

Unscharfe praktische Tagesbruchprognose

Nándor Tamáskovics

TU Bergakademie Freiberg, Institut für Geotechnik
Lehrstuhl für Bodenmechanik und Grundbau

ZUSAMMENFASSUNG:

Die Nutzung von Flächen mit Altbergbau oder mit natürlichen Hohlräumen im Unter- und Baugrund ist mit erhöhten Risiken behaftet, dass Bauwerke durch unerwünschte Deformationen des Baugrundes in Mitleidenschaft gezogen werden. Eine typische Versagensart ist die Entwicklung von Tagesbrüchen oder Erdfällen, wobei sich Massen in Richtung von Hohlräumen im Unter- und Baugrund verlagern und auflockern. Die Umlagerung von Massen setzt sich solange fort, bis sich ein statisches Gleichgewicht einstellt und eine weitere Fortpflanzung des Bruchvorganges verhindert oder stark reduziert. Sowohl die Eingangsgrößen der theoretischen Modellierung eines Tagesbruchvorganges als auch die Größe prognostizierter Tagesbruchvolumina können als Zufallsvariable angesehen werden. Die Random-Set-Theorie bietet eine praktikable Möglichkeit, die stochastische Natur des Tagesbruchvorganges mit einem begrenzten rechnerischen Aufwand theoretisch zu fassen. Die berechneten Tagesbruchvolumina und die zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten können als Grundlage der Risikobewertung von zu schützenden Objekten herangezogen werden.

ABSTRACT:

The use of sites over old mining regions or with natural openings in the ground includes an elevated technical risk, as constructions can be constrained due to unplanned deformations of the subsoil. Typical failure modes include pothole subsidence or earthfalls, when failing soil masses are displaced and loosened stepwise toward a collapsing opening in the ground. The displacement process continues until a stable static equilibrium is reached and a further propagation of displacements is prevented. Both the input values of a theoretical model for pothole subsidence analysis and the volume of prognosed surface failures can be regarded as random variables. The random-set-theory offers a practical solution to include the stochastic nature of the pothole subsidence process into a theoretical model with limited required computational effort. The prognosed volumina and the corresponding probabilities of occurrence can be used for a risk analysis of protected objects on sites with expected pothole subsidence.

1 Einleitung

Die Nutzung von Flächen mit Altbergbau oder mit natürlichen Hohlräumen im Unter- und Baugrund ist mit erhöhten Risiken behaftet, dass Bauwerke durch unerwünschte Deformationen des Baugrundes in Mitleidenschaft gezogen werden. Eine typische Versagensart ist die Entwicklung von Tagesbrüchen oder Erdfällen, wobei sich Massen in Richtung von Hohlräumen im Unter- und Baugrund verlagern und auflockern. Die Umlagerung von Massen setzt sich solange fort, bis sich ein statisches Gleichgewicht einstellt und eine weitere Fortpflanzung des Bruchvorganges verhindert oder stark reduziert.

Zu einer Risikobewertung auf einem Standort mit einer Verbruchgefährdung muss die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass sich ein Tagesbruch oder ein Erdfall bis zum betrachteten Standort des Bauwerkes an der Oberfläche ausbreitet und das Bauwerk in seiner Funktion beeinträchtigt wird. Bei der Eintrittswahrscheinlichkeit eines Schadens liegt der Schwerpunkt nicht auf der zeitlichen Entwicklung des Bruchprozesses sondern auf der Entstehung des statischen Gleichgewichtszustandes, welcher die weitere Bruchentwicklung unterbindet.

Zur Prognose potenzieller Tagesbrüche an der Oberfläche ist in dem ersten Schritt der Risikobewertung die Anwendung eines zuverlässigen Verfahrens der rechnerischen Tagesbruchprognose erforderlich, welches unter den Bedingungen des Standortes durch Rückrechnung gegangener Ereignisse rechnerisch validiert oder kalibriert werden muss.

Sowohl die Eingangsgrößen der theoretischen Modellierung eines Tagesbruchvorganges als auch die Größe prognostizierter Tagesbruchvolumina können als Zufallsvariable angesehen werden. Die Random-Set-Theorie bietet eine praktikable Möglichkeit, die stochastische Natur des Tagesbruchvorganges mit einem begrenzten rechnerischen Aufwand theoretisch zu fassen. Die berechneten Tagesbruchvolumina und die zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten können als Grundlage der Risikobewertung von zu schützenden Objekten herangezogen werden.

2 Rechnerische Tagesbruchprognose

Die vorgeschlagenen Methoden zu einer rechnerischen Tagesbruchprognose wurden von FENK nach dem verwendeten Ansatz als Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Modelle, Kräftegleichgewichts-Modelle, Bruchgewölbe-Modelle und Komplex-Modelle klassifiziert [4]. Mit dem Konzept der Komplex-Modelle hat FENK ein Verfahren zur Tagesbruchprognose zunächst für horizontale Schichtung des Deckgebirges entwickelt [2] und später auf den Fall einer geneigten Schichtung erweitert [3]. Die Komplex-Methode modelliert den Vorgang der Tagesbruchentwicklung von allen Verfahren am detailliertesten und erfordert dadurch einen großen Umfang an Angaben zur Hohlraumgeometrie der Primärbruchvolumenentwicklung, zur Schichtung des Deckgebirges und zu den geotechnischen Kennwerten der anstehenden Materialien.

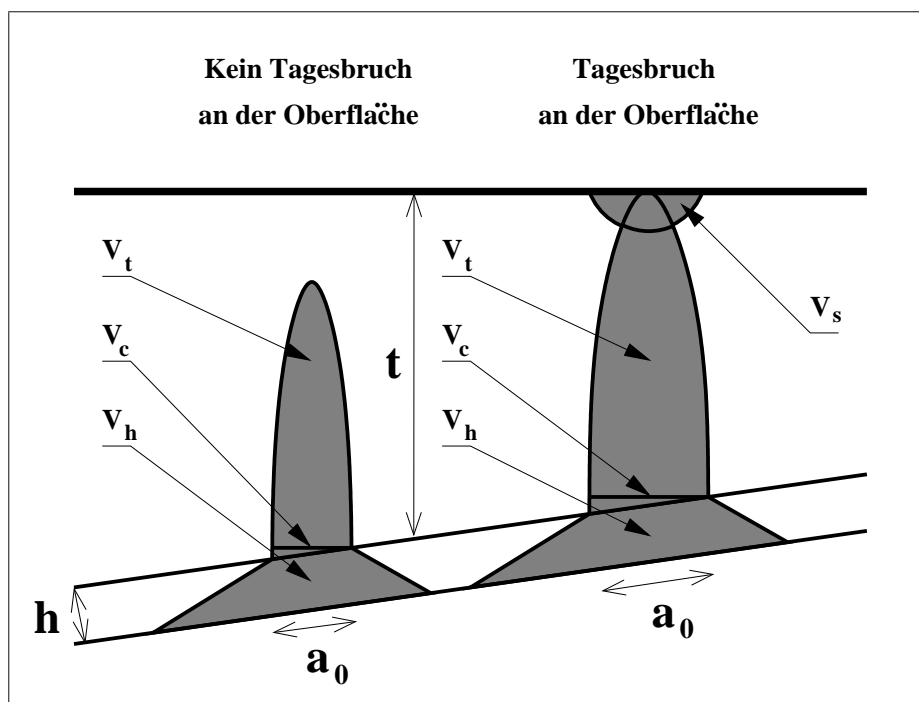


Abb. 1: Mechanismus des Tagesbruchvorganges nach der Hohlräum-Bruchmassen-Bilanz-Methode

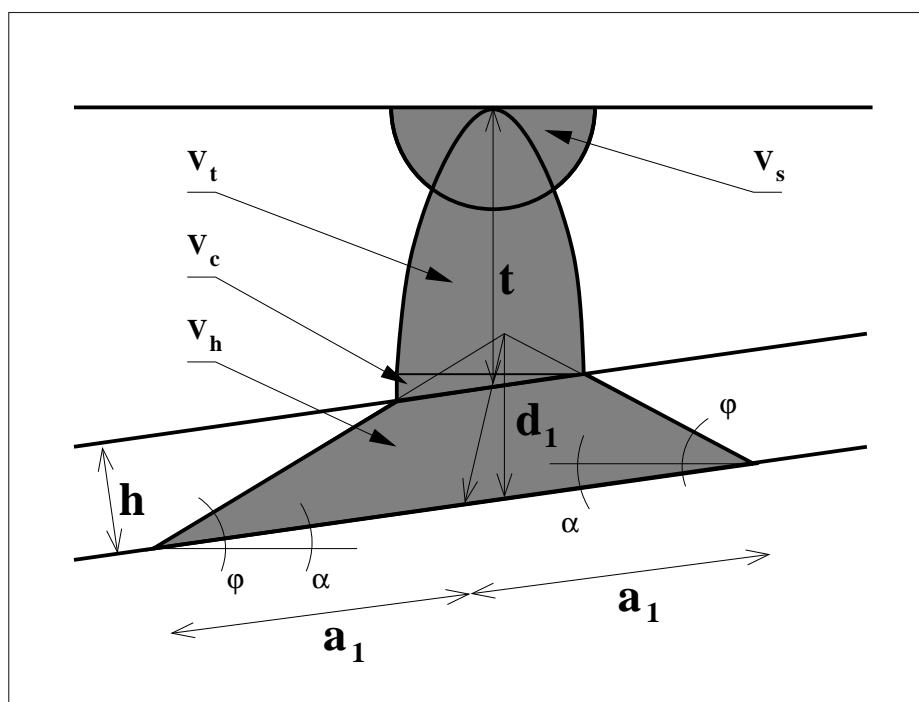


Abb. 2: Theorie des Tagesbruchvorganges nach der Hohlräum-Bruchmassen-Bilanz-Methode

Die Anwendung von rechnerischen Verfahren der Tagesbruchprognose wird im Allgemeinen dadurch erschwert, dass über die Struktur des Deckgebirges und über die räumliche Verteilung der materialspezifischen Kennwerte auf Altbergbaustandorten oder Standorten mit natürlichen Hohlräumen meistens sehr wenig Information vorliegt und eine aufwendige Nacherkundung nicht vorgenommen werden kann.

Beim mechanischen Vorgang der Tagesbruchentwicklung spielt die Zugfestigkeit des anstehenden Materials eine sehr wichtige Rolle. Die treibende Wirkung des Versagens liegt in der Gravitation und entfaltet sich bevorzugt vertikal nach unten. Während des Bruchvorganges treten Spannungsumlagerungen auf, die infolge des nachbrechenden Materials die Umgebung der Bruchstelle beanspruchen. Zeitweilig sind Lockergesteine in der Lage, mit einer Gewölbewirkung oder Aktivierung von Scherfestigkeiten den Bruchvorgang zu bremsen, aber über einen längeren Zeitraum werden sich sehr wahrscheinlich solange Bruchvorgänge allmählich fortsetzen, bis sich sowohl ein mechanisches als auch ein volumetrisches Gleichgewicht in der Bilanz der Bruchmassen einstellt. Dieser Mechanismus wird durch die im Allgemeinen große Verweilzeit der Tagesbruchentwicklung auch gestützt, die sich über mehrere Jahrzehnte bis Jahrhunderte erstrecken kann.

Das rechnerische Modell der Tagesbruchprognose mit dem Konzept der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Modellierung ist dahingehend von sehr großem Vorteil, weil die Anzahl notwendiger materialspezifischer Eingangsparameter mit dem natürlichen Schüttwinkel der Verbruchsmassen φ und mit dem Auflockerungsfaktor s sowie notwendiger prozessspezifischer Eingangsparameter mit der Höhe h , der räumlichen Ausdehnung des verbrechenden Grubenbauwerkes sowie der Breite b und der Länge $2a_0$ der Verbruchsstrecke sehr niedrig ist, und die material- und prozessspezifischen Kennwerte aus beobachteten Tagesbrüchen zuverlässig zurück gerechnet, verifiziert und validiert werden können.

Der Mechanismus und die Theorie des Tagesbruches nach der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Methode ist für den Fall einer allgemeinen, mit dem Winkel α geneigten Lagerung in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt und lehnt sich in der Modellbildung an die Arbeit von MEIER [7] an. Das Grubenbauwerk (zum Beispiel eine Strecke, ein Stollen sowie eine Kammer) oder ein natürlicher Hohlraum im Untergrund mit der Höhe h verbricht über eine Länge $2a_0$ in der Firste und verursacht eine Massenumlagerung in das Primärvolumen V_h mit einem materialspezifischen Schüttwinkel φ , die in dem darüber anstehenden Lockergestein mit einer Mächtigkeit von t einen fortschreitenden Bruchvorgang mit einem beeinflussten Volumen von $V_c + V_h$ zum Nachbrechen zwingt.

Die nachbrechenden Massen lagern sich unter der treibenden Wirkung der Erdbeschleunigung bevorzugt in vertikaler Richtung um. Der Bruchvorgang setzt sich solange fort, bis die aufgelockerten Bruchmassen das gesamte verbrochene Volumen ausfüllen. Der Bruchvorgang kann sich dabei bis zum Erreichen der verfügbaren Mächtigkeit der Lockergesteinsüberdeckung t erstrecken, bevor es zu einem offenen Tagesbruch an der Tagesoberfläche mit dem Volumen V_s kommt, das nach einer Auflockerung ebenso in die Massenbilanz eingeht.

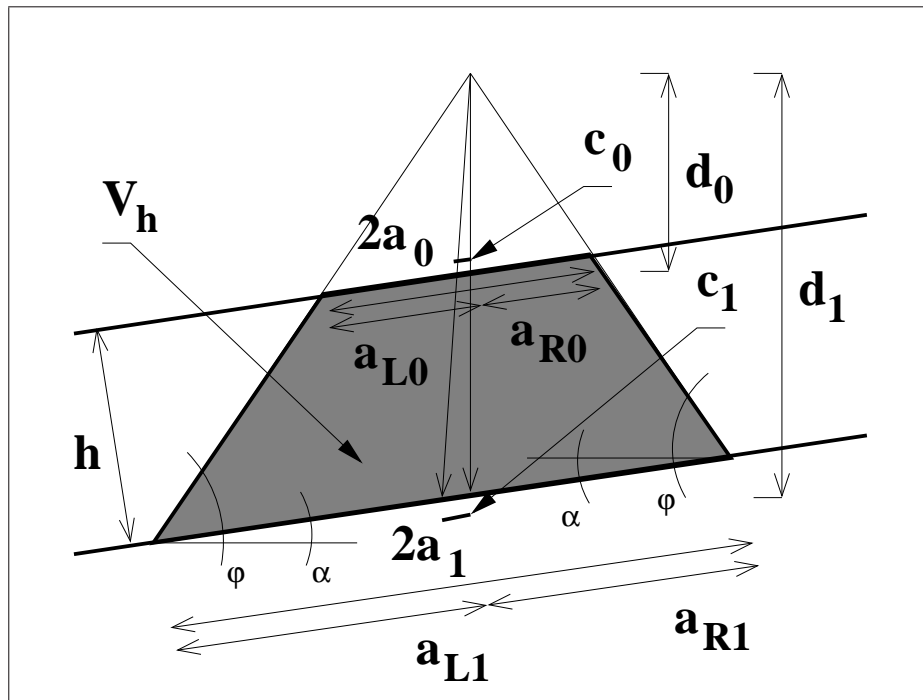


Abb. 3: Geometrie der Primärbruchzone mit geneigter Lagerung bei der Modellierung des Tagesbruchvorganges nach der Hohlräum-Bruchmassen-Bilanz-Methode

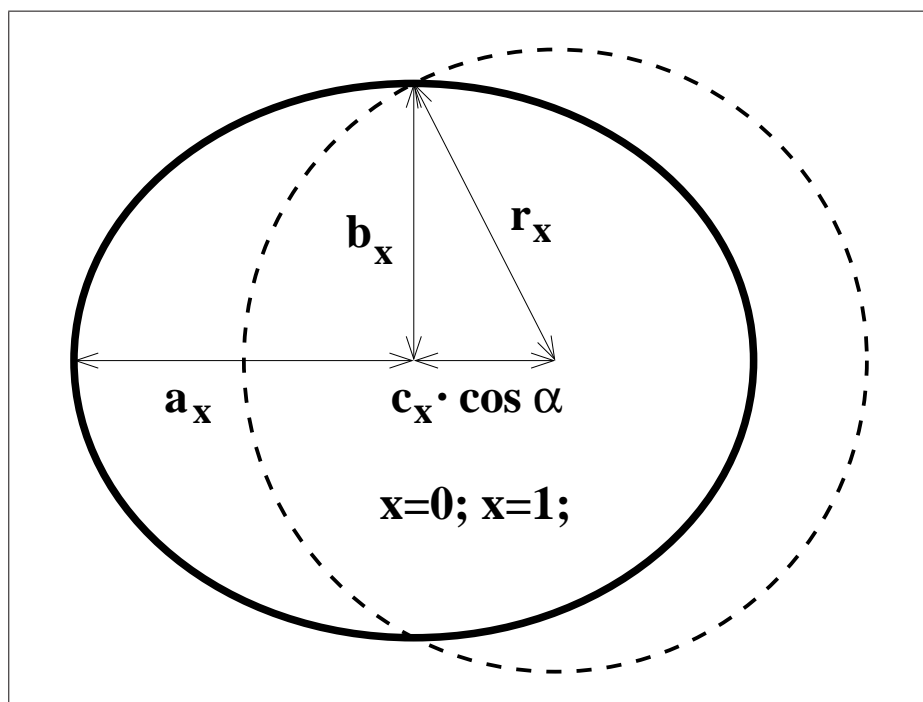


Abb. 4: Geometrie der elliptischen Berandung der Primärbruchzone mit geneigter Lagerung bei der Modellierung des Tagesbruchvorganges nach der Hohlräum-Bruchmassen-Bilanz-Methode

Anhand von dokumentierten und vermessenen Tagesbrüchen an der Geländeoberfläche besteht die Möglichkeit, die Bedingungen der Ausbildung des Tagesbruchs rechnerisch nachzuvollziehen, wenn hinreichende Informationen über die Geometrie und Struktur des Altbergbaus oder der natürlich ausgebildeten Hohlräume im Untergrund vorliegen. Der Rahmen einer detaillierten Nacherkundung der bergbaulich oder natürlich bedingten Hohlraumstruktur des Untergrundes bleibt jedoch, ähnlich, wie dies bei den geotechnischen Eigenschaften des Baugrundes der Fall ist, meistens begrenzt. Auf Standorten mit Altbergbau können aus den Risswerken und Aufzeichnungen belastbare Angaben zu den bergbaulichen Aktivitäten abgeleitet werden, die in rechnerischen Prognosen von Tagesbrüchen berücksichtigt werden können.

In dem mechanischen Vorgang der Tagesbruchentwicklung spielt das Vorhandensein von Grundwasser im Deckgebirge eine sehr große Rolle. Keiner der bisher bekannten Verfahren der rechnerischen Tagesbruchprognose kann den Einfluss von ungespanntem oder gespanntem Grundwasser einbeziehen. In den folgenden theoretischen Überlegungen wird vom Vorhandensein von Grundwasser im Deckgebirge abgesehen. Die Untersuchung der Wechselwirkung der Bruchmassen im Deckgebirge mit dem Grundwasser erfordert eine hydromechanisch gekoppelte Berechnung des Bruchvorganges und stellt eine wichtige Aufgabenstellung für weiterführende Untersuchungen dar. Es ist bereits von vornherein absehbar, dass eine praktische Anwendbarkeit von kontinuummechanisch formulierten Methoden der Tagesbruchprognose durch die Berücksichtigung der Vielzahl erforderlicher materialspezifischer Kennwerte in Deformationsmodellen des Deckgebirges erheblich erschwert wird.

Das geometrische Grundmodell für das Primärbruchvolumen bei der rechnerischen Tagesbruchprognose mit der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Methode für geneigte Lagerung ist in der Abbildung 3 ersichtlich. Der theoretischen Modellbildung liegt die Annahme zugrunde, dass das primäre Verbrauchsvolumen im Fall eines ebenen Problems (zum Beispiel Strecken, Tunnel oder Stollen) aus einem Prismenstumpf und im Fall eines räumlichen Problems (unversetzte Abbaustrebe sowie Abbaukammern) aus einem Kegelstumpf mit elliptischer Grundfläche besteht. Die räumliche Beschaffenheit von natürlichen Hohlräumen im Untergrund ist im Vergleich zum Altbergbau wesentlich irregulärer zu erwarten.

Die Länge der Verbrauchsstrecke an der Firste $2a_0$ ist eine sehr wichtige Eingangsgröße des Modells, entspricht der geometrischen Struktur des versagenden Verbausystems im betrachteten Altbergwerk und bestimmt zugleich die Ausdehnung der sich in Richtung Tagesoberfläche aufweitenden Aufbruchzone grundlegend. Die Geometrie der elliptischen Grundflächen an der Firste und an der Sohle des verbrechenden Hohlräumens werden aus dem ebenen Kegelschnitt des theoretischen Schüttkegels in dem Verbrauchsmaterials mit einem Schüttwinkel von φ abgeleitet, der durch eine unter dem Winkel α geneigten Ebene geschnitten wird. Im zweidimensionalen Modell entspricht die Breite senkrecht zur Modellierungsebene b der Länge, inwieweit eine Symmetrie in dieser Richtung vorausgesetzt werden kann. Bei einer räumlichen Betrachtung ergibt sich die kürzere Halbachse der Schnittellipse an der Firste b_0 und an der Sohle b_1 aus geometrischen Betrachtungen (siehe Abbildung 4).

Die rechnerische Tagesbruchprognose mit der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Methode besteht aus folgenden Arbeitsschritten:

1. Die Ermittlung des Tagesbruchvolumens erfolgt aus der Grundgleichung der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz, der die Annahme zugrunde liegt, dass das Primärverbruchvolumen im künstlichen oder natürlichen Hohlraum V_h durch Auflockerung von Verbruchsmassen im Gebirge in dem Aufbruchsvolumen V_t und Übergangsvolumen V_c sowie durch die Auflockerung von Verbruchsmassen an der Tagesoberfläche V_s ausgeglichen werden und der Vorgang der Tagesbruchentwicklung zum Stillstand kommt

$$V_t + V_c + V_h = s \cdot (V_t + V_c + V_s) , [m^3] . \quad (1)$$

Das Maß der Auflockerung wird mit dem Auflockerungsfaktor s aus dem Volumenverhältnis nach und vor dem Tagesbruchvorgang erfasst.

2. Durch Umstellung der Grundgleichung der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz kann das erforderliche Tagesbruchvolumen V_s berechnet werden. Wenn die Berechnung zu einem negativen Ergebnis führt, kommt der Vorgang der Tagesbruchentwicklung im Gebirge zum Stillstand und es entsteht kein Tagesbruch an der Geländeoberfläche

$$V_s = \frac{1}{s} \cdot (V_t + V_c + V_h) - (V_t + V_c) , [m^3] \succeq 0 . \quad (2)$$

3. Aus dem Grenzzustand, dass der Vorgang der Tagesbruchentwicklung die Geländeoberfläche gerade erreicht und das erforderliche Tagesbruchvolumen V_s verschwindet

$$V_s = (V_t + V_c + V_h) - s \cdot (V_t + V_c) = 0 , [m^3] , \quad (3)$$

kann die notwendige Mindestüberdeckung t_{min} im Deckgebirge des künstlichen oder natürlichen Hohlräum abgeschätzt werden, damit an der Geländeoberfläche kein Tagesbruch entsteht:

$$V_t(t_{min}) = \frac{V_h}{s - 1} - V_c , [m^3] . \quad (4)$$

In Abhängigkeit von der geometrischen Konfiguration lassen sich unterschiedliche Modelle für die Entwicklung der volumetrischen Anteile des modellierten Tagesbruchvorganges ableiten. Die geometrischen Bedingungen und die Definition der geometrischen Größen sind in der Abbildung 3 und 4 ersichtlich. (In der Abbildung 4 ist für x jeweils 0 oder 1 einzusetzen).

2.1 Ebener Fall

Der ebene Fall ist für das Versagen von Strecken oder Stollen bedeutsam, wo die Tagesbruchentwicklung senkrecht zur Modellierungsebene in einer Breite b als symmetrisch vorausgesetzt werden kann.

1. Das primäre Bruchvolumen V_h wird aus dem Volumen eines Prismenstumpfes ermittelt

$$V_h = (a_1 \cdot d_1 - a_0 \cdot d_0) \cdot \cos \alpha \cdot b , [m^3] . \quad (5)$$

2. Für die Geometrie der oberen Berandung des Primärbruchprismas ergibt sich mit der halben Länge der Versagenszone a_0 in der Firste als Eingangsgröße die Identität

$$a_0 = \frac{d_0}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} + \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \alpha)} \right), [m]. \quad (6)$$

Für den Abstand d_0 am oberen Prisma folgt nach Umstellung die Gleichung

$$d_0 = 2 a_0 \frac{\sin(\varphi - \alpha) \cdot \sin(\varphi + \alpha)}{\cos \varphi \cdot \sin(\varphi - \alpha) + \cos \varphi \cdot \sin(\varphi + \alpha)}, [m]. \quad (7)$$

3. Für die Geometrie der unteren Berandung des Primärbruchprismas ergibt sich mit der bekannten Höhe des verbrechenden Hohlraumes h und mit dem Abstand d_0 am unteren Prisma die Identität

$$d_1 = \left(d_0 + \frac{h}{\cos \alpha} \right), [m]. \quad (8)$$

Für den Abstand a_1 folgt nach Umstellung die Gleichung

$$a_1 = \frac{d_1}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} + \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \alpha)} \right), [m]. \quad (9)$$

4. Zur einfacheren geometrischen Modellierung wird ein Übergangsvolumen V_c als Hilfsgröße eingeführt

$$V_c = 2 \cdot a_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot b, [m^3]. \quad (10)$$

5. Das Aufbruchvolumen V_t beim säulenförmigen Aufbruchkörper berechnet sich aus dem Volumen einer Säule mit rechteckigem horizontalem und vertikalem Querschnitt

$$V_t = 2 \cdot a_0 \cdot \cos \alpha \cdot (t - a_0 \cdot \sin \alpha) \cdot b, [m^3]. \quad (11)$$

Die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche beim säulenförmigen Aufbruchkörper ergibt sich mit

$$t_{min} = \frac{(a_1 \cdot d_1 - a_0 \cdot d_0)}{2 \cdot a_0 \cdot (s - 1)}, [m]. \quad (12)$$

6. Das Aufbruchvolumen V_t beim elliptischem Aufbruchkörper berechnet sich aus dem Volumen einer Säule mit rechteckigem horizontalem Querschnitt und elliptischem vertikalem Querschnitt

$$V_t = \frac{\pi}{2} \cdot a_0 \cdot \cos \alpha \cdot (t - a_0 \cdot \sin \alpha) \cdot b, [m^3]. \quad (13)$$

Die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche beim elliptischem Aufbruchkörper ergibt sich mit

$$t_{min} = \frac{2 \cdot (a_1 \cdot d_1 - a_0 \cdot d_0)}{\pi \cdot a_0 \cdot (s - 1)}, [m]. \quad (14)$$

7. Im Sonderfall einer horizontalen Lagerung $\alpha = 0$ reduziert sich das Primärbruchvolumen V_h auf den Zusammenhang (Volumen eines Prismenstumpfes)

$$V_h = \left(\frac{(a_0 \cdot \tan \varphi + h)^2}{\tan \varphi} - a_0^2 \cdot \tan \varphi \right) \cdot b, \quad [m^3] \quad (15)$$

und das Übergangsvolumen V_c verschwindet

$$V_c = 0, \quad [m^3]. \quad (16)$$

Das Aufbruchvolumen V_t beim zylindrischen Aufbruchkörper reduziert sich auf die Gleichung

$$V_t = 2 \cdot a_0 \cdot t \cdot b, \quad [m^3] \quad (17)$$

und die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche ergibt sich beim zylindrischen Aufbruchkörper aus der Beziehung (Gleichung /3/ in [7])

$$t_{min} = \frac{h}{s-1} \cdot \left(1 + \frac{h}{2 \cdot a_0 \cdot \tan \varphi} \right), \quad [m]. \quad (18)$$

Das Aufbruchvolumen V_t beim elliptischen Aufbruchkörper reduziert sich auf die Gleichung

$$V_t = \frac{\pi}{2} \cdot a_0 \cdot t \cdot b, \quad [m^3] \quad (19)$$

und die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche ergibt sich beim elliptischen Aufbruchkörper aus der Beziehung (Gleichung /4/ in [7])

$$t_{min} = \frac{4 \cdot h}{\pi \cdot (s-1)} \cdot \left(1 + \frac{h}{2 \cdot a_0 \cdot \tan \varphi} \right), \quad [m]. \quad (20)$$

2.2 Räumlicher Fall

Der räumliche Fall ist für das Versagen von Abbaukammern und Abbaufeldern bedeutsam, wo die Tagesbruchentwicklung als eine räumliche Bruchfigur vorausgesetzt werden muss.

1. Das primäre Bruchvolumen wird aus dem Volumen eines Kegelstumpfes ermittelt

$$V_h = \frac{\pi \cdot \cos \alpha}{3} \cdot (a_1 \cdot b_1 \cdot d_1 - a_0 \cdot b_0 \cdot d_0), \quad [m^3]. \quad (21)$$

2. Für die Geometrie der oberen Berandung des Primärbruchkörpers als Kegelstumpf mit elliptischer oberer Endfläche aus dem Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene ergibt sich mit der halben Länge der Versagenszone a_0 in der Firste als Eingangsgröße und als längerer Halbdurchmesser der elliptischen Fläche die Identität

$$a_0 = \frac{d_0}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} + \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \alpha)} \right), \quad [m]. \quad (22)$$

Für den Abstand d_0 folgt nach Umstellung die Gleichung

$$d_0 = 2a_0 \frac{\sin(\varphi - \alpha) \cdot \sin(\varphi + \alpha)}{\cos \varphi \cdot \sin(\varphi - \alpha) + \cos \varphi \cdot \sin(\varphi + \alpha)}, [m]. \quad (23)$$

Mit geometrischen Betrachtungen folgen die Zusammenhänge für den Abstand c_0 am oberen Rand des Primärbruchkörpers

$$c_0 = \frac{d_0 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} - a_0 = a_0 - \frac{d_0 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \alpha)}, [m] \quad (24)$$

sowie für den Radius r_0 des Kreiskegels am oberen Rand des Primärbruchkörpers

$$r_0 = \frac{d_0 + c_0 \cdot \sin \alpha}{\tan \varphi}, [m]. \quad (25)$$

Der kleinere Halbdurchmesser b_0 der elliptischen Schnittfläche am oberen Rand des Primärbruchkörpers berechnet sich mit

$$b_0 = \sqrt{r_0^2 - c_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}, [m]. \quad (26)$$

3. Für die Geometrie der unteren Berandung des Primärbruchkörpers ergibt sich mit der bekannten Höhe des verbrechenden Hohlraumes h und mit dem Abstand d_0 die Identität

$$d_1 = \left(d_0 + \frac{h}{\cos \alpha} \right), [m]. \quad (27)$$

Für den größeren Halbdurchmesser a_1 am unteren Rand des Primärbruchkörpers als Kegelstumpf mit elliptischer unterer Endfläche aus dem Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene folgt die Gleichung

$$a_1 = \frac{d_1}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} + \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \alpha)} \right), [m]. \quad (28)$$

Mit geometrischen Betrachtungen folgen die Zusammenhänge für den Abstand c_1 am unteren Rand des Primärbruchkörpers

$$c_1 = \frac{d_1 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} - a_1 = a_1 - \frac{d_1 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \alpha)}, [m] \quad (29)$$

sowie für den Radius r_1 des Kreiskegels am unteren Rand des Primärbruchkörpers

$$r_1 = \frac{d_1 + c_1 \cdot \sin \alpha}{\tan \varphi}, [m]. \quad (30)$$

Der kleinere Halbdurchmesser b_1 am unteren Rand des Primärbruchkörpers berechnet sich mit

$$b_1 = \sqrt{r_1^2 - c_1^2 \cdot \cos^2 \alpha}, [m]. \quad (31)$$

4. Zur einfacheren geometrischen Modellierung wird ein Übergangsvolumen V_c als Hilfsgröße eingeführt

$$V_c = \pi \cdot a_0^2 \cdot b_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, [m^3]. \quad (32)$$

5. Das Aufbruchvolumen V_t beim zylindrischen Aufbruchkörper berechnet sich aus dem Volumen eines Zylinders mit elliptischem horizontalem und rechteckigem vertikalem Querschnitt

$$V_t = \pi \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot (t - a_0 \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha, [m^3]. \quad (33)$$

Die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche beim zylindrischen Aufbruchkörper ergibt sich mit

$$t_{min} = \frac{(a_1 \cdot b_1 \cdot d_1 - a_0 \cdot b_0 \cdot d_0)}{3 \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot (s - 1)}, [m]. \quad (34)$$

6. Das Aufbruchvolumen V_t beim ellipsoidischem Aufbruchkörper berechnet sich aus dem Volumen eines Ellipsoiden (mit elliptischem horizontalem und vertikalem Querschnitt)

$$V_t = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot (t - a_0 \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha, [m^3]. \quad (35)$$

Die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche beim ellipsoidischen Aufbruchkörper ergibt sich mit

$$t_{min} = \frac{(a_1 \cdot b_1 \cdot d_1 - a_0 \cdot b_0 \cdot d_0)}{2 \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot (s - 1)}, [m]. \quad (36)$$

7. Im Sonderfall einer horizontalen Lagerung $\alpha = 0$ reduziert sich das Primärbruchvolumen V_h auf den Zusammenhang (Volumen eines Kreiskegelstumpfes)

$$V_h = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{(a_0 \cdot \tan \varphi + h)^3}{\tan^2 \varphi} - a_0^3 \cdot \tan \varphi \right), [m^3] \quad (37)$$

und das Übergangsvolumen V_c verschwindet

$$V_c = 0, [m^3]. \quad (38)$$

Das Aufbruchvolumen V_t beim zylindrischen Aufbruchkörper reduziert sich auf die Gleichung

$$V_t = \pi \cdot a_0^2 \cdot t, [m^3] \quad (39)$$

und die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche ergibt sich beim zylindrischen Aufbruchkörper aus der Beziehung (Gleichung /5/ in [7])

$$t_{min} = \frac{h}{s - 1} \cdot \left(1 + \frac{h}{a_0 \cdot \tan \varphi} + \frac{h^2}{3 \cdot a_0^2 \cdot \tan^2 \varphi} \right), [m]. \quad (40)$$

Das Aufbruchvolumen V_t beim ellipsoidischem Aufbruchkörper reduziert sich auf die Gleichung

$$V_t = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot a_0^2 \cdot t, [m^3] \quad (41)$$

und die Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung der Tagesbruchgefährdung an der Geländeoberfläche ergibt sich beim ellipsoidischen Aufbruchkörper aus der Beziehung (Gleichung /6/ in [7])

$$t_{min} = \frac{3 \cdot h}{2 \cdot (s - 1)} \cdot \left(1 + \frac{h}{a_0 \cdot \tan \varphi} + \frac{h^2}{3 \cdot a_0^2 \cdot \tan^2 \varphi} \right), [m]. \quad (42)$$

Die Annahme eines elliptischen Aufbruchkörpers im ebenen und eines ellipsoidischen Aufbruchkörpers im räumlichen Fall führen zu den jeweils ungünstigeren Ergebnissen bei der Prognose von Tagesbruchsvolumina an der Geländeoberfläche V_s sowie bei der Ermittlung der erforderlichen Mindestüberdeckung t_{min} zur Abwendung eines Tagesbruchs.

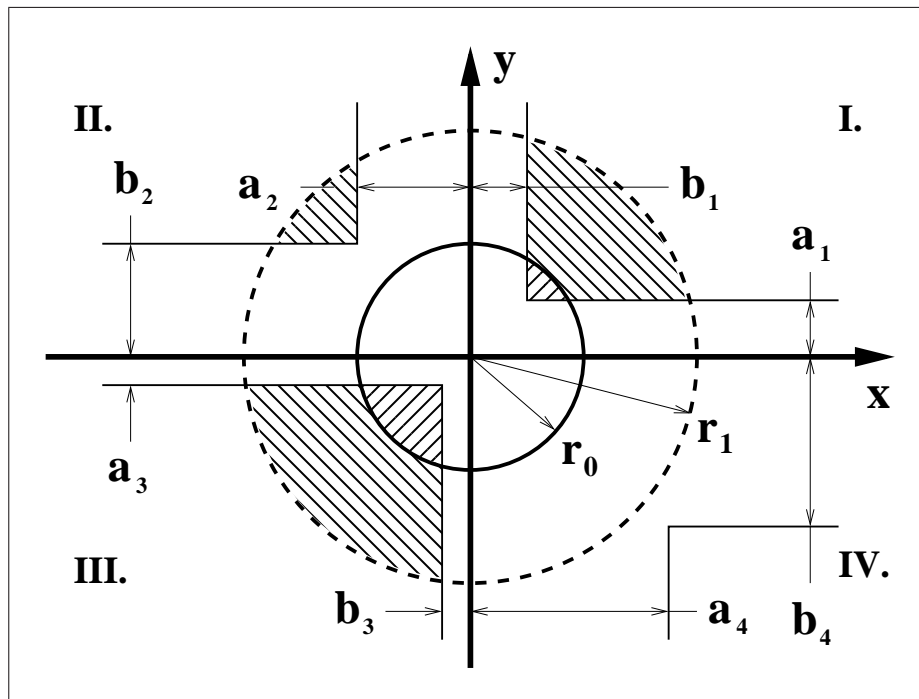


Abb. 5: Theorie des Tagesbruchvorganges nach der Hohlräum-Bruchmassen-Bilanz-Methode für den allgemeinen Fall eines verbrechenden Grubenbauwerkes oder Hohlraumes

2.3 Allgemeiner Fall

Die Genauigkeit einer rechnerischen Tagesbruchprognose wird sehr stark durch die realitätsnahe Erfassung der Vorgänge im Primärbruchbereich beeinflusst. MEIER schlägt als allgemeinen Fall einer Tagesbruchprognose die detaillierte Summation der Volumina von vertikalen Schnitten aus einem Kreiskegel zur Ermittlung des Primärvolumens $V'_h(\alpha = 0)$ über Streckenkreuzen bei ebener Lagerung ($\alpha = 0$) vor [7].

Die Anwendung des allgemeinen Modells für den Primärbruchvorgang ist nur mit einem räumlichen Modell der rechnerischen Tagesbruchprognose sinnvoll. Das resultierende mathematische Modell führt bei horizontaler Lagerung ($\alpha = 0$) zu einer aufwendigen Berechnung und eine Erweiterung auf den Fall einer geneigten Lagerung ($\alpha \neq 0$) verkompliziert den Ansatz weiter erheblich.

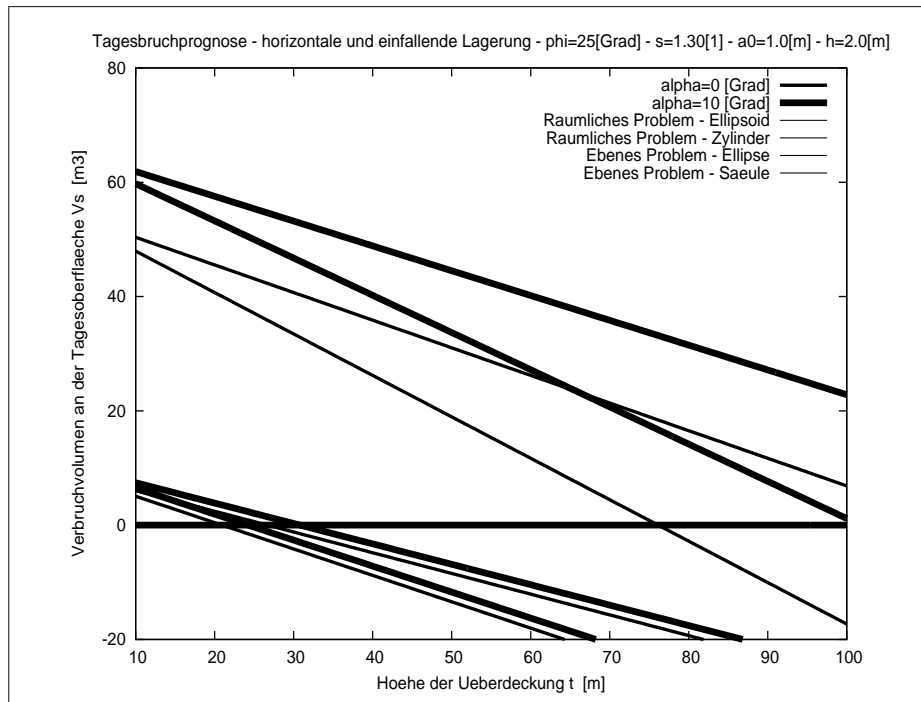


Abb. 6: Berechnung des Tagesbruchvorganges nach der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Methode für horizontale und geneigte Lagerung

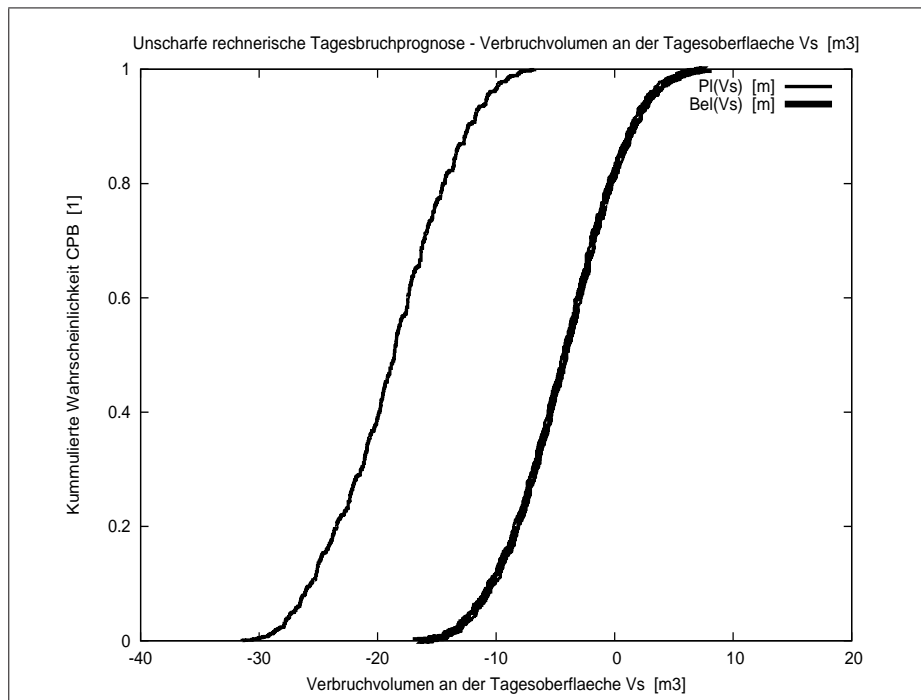


Abb. 7: Verbrauchsvolumen an der Tagesoberfläche aus der unscharfen rechnerischen Tagesbruchprognose nach der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Methode für horizontale und geneigte Lagerung

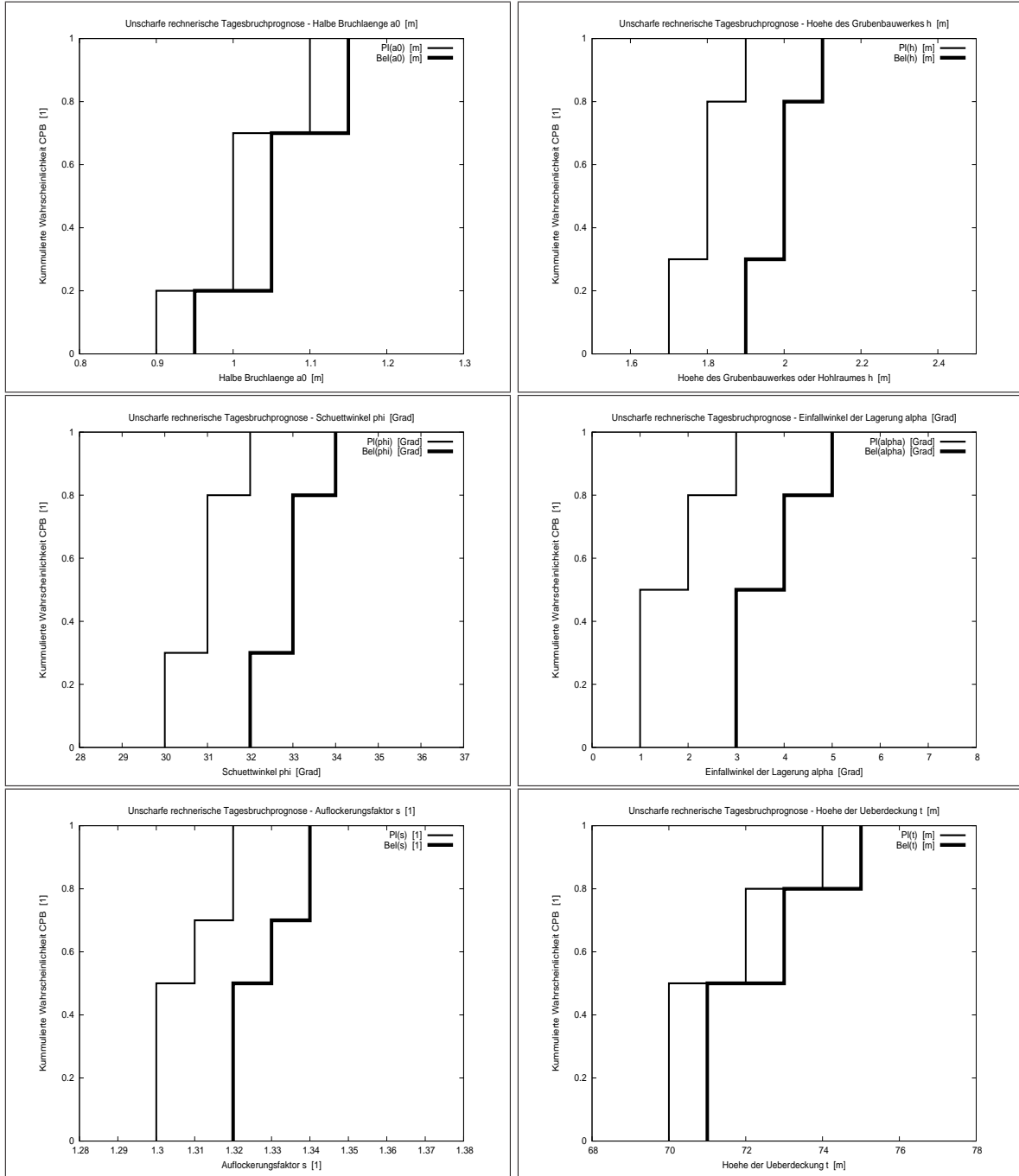


Abb. 8: Eingangsgrößen der unscharfen rechnerischen Tagesbruchprognose nach der Hohlraum-Bruchmassen-Bilanz-Methode für horizontale und geneigte Lagerung

Tab. 1: Unscharfe rechnerische Tagesbruchprognose für einen Beispielstandort mit einer Überdeckungsschicht, geneigter Lagerung und exzentrischem Verbrauch über einen Streckenkreuz im Grubenbauwerk

Unscharfe rechnerische Tagesbruchprognose für Einschichtproblem			
Halbe Länge der Verbrauchsstrecke a_0:			
Stufe i :	Pl(a_0) , [m]	Bel(a_0) , [m]	CPB(a_0) , [m]
1	0,90	0,95	0,20
2	1,00	1,05	0,50
3	1,10	1,15	0,30
Höhe des Grubenbauwerkes oder Hohlraumes h:			
Stufe i :	Pl(h) , [m]	Bel(h) , [m]	CPB(h) , [m]
1	1,70	1,90	0,30
2	1,80	2,00	0,50
3	1,90	2,10	0,20
Höhe der Überdeckung t:			
Stufe i :	Pl(t) , [m]	Bel(t) , [m]	CPB(t) , [m]
1	70,00	71,00	0,50
2	72,00	73,00	0,30
3	74,00	75,00	0,20
Auflockerungsfaktor s:			
Stufe i :	Pl(s) , [1]	Bel(s) , [1]	CPB(s) , [1]
1	1,30	1,32	0,50
2	1,31	1,33	0,20
3	1,32	1,34	0,30
Schüttwinkel φ:			
Stufe i :	Pl(φ) , [°]	Bel(φ) , [°]	CPB(φ) , [°]
1	30,00	32,00	0,30
2	31,00	33,00	0,50
3	32,00	34,00	0,20
Einfallwinkel der Lagerung α:			
Stufe i :	Pl(α) , [°]	Bel(α) , [°]	CPB(α) , [°]
1	1,00	3,00	0,50
2	2,00	4,00	0,30
3	3,00	5,00	0,20
Geometrie des Streckenkreuzes:			
a_1 , [m]	a_2 , [m]	a_3 , [m]	a_4 , [m]
1,25	1,25	1,25	1,25
b_1 , [m]	b_2 , [m]	b_3 , [m]	b_4 , [m]
1,75	1,75	1,75	1,75

Die rechnerische Vorgehensweise von MEIER für den allgemeinen Primärbruchfall im Bereich eines Streckenkreuzes kann vereinfacht und systematisch dargestellt werden [7].

Der Radius des kreisförmigen Bruchfensters (siehe Abbildung 5) beträgt

$$r_0 = a_0, [m]. \quad (43)$$

Die Höhe eines imaginären Kegels oberhalb des Bruchfensters hat die Höhe h_0

$$h_0 = r_0 \tan \varphi, [m]. \quad (44)$$

Mit der Höhe h des verbrechenden Grubenbauwerkes (Strecke) oder Hohlraumes ergeben sich für die Höhe h_1 und für den Radius r_1 eines umhüllenden Bruchkegels mit dem Schüttwinkel φ die Identitäten

$$h_1 = h_0 + h = r_1 \tan \varphi, \quad r_1 = r_0 + \frac{h}{\tan \varphi}, [m]. \quad (45)$$

Das Primärvolumen $V'_h(\alpha = 0)$ lässt sich nach MEIER aus dem Volumen $V_{h,0}$ eines Kreis-kegelstumpfes

$$V_{h,0} = \frac{r_1^3 - r_0^3}{3} \pi \tan \varphi, [m^3]. \quad (46)$$

mit der Höhe des verbrechenden Grubenbauwerkes oder Hohlraumes h sowie dem Gesamtvolumen von Schnittkörpern $V_{d,1}$

$$V_{d,1} = \frac{r_1^2 h_1}{3} \sum_{i=1}^{n=4} \pi - d_{1,i}, [m^3] \quad (47)$$

und dem Gesamtvolumen von Schnittkörpern $V_{d,0}$

$$V_{d,0} = \frac{r_0^2 h_0}{3} \sum_{i=1}^{n=4} \pi - d_{0,i}, [m^3], \quad (48)$$

die aus dem Kegelstumpf jeweils durch zwei Ebenen sich nicht überschneidende Teilkörper abtrennen, (analog zur Gleichung /20/ in [7]) ermitteln

$$V'_h(\alpha = 0) = V_{h,0} - V_{d,1} + V_{d,0}, [m^3]. \quad (49)$$

Nach dem Einsetzen ergibt sich die Gleichung für das Primärvolumen $V'_h(\alpha = 0)$ bei ebener Lagerung im allgemeinen Fall

$$V'_h(\alpha = 0) = \frac{r_1^3 - r_0^3}{3} \pi \tan \varphi - \frac{r_1^2 h_1}{3} \sum_{i=1}^{n=4} \pi - d_{1,i} + \frac{r_0^2 h_0}{3} \sum_{i=1}^{n=4} \pi - d_{0,i}, [m^3]. \quad (50)$$

Mit den dimensionslosen Hilfsgrößen

$$r_{a,x,i} = \frac{a_{x,i}}{r_x}, \quad r_{b,x,i} = \frac{b_{x,i}}{r_x}, [1] \quad (51)$$

und

$$r_{0,x,i} = \sqrt{r_{a,x,i}^2 + r_{b,x,i}^2}, \quad r_{da,x,i} = \sqrt{1 - r_{a,x,i}^2}, \quad r_{db,x,i} = \sqrt{1 - r_{b,x,i}^2}, \quad [1] \quad (52)$$

für die Indizes $x = 0$ und $x = 1$ werden die Größen

$$\begin{aligned} d_{x,i} = & 4r_{a,x,i} r_{b,x,i} r_{0,x,i} + 4r_{a,x,i} r_{da,x,i} + 4r_{b,x,i} r_{db,x,i} - 12r_{a,x,i} r_{b,x,i} + \\ & + 2 \arcsin r_{a,x,i} + 2 \arcsin r_{b,x,i} - \\ & - 2r_{a,x,i}^3 \log \frac{1 + r_{da,x,i}}{r_{0,x,i} + r_{b,x,i}} - 2r_{b,x,i}^3 \log \frac{1 + r_{db,x,i}}{r_{0,x,i} + r_{a,x,i}}, \quad [1] . \end{aligned} \quad (53)$$

ermittelt. Die Berechnungen sind nur für den Wertebereich

$$0 \preceq r_{0,x,i} \preceq 1 \quad (54)$$

sinnvoll, wenn die seitlichen Streckenbegrenzungen aus den jeweiligen Kegelflächen ein Volumen ausschneiden. Im Grenzwert $r_{0,x,i} = 0$ kommt es zu einem vollständigem Austrennen des Kegelstumpfvolumens im jeweiligen Quadranten. Im Grenzwert $r_{0,x,i} = 1$ tritt keine Behinderung der Schüttkegelausbildung durch die seitlichen Streckenbegrenzungen auf.

Zur vereinfachten Vorgehensweise wird eine Näherungsberechnung basierend auf einen Ähnlichkeitsvergleich mit der Annahme empfohlen, dass die Vergrößerung des Primärbruchvolumens im allgemeinen Fall bei einer geneigten Lagerung mit dem räumlichen Fall bei horizontaler Lagerung vergleichbar ist

$$\frac{V'_h(\alpha)}{V'_h(\alpha = 0)} \simeq \frac{V_h(\alpha)}{V_h(\alpha = 0)}, \quad [1] . \quad (55)$$

Das Primärbruchvolumen für den allgemeinen Fall bei geneigter Lagerung $V'_h(\alpha \neq 0)$ ergibt sich nach Umformung aus dem Primärbruchvolumen bei geneigter Lagerung $V_h(\alpha \neq 0)$ und horizontaler Lagerung $V_h(\alpha = 0)$ für den räumlichen Fall mit identischen geometrischen Eingangsgrößen der halben Länge der Verbruchstrecke in der Firste a_0 und der Streckenhöhe h jedoch ohne Beachtung der Verschnittflächen im Streckenkreuz, sowie aus dem Primärbruchvolumen bei horizontaler Lagerung $V'_h(\alpha = 0)$ mit Beachtung der Verschnittflächen im Streckenkreuz

$$V'_h(\alpha) \simeq \frac{V_h(\alpha)}{V_h(\alpha = 0)} \cdot V'_h(\alpha = 0), \quad [1] . \quad (56)$$

Die Berechnung des Übergangsvolumens V_c , des Aufbruchvolumens im anstehenden Gebirge V_t sowie des Tagesbruchvolumens an der Geländeoberfläche V_s beim allgemeinen Fall entspricht der Lösung für den räumlichen Fall.

2.4 Rechnerische Tagesbruchprognose für geneigte Lagerung

Das Ergebnis einer Beispielberechnung für eine rechnerische Tagesbruchprognose bei ebener und geneigter Lagerung kann in der Abbildung 6 verglichen werden. Das Diagramm zeigt das Volumen des prognostizierten Tagesbruches an der Tagesoberfläche V_s , wo die dargestellten Linienpaare von oben nach unten für die Berechnungsfälle einer räumlichen Berechnung mit ellipsoidischem Aufbruchvolumen, einer räumlichen Berechnung mit zylindrischem Aufbruchvolumen, einer ebenen Berechnung mit elliptischem Aufbruchvolumen sowie einer ebenen Berechnung mit säulenförmigem Aufbruchvolumen gelten.

Der Beispielberechnung wurde eine halbe Verbrauchsstrecke von $a_0 = 1,0 [m]$, eine Breite $b = 1,0 [m]$ und eine Höhe des Grubenbauwerkes oder Hohlraumes von $h = 2,0 [m]$, ein Schüttwinkel der Verbrauchsmassen von $\varphi = 25,0 [^\circ]$, ein Einfallwinkel der Lagerung von $\alpha = 0,0 [^\circ]$ und $\alpha = 10,0 [^\circ]$, eine Höhe der Überdeckung von $t = 10,0 \dots 100,0 [m]$ sowie eine in bergbaulichen Berechnungen für Lockergesteine oft genannten Größe des Auflockerungsfaktors von $s = 1,3 [1]$ zugrunde gelegt [5].

Das Berechnungsergebnis zeigt, dass der zunehmende Winkel der geneigten Lagerung der verbrechenden bergbaulichen Anlagen oder der natürlichen Hohlräume zur Ausbildung eines zunehmenden Verbrauchsvolumens V_s an der Tagesoberfläche führt. Wenn die Berechnung zu einem negativen Tagesbruchvolumen $V_s < 0$ führt, erreicht der Mechanismus des betrachteten Tagesbruchvorganges die Tagesoberfläche nicht. Die Mächtigkeit der notwendigen Überdeckung zur Abwendung eines Tagesbruches ist in dem Diagramm in der Abbildung 6 bei der Bedingung $V_s = 0$ entnehmbar, die mit einer dicken Linie gekennzeichnet ist.

3 Unscharfe praktische Tagesbruchprognose

Unabhängig vom verwendeten Untersuchungsverfahren stellt die in der Geotechnik häufig vorliegende Unsicherheit bei der Ermittlung notwendiger Eingangsgrößen für die praktische Anwendung der rechnerischen Tagesbruchprognose ein großes Problem dar. Eine strenge mathematische Betrachtung dieser Unsicherheiten ist nicht selbstverständlich und wird häufig durch empirische Überlegungen ersetzt, die mit fortgeschrittenen mathematischen Methoden weiter gestützt werden können.

3.1 Random-Set-Theorie

Die Random-Set-Theorie bietet eine generelle Methode für den Umgang mit mengenbasierter Information und mit diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Eine rechnerische Betrachtung mit der Random-Set-Theorie führt zum gleichen Ergebnis, wie eine Intervall-Analyse ohne Wahrscheinlichkeitszuordnung sowie eine Monte-Carlo-Simulation, wenn die verfügbare wahr-scheinlichkeitstheoretische Information umfangreich ist. Die Anzahl notwendiger Berechnungen ist jedoch signifikant kleiner [15, 16].

Der Untersuchung eines physikalischen Vorganges mit der Random-Set-Theorie wird eine Menge X als Realisierung möglicher Werte einer Variable x zugrunde gelegt. Als Random-Set wird in der Menge X eine Zuordnung (m, \mathfrak{S}) definiert [8], wo $\mathfrak{S} = \{A_i : i = 1, \dots, n\}$ den Träger des Random-Sets, A_i die sogenannten fokalen Elemente ($A_i \subseteq X$) und m die grundlegende Wahrscheinlichkeitszuordnung $\mathfrak{S} \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften darstellen

$$m(\emptyset) = 0, \quad \sum_{A \in \mathfrak{S}} m(A) = 1, 0. \quad (57)$$

Jede Menge $A \in \mathfrak{S}$ beinhaltet mögliche Werte der Variablen x und $m(A)$ kann als die Wahrscheinlichkeit angesehen werden, dass A in dem Bereich von x liegt. Durch die ungenaue Formulierung der Random-Set-Theorie ist es nicht möglich, eine "exakte" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\text{Pro}(E)$ einer generischen Zuordnung $x \in X$ oder einer generischen Untermenge $E \subset X$ anzugeben, sondern nur einen unteren und oberen Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung. Für alle Untermengen $E \subset X$ ist der untere Grenzwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Funktion $\text{Bel}(E)$ ("Belief"-Funktion)

$$\text{Bel}(E) = \sum_{A_i: A_i \subseteq E} m(A_i) \quad (58)$$

und der obere Grenzwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Funktion $\text{Pl}(E)$ ("Plausibility"-Funktion)

$$\text{Pl}(E) = \sum_{A_i: A_i \cap E \neq \emptyset} m(A_i) \quad (59)$$

gegeben, die die "exakte" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\text{Pro}(E)$ als Grenzwerte von unten und oben beidseitig begrenzen

$$\text{Bel}(E) \preceq \text{Pro}(E) \preceq \text{Pl}(E) \quad (60)$$

und im Sonderfall miteinander übereinstimmen, wenn der Träger des Random-Sets \mathfrak{S} nur aus diskreten Werten ("Singletons") besteht und m in eine Wahrscheinlichverteilung übergeht.

Mit diskreten Werten der fokalen Elemente A_i und den zugehörigen diskreten Wahrscheinlichkeitszuordnungen m_i können physikalische Vorgänge mathematisch untersucht werden, indem jede Realisierung $\text{Bel}(E)$ und $\text{Pl}(E)$ probabilistisch betrachteter physikalischer Größen auf jeder diskreter Stufe i miteinander systematisch kombiniert wird. Aus den Berechnungsergebnissen einer systematischen Kombination kann der untere $\text{Bel}(E)$ und obere Grenzwert $\text{Pl}(E)$ für die diskrete Wahrscheinlichkeitszuordnung m_i abgeleitet werden, die sich beim Berechnungsergebnis aus dem Produkt der diskreten Wahrscheinlichkeitszuordnungen m_i unter Annahme der Unabhängigkeit der n als Zufallsvariable betrachteten physikalischen Größen ergeben

$$m(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n m_i(A_i), \quad A_1 \times \dots \times A_n \in \mathfrak{R}, \quad [1]. \quad (61)$$

Bei einem physikalischen Vorgang mit n betrachteten Eingangsgrößen, die jeweils n_i fokale Elemente A_i mit den zugehörigen diskreten Wahrscheinlichkeitszuordnungen m_i beinhalten, ergibt sich die Anzahl notwendiger Berechnungen n_c mit

$$n_c = 2^n \prod_{i=1}^n n_i, \quad [1]. \quad (62)$$

Dieser Berechnungsumfang ist deutlich geringer, als die Anzahl notwendiger Berechnungen zur Klärung des stochastischen Verhaltens in einem physikalischen Vorgang mit der Monte-Carlo-Methode.

Bei der rechnerischen Tagesbruchprognose stellt die Berechnung eines Problems keinen hohen Rechenaufwand dar und eine hohe Zahl von Eingangsgrößen kann als Zufallsvariable mit einer hohen Zahl von diskreten Intervallen A_i und diskreten Wahrscheinlichkeiten m_i in die Berechnungen eingeführt werden. In der praktischen Anwendung der Random-Set-Theorie ist es insbesondere bei hohem Rechenaufwand einzelner Berechnungen bei numerischen Methoden empfehlenswert, den Umfang der als Zufallsvariable betrachteten Eingangsgrößen mit einer Sensitivitätsanalyse auf ein Minimum einzuschränken [8, 9]. Die Random-Set-Theorie begrenzt weder die freie Kombination von probabilistischen und deterministischen Eingangsgrößen in dem modellierten physikalischen Vorgang noch die mathematische Gestaltung der physikalischen Modellierung.

3.2 *Unschärfe rechnerische Tagesbruchprognose für geneigte Lagerung*

In der rechnerischen Tagesbruchprognose bei praktischen Problemstellungen kann die Random-Set-Theorie sehr vorteilhaft angewendet werden, weil der Rechenaufwand für eine Berechnung niedrig ist. Durch die diskrete Intervallformulierung der Eingangsgrößen mit den zugehörigen diskreten Wahrscheinlichkeiten wird mit unscharfen Eingangswerten gearbeitet. Die aus der unscharfen rechnerischen Tagesbruchprognose resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung des Tagesbruchvolumens an der Geländeoberfläche bietet sich für Risikobetrachtungen zur Tagesbruchgefährdung sehr vorteilhaft an.

In der Beispielberechnung einer unscharfen praktischen rechnerischen Tagesbruchprognose für den räumlichen Fall eines ellipsoidischen Aufbruchkörpers werden die halbe Verbrauchsstrecke von a_0 , die Höhe des Grubenbauwerkes oder Hohlraumes h , der Schüttwinkel der Verbrauchsmassen φ , der Einfallwinkel der Lagerung α , die Höhe der Überdeckung von t und der Auflockerungsfaktor von s als Zufallsvariable mit jeweils drei fokalen Variablen A_i und zugehörigen Wahrscheinlichkeitszuordnungen m_i eingeführt. Die Eingangsgrößen mit ihren unteren $Bel(E)$ und oberen $Pl(E)$ Grenzwerten sowie zugehörigen diskreten Wahrscheinlichkeiten m_i in kummulierter Form (CPB, cumulative probability) sind in der Tabelle 1 zusammengestellt und in der Abbildung 8 als grafische Darstellung ersichtlich. Zur Vollständigkeit wurde der allgemeine Fall eines exzentrischen Hohlraumverbruchs über einem Streckenkreuz betrachtet, wobei die Streckenkreuzparameter des Bruchfensters als diskrete Größen in die Betrachtung eingeführt wurden (siehe in der Tabelle 1 unten).

Bei der gewählten Anzahl von sechs Zufallsvariablen als Eingangsgrößen mit jeweils drei fokalen Variablen A_i mit den diskreten Wahrscheinlichkeitszuordnungen m_i ergibt eine Anzahl notwendiger Berechnungen mit

$$n_c = 2^n \prod_{i=1}^n n_i = 2^{n=6} \prod_{i=1}^{n=6} 3 = 46656 , [1] . \quad (63)$$

Diese Zahl ist gleichzeitig die Anzahl der fokalen Elemente des Ergebnisses der Berechnung mit der Random-Set-Theorie und erfasst die stochastischen Eigenschaften des modellierten physikalischen Vorganges im Vergleich zu den Eingangsgrößen mit hohem Detail. Die unteren $\text{Bel}(E)$ und oberen $\text{Pl}(E)$ Grenzwerte der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Berechnungsergebnisses können mit stetigen stochastischen Modellen identifiziert werden.

Das Berechnungsergebnis in Form des unteren $\text{Bel}(E)$ und oberen Grenzwertes $\text{Pl}(E)$ für das prognostizierte Tagesbruchvolumen an der Geländeoberfläche mit den zugehörigen kumulierten diskreten Wahrscheinlichkeiten ist in der Abbildung 7 ersichtlich. Unter den modellierten geotechnischen Standortbedingungen liegen sowohl der untere als auch der obere Grenzwert weitgehend im negativen Bereich, wodurch sich Tagesbruchvorgänge nur mit der begrenzten Versagenswahrscheinlichkeit p_f von

$$P(V_s | V_s \leq 0) = 0,817 = 1 - p_f , p_f = 0,183 , [1] \quad (64)$$

bis zur Geländeoberfläche entwickeln werden, wenn das prognostizierte Verbrauchsvolumen an der Geländeoberfläche V_s positiv wird. Aus dem oberen Grenzwert wird auch deutlich, dass im Fall der ungünstigsten Kombination der probabilistischen und deterministischen Eingangsgrößen das maximale Verbrauchsvolumen an der Geländeoberfläche einen Grenzwert nicht überschreiten wird

$$P(V_s | V_s \leq V_{s,max}) = 1,0 , V_{s,max} = 7,92 , [m^3] . \quad (65)$$

Der Vergleich der Ergebnisse der deterministischen Berechnung in der Abbildung 6 und der Berechnung mit der Random-Set-Theorie in der Abbildung 7 verdeutlicht den besonderen Vorteil der unscharfen rechnerischen Tagesbruchprognose, indem das Berechnungsergebnis und der physikalische Vorgang der Tagesbruchentwicklung wahrscheinlichkeitstheoretisch zugeordnet wird.

Eine unscharfe rechnerische Tagesbruchprognose mithilfe der Random-Set-Theorie stellt keine Anforderungen an das verwendete mathematische Modell des betrachteten physikalischen Vorganges und kann mit jedem rechnerischen Verfahren der Tagesbruchentwicklung angewendet werden, wodurch sich die vorgestellte Methode als wichtiges Instrument zur Risikoabschätzung infolge einer potenziellen Tagesbruchgefahr anbietet.

4 Zusammenfassung, Ausblick

Die Nutzung von Flächen mit Altbergbau oder mit natürlichen Hohlräumen im Unter- und Baugrund ist mit erhöhten Risiken behaftet, dass Bauwerke durch unerwünschte Deformationen des Baugrundes in Mitleidenschaft gezogen werden. Eine typische Versagensart ist die Entwicklung von Tagesbrüchen oder Erdfällen, wobei sich Massen in Richtung von Hohlräumen im Unter- und Baugrund verlagern und auflockern. Die Umlagerung von Massen setzt sich solange fort, bis sich ein statisches Gleichgewicht einstellt und eine weitere Fortpflanzung des Bruchvorganges verhindert oder stark reduziert.

Zu einer Risikobewertung auf einem Standort mit einer Verbruchgefährdung muss die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass sich ein Tagesbruch oder ein Erdfall bis zum betrachteten Standort des Bauwerkes an der Oberfläche ausbreitet und das Bauwerk in seiner Funktion beeinträchtigt wird. Bei der Eintrittswahrscheinlichkeit eines Schadens liegt der Schwerpunkt nicht auf der zeitlichen Entwicklung des Bruchprozesses sondern auf der Entstehung des Gleichgewichtszustandes, welcher die weitere Bruchentwicklung unterbindet.

Zur Prognose potenzieller Tagesbrüche an der Oberfläche ist in dem ersten Schritt der Risikobewertung die Anwendung eines zuverlässigen Verfahrens der rechnerischen Tagesbruchprognose erforderlich, welches unter den Bedingungen des Standortes durch Rückrechnung gegangener Ereignisse rechnerisch validiert oder kalibriert werden muss.

Sowohl die Eingangsgrößen der theoretischen Modellierung eines Tagesbruchvorganges als auch die Größe prognostizierter Tagesbruchvolumina können als Zufallsvariable angesehen werden. Die Random-Set-Theorie bietet eine praktikable Möglichkeit, die stochastische Natur des Tagesbruchvorganges mit einem begrenzten rechnerischen Aufwand theoretisch zu fassen. Die berechneten Tagesbruchvolumina und die zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten können als Grundlage der Risikobewertung von zu schützenden Objekten herangezogen werden.

Literatur

- [1] BEISLER, M.: **Modelling of Input Data Uncertainty Based on Random Set Theory for Evaluation of the Financial Feasibility for Hydropower Projects**; *Veröffentlichungen des Institutes für Geotechnik der TU Bergakademie Freiberg, Heft 2011-3, ISSN 1611-1605, pp.172, Freiberg, 2011.*
- [2] FENK, J.: **Eine Theorie zur Entstehung von Tagesbrüchen über Hohlräumen im Lockergebirge**; *Freiberger Forschungshefte, Reihe A, Geotechnik, Ingenieurgeologie, Bergbautechnologie, Verfahrenstechnik; A639b, pp.139, Freiberg, 1981.*
- [3] FENK, J.: **Tagesbrüche über Hohlräumen im Lockergebirge mit geneigter Schichtlagerung**; *Schlußbericht zum Thema DFG-II-D-02-Fe488/1-1, pp.105, Freiberg, 2000.*

- [4] FENK, J.; AST, W.: **Geotechnische Einschätzung bruchgefährdeter Baugründe**; *Geotechnik*, vol.27(2004), no.1, p.59-65.
- [5] HÄRTIG, H.: **Grundlagen für die Berechnung von Tagebauen: Braunkohle, Kiessand, Ton, Naturstein**; *Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie*, Leipzig, 1982.
- [6] KRATZSCH, H.: **Bergschadenkunde**; ISBN:3-00-001661-9, p.844, *Deutscher Markscheiderrischer Verein e.V.*, Herne, 1997.
- [7] MEIER, J.; MEIER, G.: **Modifikation von Tagesbruchprognosen**; *Geotechnik*, vol.28(2005), no.2, p.119-125.
- [8] SCHWEIGER, H.F.; PESCHL, G.M.: **Reliability Analysis in Geotechnics with the Random Set Finite Element Method**; *Computers and Geotechnics*, vol.32(2005), p.422-435, refs.55.
- [9] SCHWEIGER, H.F.; NASEKHIAN, A.; MARCHER, T.: **A comparison of Random Set and Point Estimate Methods in Finite Element Analysis of Tunnel Excavation**; *Vogt, Schuppener, Straub & Bräu (eds.): Proceedings ISGSR 2011*, p.341-348, ISBN 978-3-939230-01-4, *Bundesanstalt für Wasserbau*, 2011, refs.21.
- [10] STRZODKA, K. (ED): **Tagebautechnik 1 und 2**; *Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie*, Leipzig, 1979, 1980.
- [11] TAMÁSKOVICS, N.: **Rechnerische Stabilitätsnachweise für verflüssigungsgefährdete Altkippen des Braunkohlenbergbaus**; in *Meier, G. et al. (eds.): Tagungsband 13. Altbergbau-Kolloquium, Freiberg, 2013*, p.232-268, refs.25, *Freiberg*, 2013.
- [12] TAMÁSKOVICS, N.: **Statistische Gefährdungsbewertung gefluteter Altkippen von Braunkohletagebauen**; in *Meier, G. et al. (ed.): 14. Altbergbau Kolloquium, Gelsenkirchen, 2014*, pp.62-92, refs.17, *Gelsenkirchen*, 2014.
- [13] TAMÁSKOVICS, N.: **Bergschadenkunde, gestern, heute und morgen**; 17. *Geokinematischer Tag*, pp.12, *TU Bergakademie Freiberg, Freiberg*, 2016.
- [14] TAMÁSKOVICS, N.; MEIER, G.; BRAUN, S.; SCHLESINGER, B.: **Statistisches Konzept zur Risikoanalyse von Tagesbrüchen über natürlichen und künstlichen Hohlräumen**; 18. *Geokinematischer Tag*, pp.19, *TU Bergakademie Freiberg, Freiberg*, 2017.
- [15] F. TONON, F.; BERNARDINI, A.; MAMMINO, A.: **Reliability analysis of rock mass response by means of Random Set Theory**; *Reliability Engineering and System Safety* vol.70(2000), p.263-282, refs.74.
- [16] F. TONON, F.: **On the Use of Random Set Theory to Bracket the Results of Monte Carlo Simulations**; *Reliable Computing* vol.10(2004), p.107-137, refs.48.