = x^2 + a_1x + a_0$ zweiten Grades, von dem wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es monisch ist (warum?), besitzt die Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2},$$

was sofort aus $p(x) = (x + a_1/2)^2 - (a_1/2)^2 + a_0$ folgt. Ob p (reelle) Nullstellen besitzt (und wenn ja, wie viele), hängt vom Vorzeichen von $a_1^2 - 4a_0$ ab.

Auch die Nullstellen von Polynomen dritten und vierten Grades lassen sich noch explizit angeben. Die entsprechenden Formeln sind allerdings so kompliziert, dass man bei praktischen Berechnungen in der Regel numerische Verfahren (wie das Newton-Verfahren) einsetzt. Für die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 5 oder höher gibt es bewiesenermaßen keine Formeln; hier ist man also immer auf numerische Methoden angewiesen.

Sei $P \in \mathcal{P}_\infty$ mit $\operatorname{grad}(p) \geq 1$. Offensichtlich ist $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann Nullstelle von p, wenn $x - x_0$ das Polynom p (ohne Rest) teilt, wenn es also ein Polynom q gibt mit $p(x) = (x - x_0)q(x)$. Daraus folgt zum einen $\operatorname{grad}(q) = \operatorname{grad}(p) - 1$ und zum anderen

$$\{z \in \mathbb{R} \,:\, p(z) = 0\} = \{x_0\} \cup \{z \in \mathbb{R} \,:\, q(z) = 0\}.$$

Hat man eine Nullstelle x_0 von p „erraten“, so sind die übrigen Nullstellen von p genau die Nullstellen von q. Damit ist auch Folgendes bewiesen.

Satz 4.2.4. Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n verschiedene Nullstellen. Äquivalent: Besitzt $p \in \mathcal{P}_n$ mehr als n verschiedene Nullstellen, dann ist p das Nullpolynom. $\diamond$

Dieser Satz ist eine stark abgeschwächte Form des sog. *Fundamentalsatzes der Algebra*, der besagt, dass jedes (komplexe) Polynom vom Grad n genau n komplexe Nullstellen besitzt, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Wir haben gesehen, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann Nullstelle des Polynoms p ist, wenn man p in der Form $p(x) = (x - x_0)q(x)$ mit einem Polynom q schreiben kann. Gilt $p(x) = (x - x_0)^n q(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und ein Polynom q mit $q(x_0) \neq 0$, dann sagt man, dass die Nullstelle x_0 die (genaue) *Ordnung* (oder *Vielfachheit*) n besitzt.

Bekanntlich gibt es genau eine Gerade durch zwei gegebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Ebene. Eine i. W. äquivalente Fomulierung dieser Aussage mithilfe von Polynomen lautet: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann existiert genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_1$ (also vom Grad höchstens 1) mit $p(x_j) = y_j$, $j = 1, 2$. Allgemeiner ist ein Polynom vom Grad n durch $n + 1$ Wertepaare eindeutig festgelegt:

Satz 4.2.5. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Beweis. Wir konstruieren explizit ein Polynom, das die gewünschten Eigenschaften besitzt. Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ sei

$$\ell_k(x) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Offenbar ist $\ell_k \in \mathcal{P}_n$ und es gilt

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq k, \\ 1, & \text{falls } j = k. \end{cases}$$

Damit ist $p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \ell_k(x) \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_j) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \ell_k(x_j) = y_j \ell_j(x_j) = y_j$.
Es bleibt zu zeigen, dass p eindeutig bestimmt ist. Dazu nehmen wir an, dass es Polynome $p, q \in \mathcal{P}_n$ gibt mit $p(x_j) = q(x_j) = y_j$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n + 1$. Dann besitzt $p - q \in \mathcal{P}_n$ die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, muss also nach Satz 4.2.4 das Nullpolynom sein. $\diamond$

4.3 Rationale Funktionen

Definition 4.3.1. Seien p und q Polynome, $q \neq 0$. Dann nennt man

$$r : \mathbb{R} \setminus \{x \,:\, q(x) = 0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)},$$

eine (gebrochen) *rationale Funktion.* p heißt *Zähler*- und q heißt *Nennerpolynom* von r.

Ist das Nennerpolynom q eine Konstante ($\neq 0$), so ist die rationale Funktion r ein Polynom. Die Menge der rationalen Funktionen enthält alle Polynome. Die folgenden Aussagen folgen aus den Rechenregeln für Brüche bzw. aus Lemma 1.

Lemma 2. Summe, Produkt und Quotient rationaler Funktionen sind wieder rationale Funktionen. ◇

Satz 4.3.2. Eine rationale Funktion r ist in ihrem Definitionsbereich stetig, d. h. r ist stetig in allen $x \in \mathbb{R}$ außer in den Nullstellen des Nennerpolynoms. ◇

Diese Stetigkeitsaussage führt in der „Schulmathematik" zu einigen Verwirrungen, die wir durch die folgenden Beispiele klären wollen.

Beispiel 8. Wir betrachten die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1} = \frac{x(x + 1)}{x + 1},$$

deren Nennerpolynom die Nullstelle $x_0 = -1$ besitzt. Die Funktion r ist also an der Stelle $x_0 = -1$ nicht definiert und die Frage, ob r in -1 stetig ist, ist vollkommen sinnlos. Für alle $x \neq x_0$ gilt aber $r(x) = x$. Definiert man

$$r_1(x) = \begin{cases} r(x), & \text{falls } x \neq -1, \\ -1, & \text{falls } x = -1, \end{cases} \qquad \text{also } r_1(x) = x;$$

so ist diese neue Funktion überall definiert und stetig, also auch in $x_0 = -1$. Man beachte, dass es sich bei r und r_1 um zwei *verschiedene* Funktionen handelt. Man nennt $x_0 = -1$ eine *stetig behebbare Definitionslücke* von r.

Allgemeiner ist x_0 eine stetig behebbare Definitionslücke der rationalen Funktion $r = p/q$, wenn man r in der Form

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - x_0)^n\, p_1(x)}{(x - x_0)^n\, q_1(x)}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $q_1(x_0) \neq 0$ schreiben kann. Durch die Definition

$$r_1(x) = \begin{cases} r(x), & \text{falls } x \in \text{Definitionsbereich von } r, \\ p_1(x_0)/q_1(x_0), & \text{falls } x = x_0, \end{cases}$$

wird diese Lücke an der Stelle x_0 stetig geschlossen.

Beispiel 9. Ganz anders liegt der Fall bei der Funktion

$$r(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{x(x+1)}{x - 1},$$

die an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert ist. Da $x - 1$ das Zählerpolynom nicht teilt (man also nicht durch $x - 1$ kürzen kann), gibt es keine Möglichkeit die Definitionslücke $x_0 = 1$ stetig zu beheben. Man bezeichnet $x_0 = 1$ als *Pol* der Funktion r.

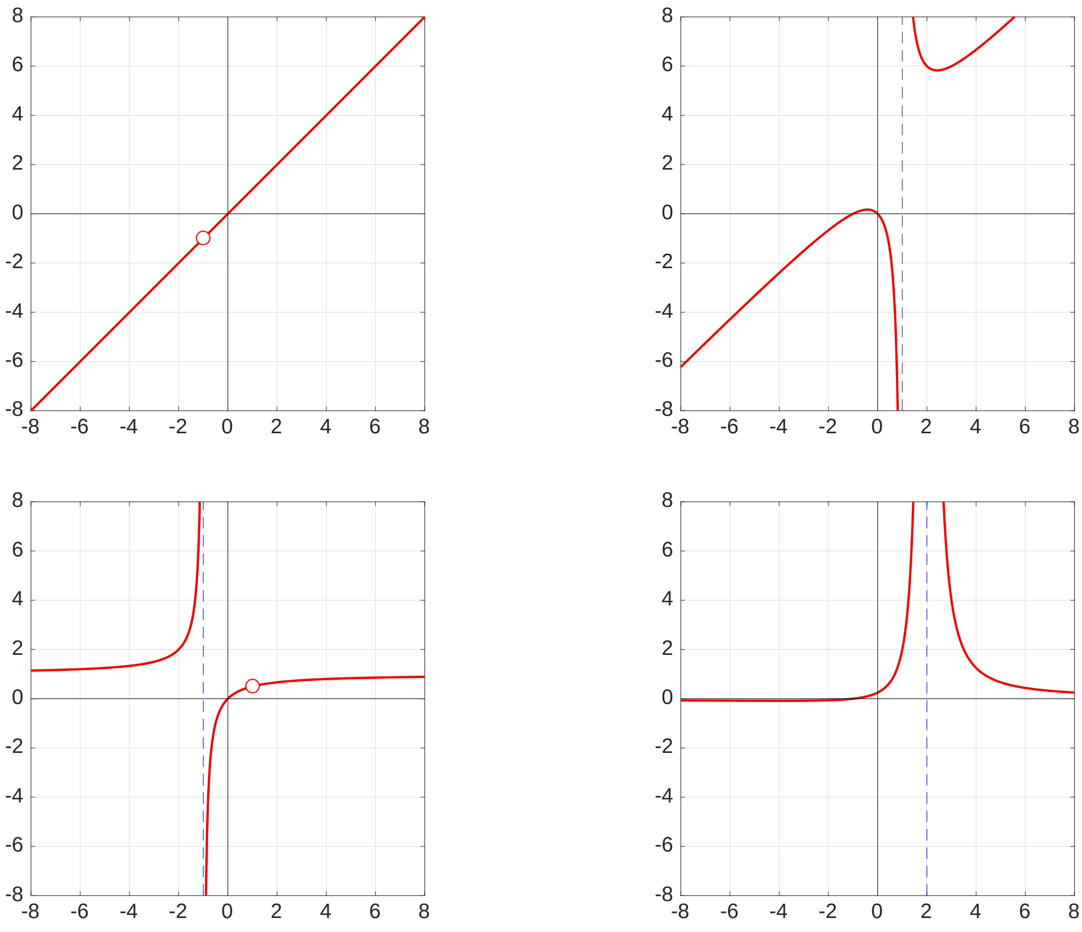
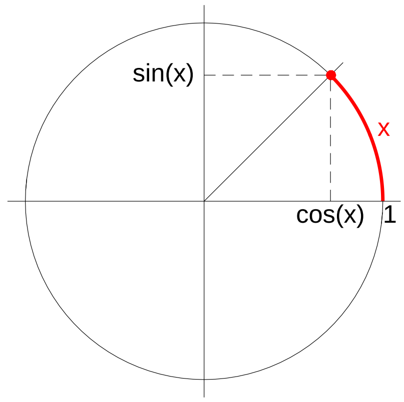


Abbildung 4.1: Graphen rationaler Funktionen. Oben links: $r(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ (vgl. Beispiel 8), oben rechts: $r(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$ (vgl. Beispiel 9), unten links: $r(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$, unten rechts: $r(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8}$.

4.4 Einige spezielle Funktionen

Wir befassen uns mit *trigonometrischen Funktionen* (Winkelfunktionen), wobei wir Winkel prinzipiell im *Bogenmaß* messen. Ein Strahl, der ausgehend von 0 mit der positiven Abszisse den Winkel x bildet, schneidet den Einheitskreis in einem Punkt (c, s), die Länge des Bogens von $(1, 0)$ nach (c, s) — im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen — ist dann die Größe des Winkels x im Bogenmaß.



Wir definieren

$$\sin(x) := s \ (\textit{Sinus}) \quad \text{und} \quad \cos(x) := c \ (\textit{Kosinus}).$$

Offensichtlich sind diese Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und liefern Werte in $[-1, 1]$. Außerdem gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sinus- und Kosinusfunktion sind 2π-periodisch, d. h. $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$. Manche Werte dieser Funktionen kann man explizit angeben, z. B.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	1

.

Die Nullstellen der Sinusfunktion sind die ganzzahligen Vielfachen von π, während die Nullstellen der Kosinusfunktion durch $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben sind. Die Sinusfunktion ist ungerade ($\sin(-x) = -\sin(x)$), d. h. ihr Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, während die Kosinusfunktion gerade ist ($\cos(-x) = \cos(x)$), d. h. ihr Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Man kann beweisen, dass sowohl die Sinus- wie auch die Kosinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

Wir definieren außerdem

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ (\textit{Tangens}) \quad \text{und} \quad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \ (\textit{Kotangens}).$$

Tangens und Kotangens sind nur dann definiert, wenn die jeweiligen Nennerfunktionen nicht verschwinden. Der natürliche Definitionsbereich der Tangensfunktion ist also $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, der der Kotangensfunktion ist $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Beide Funktionen sind π-periodisch und auf ihren Definitionsbereichen stetig.

Eine weitere wichtige Funktionenklasse besteht aus den *Exponentialfunktionen* $x \mapsto a^x$, wobei a eine positive und x eine beliebige reelle Zahl sind. Was man unter einem Ausdruck wie $3^{\sqrt{2}}$ zu verstehen hat, ist nicht ohne weiteres klar. Wie werden a^x schrittweise „definieren“:

- Für $x = n \in \mathbb{N}$ ist
$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}.$$
- Für $x = 0$ setzen wir $a^0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$
$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$
Damit ist jetzt a^x für alle $a > 0$ und alle ganzzahligen x erklärt.
- Für eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist
$$a^x = a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p}.$$
Dabei bezeichnet $w = \sqrt[q]{y}$ die q-te *Wurzel* der positiven Zahl y, d. h. die eindeutig bestimmte positive Zahl w, die $w^q = y$ erfüllt. Jetzt ist a^x für alle $a > 0$ und alle rationalen Zahlen x erklärt.
- Ist $x \in \mathbb{R}$, so wählen wir eine Folge rationaler Zahlen $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{m\to\infty} q_m = x$.[6] Dann wird a^x durch
$$a^x := \lim_{m\to\infty} a^{q_m}$$
definiert[7].

Führt man alle Beweise durch, die wir weggelassen haben, so ist mit dieser Konstruktion a^x für alle $a > 0$[8] und alle reellen Zahlen x erklärt. Es gibt wesentlich elegantere Methoden, um a^x zu definieren. Sie setzen allerdings Techniken und Begriffe voraus, die uns hier nicht zur Verfügung stehen.

Satz 4.4.1. Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl, dann ist die *Exponentialfunktion zur Basis a*
$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x,$$
eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte stetige Funktion. Der Wertebereich dieser Funktionen ist $(0, \infty)$, besteht also aus allen positiven reellen Zahlen (falls $a \neq 1$). Außerdem ist a^x für $a > 1$ streng monoton wachsend bzw. für $a < 1$ streng monoton fallend.
Es gelten die folgenden Rechenregeln (*Potenzgesetze*):
$$\begin{array}{lll} a^{x+y} = a^x\, a^y, & a^0 = 1, & a^{-x} = 1/a^x, \\ (a^x)^y = a^{x\,y}, & (ab)^x = a^x b^x, & (a/b)^x = a^x/b^x \end{array}$$
für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. ◇

[6]Man müsste beweisen, dass solche Folgen existieren!
[7]Man müsste erstens zeigen, dass dieser Grenzwert existiert, und zweitens, dass er unabhängig von der gewählten Folge $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ist!
[8]Es ist üblich, daneben noch $a \neq 1$ zu fordern, weil $x \mapsto 1^x = 1$ uninteressant und außerdem nicht injektiv ist.

Die wichtigste Exponentialfunktion ist die zur Basis

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699 95\ldots$$

Man spricht von *der* Exponentialfunktion.

Da die Funktion $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $a \neq 1$ streng monoton ist und den Wertebereich $(0,\infty)$ besitzt, existiert ihre Umkehrfunktion

$$\log_a(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \log_a(x),\ \text{ falls } a^y = x.$$

Man nennt $\log_a(x)$ den *Logarithmus von x zur Basis a*. Die Funktion $\log_a$ ist nur für positive Argumente definiert — als Basis sind alle $a > 0$, $a \neq 1$, zugelassen. Der Logarithmus zur Basis e, also die Umkehrfunktion von $x \mapsto e^x$, wird *natürlicher Logarithmus* genannt und normalerweise einfach mit log (manchmal mit ln) bezeichnet. Daneben kann man die Bezeichnungen lg für $\log_{10}$ und ld für $\log_2$ (*Logarithmus dualis*) finden.

Satz 4.4.2. Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl mit $a \neq 1$, dann ist die *Logarithmusfunktion zur Basis a*

$$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_a(x),$$

eine stetige Bijektion zwischen $(0,\infty)$ und $\mathbb{R}$. Die Funktion $\log_a$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend bzw. für $a < 1$ streng monoton fallend.
Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \log_a(1) = 0, \qquad \log_a(1/x) = -\log(x),$$
$$\log(x^z) = z\log(x), \qquad \log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a)$$

für $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}$, $a, b, x, y > 0$, $a, b \neq 1$.

Beweis. Wir zeigen nur die erste und die letzte der angegebenen Regeln:
Aus $\log_a(x) = v$ folgt $a^v = x$ und aus $\log_a(y) = w$ folgt $a^w = y$. Wegen Satz 4.4.1 gilt $xy = a^v a^w = a^{v+w}$, was wiederum $\log_a(xy) = v + w$ bedeutet. Also

$$\log_a(xy) = v + w = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Die Gleichung $\log_a(x) = y$ führt auf $a^y = x$. Wendet man $\log_b$ auf die letzte Gleichung an, so folgt $\log_b(x) = \log_b(a^y) = y\log_b(a) = \log_a(x)\log_b(a)$, was zur letzten Rechenregel äquivalent ist. $\diamond$

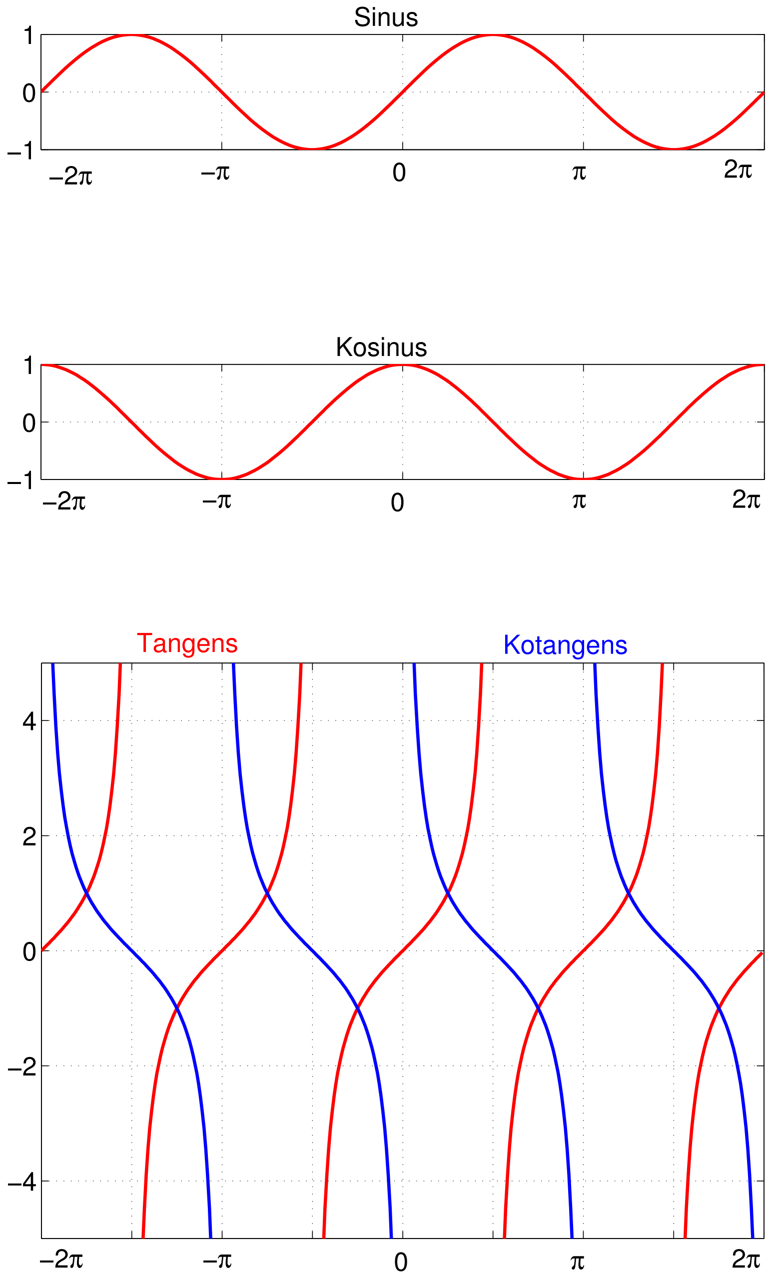
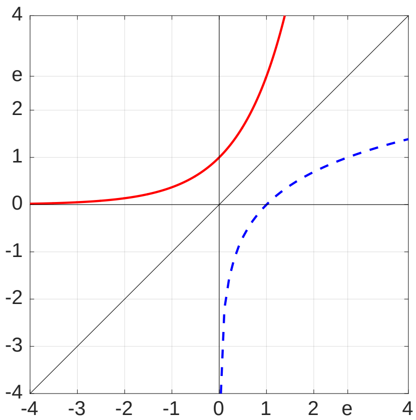


Abbildung 4.2: Graphen trigonometrischer Funktionen. Oben: sin, darunter: cos, unten: tan (—) und cot (—).



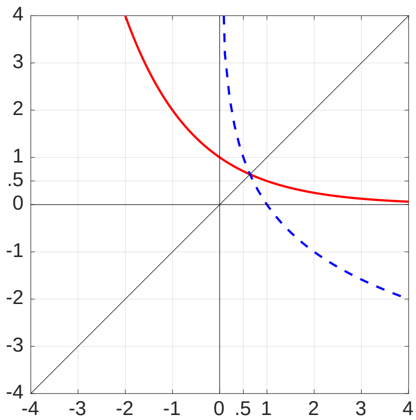


Abbildung 4.3: Graphen von Exponential- (—) und Logarithmusfunktionen (- - -): links zur Basis $e > 1$, rechts zur Basis $1/2 < 1$.