Fakultät für Mathematik und Informatik

Preprint 2012-03

Melanie Nentwich, Alina Ruziyeva

Mathematische Grundlagen zur Vorbereitung des Studiums an der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

ISSN 1433-9307

Melanie Nentwich, Alina Ruziyeva

Mathematische Grundlagen
zur Vorbereitung des Studiums an der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

TU Bergakademie Freiberg

Fakultät für Mathematik und Informatik

Prüferstraße 9

09596 FREIBERG

http://www.mathe.tu-freiberg.de

ISSN 1433 – 9307

Herausgeber: Dekan der Fakultät für Mathematik und Informatik

Herstellung: Medienzentrum der TU Bergakademie Freiberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG

Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

Mathematische Grundlagen
zur Vorbereitung des Studiums an der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

Melanie Nentwich, Alina Ruziyeva

6. August 2012

Bemerkungen

Das folgende Heft dient der selbständigen Wiederholung des mathematischen Schulstoffes anhand von praktischen Aufgaben.
Der Inhalt ist durch farbige Boxen kodiert: wichtige theoretische Sachverhalte in blau, mögliche Fehlerquellen in rot und die Beispielaufgaben in grün. Dies ermöglicht eine selektive Bearbeitung des Heftes. Wer nur die Theorie wiederholen möchte, kann sich auf die blauen Boxen beschränken. Wer sich stattdessen zum Einstieg an einer Aufgabe probieren möchte, richtet seine Aufmerksamkeit auf die grünen Boxen.
Mit orange markierten Zahlen sind Links markiert, die bei Klick auf entsprechende Zahl zur zugehörigen Referenz führen.

Die vorgestellten Aufgaben wurden teilweise aus den folgenden Büchern entlehnt:

- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Anwendungsbeispiele*, Lothar Papula, 5. Auflage, 2004, Vieweg Verlag
- *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Basiswissen mit Praxisbezug*, Knut Sydsaeter, Peter Hammond, 2. Auflage, 2006, Pearson Studium
- *Mathematik in der Biologie*, Annika Eickhoff–Schachtebeck, Anita Schöbel, 2009, http://optimierung.math.uni-goettingen.de/skripte/bioskript.pdf

1
Arithmetik

1.1 Proportion (Dreisatz)

Eine Sonderstellung unter den linearen Gleichungen mit einer Variablen (vgl. Abschnitt 3.1.1) nehmen die Proportionen ein. Eine *Proportion* ist eine Verhältnisgleichung $a : b = c : d$ bzw. in Bruchschreibweise $a/b = c/d$ (gesprochen: a verhält sich zu b wie c zu d, vgl. Abschnitt C.4). Diese Proportion lässt sich verschieden umformen. Äquivalente Formen sind:

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c,$$

dabei muss der Nenner stets ungleich 0 sein.

Sind von den Gliedern einer Proportion drei bekannt, dann lässt sich das vierte Glied berechnen. Sind zum Beispiel a, b, c bekannt und d gesucht, so gilt $d = \frac{bc}{a}$.

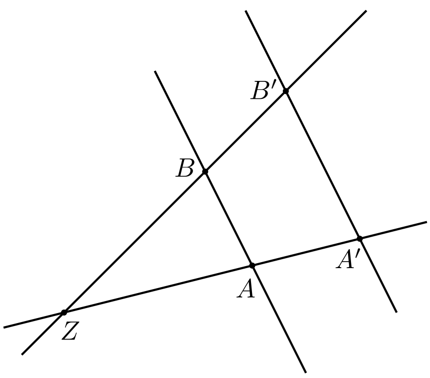
Beispiel 1.1. $\dfrac{4}{5} = \dfrac{x}{x+1}\ (x \neq -1) \Leftrightarrow 4(x+1) = 5x \Leftrightarrow 4x + 4 = 5x \Leftrightarrow x = 4.$

Aus der Proportion $a/b = c/d$ lassen sich weitere Proportionen ableiten, etwa durch Addition oder Subtraktion von 1 auf beiden Seiten. Solche Umformungen der Proportion werden *korrespondierende Addition* oder *korrespondierende Subtraktion* genannt:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad\qquad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \qquad\qquad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

Beispiel 1.2. geometrische Anwendung: Strahlensatz
Er ermöglicht Aussagen über Streckenverhältnisse und die Bestimmung fehlender Seitenlängen. Bei Kenntnis von drei Seitenlängen können die fehlenden mit Hilfe folgender Gleichungen bestimmt werden.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

1.2 Potenzen

Eine Zahl der Form a^n (gesprochen: "a hoch n") wird *Potenz* genannt. Dabei wird a als *Basis* und n als *Exponent* bezeichnet. Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (gleichbedeutend mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Potenzgesetze mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (1.2.1)$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad (1.2.2)$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (1.2.3)$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (1.2.4)$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (1.2.5)$$

Konventionen ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$):

$$a^0 := 1 \qquad (1.2.6)$$
$$a^1 := a \qquad (1.2.7)$$
$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \qquad (1.2.8)$$
$$0^m := 0 \qquad (1.2.9)$$

Die Ausdrücke 0^0 und 0^{-n} sind für $n \in \mathbb{N}$ nicht definiert.
Allgemein sind Potenzen auch für Exponenten $n \in \mathbb{R}$ definiert. Speziell für $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ist von *Wurzeln* die Rede, vgl. Abschnitt 1.3. Diese sind jedoch nur für $a \geq 0$ definiert.

Fehlerwarnung: Summe und Produkt von Potenzen
Sind Basis und Exponent verschieden, so kann das Produkt zweier Potenzen *nicht* zusammengefasst werden, im Allgemeinen gilt also:

$$a^m \cdot b^n \neq (ab)^{mn} \qquad a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$$
$$a^m \pm a^n \neq a^{m \pm n} \qquad a^n + a^n = 2a^n \neq a^{2n}$$

Eine wichtige Hilfe beim Berechnen von Potenzen von Summen sind die

Binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1.2.10)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (1.2.11)$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad (1.2.12)$$

Eine weitere wichtige Hilfe ist das *Pascal'sche Dreieck*

n													
0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Mit ihm kann eine beliebige Potenz n eines Binoms $(a \pm b)^n$ schnell berechnet werden. Aus Zeile $n = 4$ resultiert beispielsweise

$$(a \pm b)^4 = 1 \cdot a^4 \pm 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 \pm 4 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4.$$

Beispiel 1.3. Rechnen mit Potenzen

1. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
2. $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$
3. $3^0 = 1$
4. $a^2 + 2a^2 + 3b^2 = 3a^2 + 3b^2 = 3(a^2 + b^2)$
5. $a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot b^4 - a^2 \cdot a^{-2} = (ab)^2 + b^6 - 1$
6. $a^n \cdot a^n = a^{n+n} = a^{2n} = (a^n)^2 = (a^2)^n$

Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung!

$$ab^n = a \cdot (b^n), \qquad -a^n = -(a^n)$$

Häufig treten Fehler beim Potenzieren von negativen Zahlen auf. Beachte daher $-2^4 \neq (-2)^4$, denn es gilt $-2^4 = -(2^4) = -16$ aber $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.

Potenzen (mit negativer Basis und) geradem Exponenten sind immer positiv!
Beispiel: $(-2)^4 = +16$
Potenzen mit negativer Basis und ungeradem Exponenten sind immer negativ!
Beispiel: $(-2)^3 = -8$

1.3 Wurzeln

Die Umkehroperation des Potenzierens ist das *Radizieren* (*Wurzelziehen*). Der Ausdruck

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \qquad a \geq 0, n \neq 0$$

wird n–te *Wurzel* aus a genannt. Es gilt $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$. Die Zahl a heißt hierbei *Radikand*, die Zahl n ist der *Wurzelexponent*.

Konventionen:

$$\sqrt{a} := \sqrt[2]{a} \qquad \sqrt[n]{0} = 0$$

Wurzelgesetze für $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b > 0$ gilt:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b^{n-m}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Jede Wurzel lässt sich auch als Potenz schreiben:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

für $a \geq 0$, $n \neq 0$. Eine Wurzel ist daher nichts anderes als eine Potenz mit rationalem Exponenten. Die Wurzelgesetze sind aus den Potenzgesetzen herleitbar.

Fehlerwarnung: Summe und Produkt von Wurzeln
Sind Wurzelexponent und Radikand verschieden, so lässt sich der Ausdruck nicht zusammenfassen. Summen und Differenzen lassen sich auch bei Wurzeln nur zusammenfassen, wenn Radikand und Wurzelexponent beide übereinstimmen ($a, b, c, d \geq 0$). Im Allgemeinen gilt:

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b} \qquad \sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{a} \neq \sqrt[n+m]{a}$$
$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[mn]{ab} \qquad c \cdot \sqrt[n]{a} + d \cdot \sqrt[n]{a} = (c+d) \cdot \sqrt[n]{a}$$

Zahlen unter die Wurzel bringen oder herausziehen:
Allgemein gilt für $a, b > 0$:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}$$

Beispiel 1.4. Rechnen mit Wurzeln

1. $\sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}, \qquad x \geq 0$
2. $\sqrt[3]{27} = 3$
3. $\sqrt[5]{a^5 + b^5} \cdot \sqrt[5]{c} = \sqrt[5]{(a^5 + b^5) \cdot c}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$
4. $5 \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{5^3 y^2} = \sqrt[3]{125 y^2}, \qquad y \in \mathbb{R}$
5. $2\sqrt[4]{3} + 5\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2^3 - 5} = (2+5)\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{8-5} = 7\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = 6\sqrt[4]{3}$
6. $a^{0,5} \cdot a^{0,8} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{a^{13}} = a \sqrt[10]{a^3}, \qquad a \geq 0$

Beim Rechnen mit Wurzeln empfiehlt es sich aus Gründen der Genauigkeit und Übersichtlichkeit, diese nicht in Dezimalbrüche umzuwandeln, sondern möglichst lange als Wurzeln zu schreiben.

1.4 Logarithmen

Will man den Exponenten c einer Potenz $b = a^c$ über die *Basis* a ausdrücken, so geschieht dies über den *Logarithmus*

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b \tag{1.4.1}$$

(gesprochen: "c ist der Logarithmus von b zur Basis a"). Die Variable c ist also die Zahl, mit der a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Logarithmen sind nur definiert für $a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$.

Logarithmengesetze mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $r \in \mathbb{R}$ und $x, y > 0$:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \tag{1.4.2}$$
$$\log_a({}^x\!/\!_y) = \log_a x - \log_a y \tag{1.4.3}$$
$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x \tag{1.4.4}$$

Folgerungen aus den Potenzgesetzen:

$$\log_a a := 1, \qquad \text{denn } a^1 = a \tag{1.4.5}$$
$$\log_a 1 := 0, \qquad \text{denn } a^0 = 1 \tag{1.4.6}$$
$$a^{\log_a b} = b. \tag{1.4.7}$$

Der Ausdruck $\log_a 0$ ist nicht definiert, denn $a^c = 0$ ist für $a \neq 0$ mit keinem c zu erreichen und für $a = 0$ kann c beliebig gewählt werden, ist also nicht eindeutig bestimmt.

Spezielle Logarithmen: Ihrer Häufigkeit und Wichtigkeit entsprechend gibt es für Logarithmen zu den Basen 2, 10 und e (*Euler*'sche Zahl) spezielle Namen (vgl. Abschnitt 2.3.6, Abb. 2.14).

$\mathrm{ld} x := \log_2 x$	Basis $a = 2$, *binärer Logarithmus*
$\lg x := \log_{10} x$	Basis $a = 10$, *dekadischer Logarithmus*
$\ln x := \log_{\mathrm{e}} x$	Basis $a = \mathrm{e}$, *natürlicher Logarithmus*

Die Euler'sche Zahl e ist eine mathematische Konstante mit dem Wert 2,718 281 828 459 045 235...

Um den Logarithmus einer Zahl zu einer beliebigen Basis auszurechnen, kann die folgende Formel genutzt werden:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \tag{1.4.8}$$

Der Quotient zweier Logarithmen zur gleichen Basis a ist unabhängig von der gewählten Basis a.

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \frac{\ln b}{\ln c} = \frac{\lg b}{\lg c} \tag{1.4.9}$$

Weil die Logarithmen für die Basis $a = 10$ und $a = \mathrm{e}$ bekannt sind (aus Logarithmentabellen bzw. Taschenrechner), werden vorwiegend diese genutzt.

Beispiel 1.5. Logarithmieren einer Gleichung

$$\begin{aligned} 12^x &= 100 && \mid \text{Gl. (1.4.1)} \\ x &= \log_{12} 100 && \mid \text{Gl. (1.4.8)} \\ &= \frac{\ln 100}{\ln 12} \qquad = \frac{4,60517\ldots}{2,48490\ldots} \approx 1,8532 \end{aligned}$$

Wird stattdessen der dekadische Logarithmus verwendet, so entsteht natürlich das gleiche Ergebnis

$$x = \frac{\lg 100}{\lg 12} = \frac{2}{1,07918\ldots} \approx 1,8532.$$

Fehlerwarnung: Fehler durch falsches Kürzen beim Logarithmen:

$$\frac{\ln x}{\ln y} \neq \frac{x}{y} \qquad \text{oder gar} \qquad \frac{\ln x}{n} \neq lx$$

Weitere Fehlerquellen:

falsch: $\log_a(3a) \neq 3\log_a a = 3$

richtig: $\log_a(3a) \overset{(1.4.2)}{=} \log_a 3 + \log_a a \overset{(1.4.5)}{=} \log_a 3 + 1$

falsch: $(\ln x)^2 \neq 2\ln x$, denn $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2)$

richtig: $(\ln x)^2$ kann nicht weiter vereinfacht werden

falsch: $\dfrac{\ln 4}{\ln 2} \neq \ln 4 - \ln 2 = \ln(4/2) = \ln 2$

richtig: $\dfrac{\ln 4}{\ln 2} = \log_2 4 = 2$ (siehe Basiswechsel (1.4.8))

richtig: $\dfrac{\ln 4}{\ln 2} = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 2} = {}^2\!/\!_1 = 2$ (siehe Basiswechsel (1.4.9))

Beispiel 1.6. Rechnen mit Logarithmen

1. $\log_5 {}^1\!/\!_5 = \log_5\left(5^{-1}\right) \overset{(1.4.4)}{=} -1 \cdot \log_5 5 \overset{(1.4.5)}{=} -1 \cdot 1 = -1$
2. $\log_6\left(36^2\right) \overset{(1.2.1)}{=} \log_6(6^4) \overset{(1.4.4)}{=} 4 \cdot \log_6 6 \overset{(1.4.5)}{=} 4 \cdot 1 = 4$
3. $\log_2 {}^1\!/\!_8 \overset{(1.2.8)}{=} \log_2\left(8^{-1}\right) = \log_2\left(2^{-3}\right) = -3 \cdot \log_2 2 \overset{(1.4.5)}{=} -3 \cdot 1 = -3$
4. $\log_a x^2 + \log_a x \overset{(1.4.4)}{=} 2\log_a x + \log_a x = 3\log_a x$
   oder: $\log_a x^2 + \log_a x \overset{(1.4.2)}{=} \log_a(x^2 \cdot x) = \log_a(x^3) = 3\log_a x$
5. $\ln \mathrm{e}^x \overset{(1.4.4)}{=} x \ln \mathrm{e} = x \cdot \log_{\mathrm{e}} \mathrm{e} \overset{(1.4.5)}{=} x \cdot 1 = x$
6. $\log_a\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right) \overset{(1.4.3)}{=} \log_a(n+1) - \log_a n^2 \overset{(1.4.4)}{=} \log_a(n+1) - 2\log_a n$
7. $\ln x + \lg x \overset{(1.4.8)}{=} \ln x + \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \ln x\left(1 + \dfrac{1}{\ln 10}\right)$

1.5 Trigonometrische Funktionen

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b sowie der Hypothenuse c und den Winkeln α und $\beta = 90° - \alpha$. Über die trigonometrischen Funktionen lassen sich die Zusammenhänge der Seitenverhältnisse mit den Winkeln darstellen, vgl. Abb. 1.1.

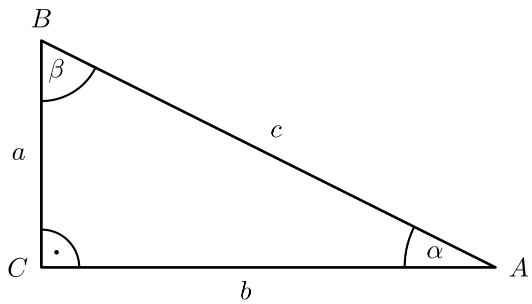


Abbildung 1.1: Katheten und Hypothenuse am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) := \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \tag{1.5.1}$$

$$\cos(\alpha) := \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \tag{1.5.2}$$

$$\tan(\alpha) := \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \tag{1.5.3}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c}, \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c}, \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$$

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang wird durch den Satz des Pythagoras beschrieben.

Satz des Pythagoras:
Die Summe der Quadrate der Katheten ist gleich dem Quadrat Hypothenuse.
Am Dreieck aus Abb. 1.1 bedeutet das

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.5.4}$$

Die trigonometrischen Funktionen sind 2π–periodisch, was leicht zu erkennen ist, wenn der Einheitskreis zu Hilfe genommen wird, vgl. Abb. 1.2. Das bedeutet, dass ein Winkel von 0 gleichbedeutend ist mit einem Winkel von $2\pi, 4\pi, \ldots$ oder $1/2\pi$ gleichbedeutend mit $5/2\pi, 9/2\pi, \ldots$.

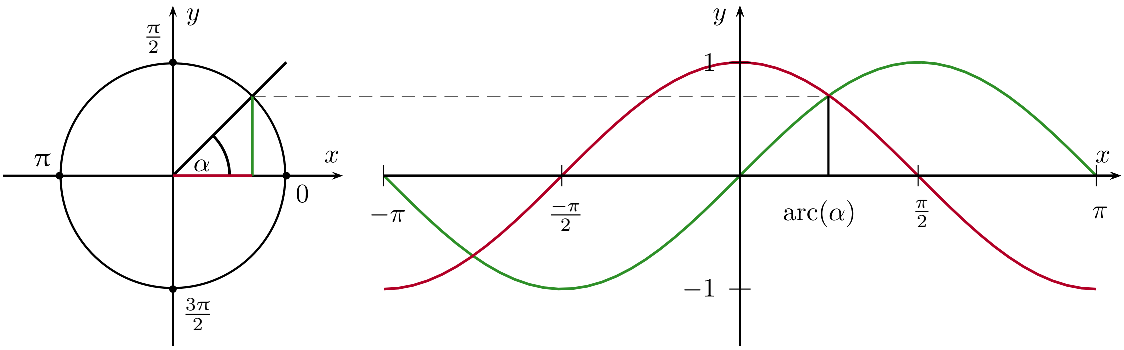


Abbildung 1.2: Verdeutlichung von Sinus und Kosinus am Einheitskreis. Die Beschriftungen in der linken Abbildung bezieht sich auf den zugehörigen Winkel, nicht auf die x, y–Koordinaten.

Die Hypothenuse des eingezeichneten Dreiecks in Abb. 1.2 beträgt $c = 1$, damit ergibt sich die Kreisgleichung

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad \text{bzw} \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Außerdem folgt mit Gl. (1.5.1) und (1.5.2) $a = \sin\alpha$ und $b = \cos\alpha$, also

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Tabelle 1.1: Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ($k \in \mathbb{Z}$)

Merkmal	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \pi/2 + k\pi$	$x \neq k\pi$
Wertebereich	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$
Minima	$3\pi/2 + 2k\pi$	$\pi + 2k\pi$		
Maxima	$\pi/2 + 2k\pi$	$2k\pi$		

Additionstheoreme:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

2 Funktionen

2.1 Definitionen und Darstellungen

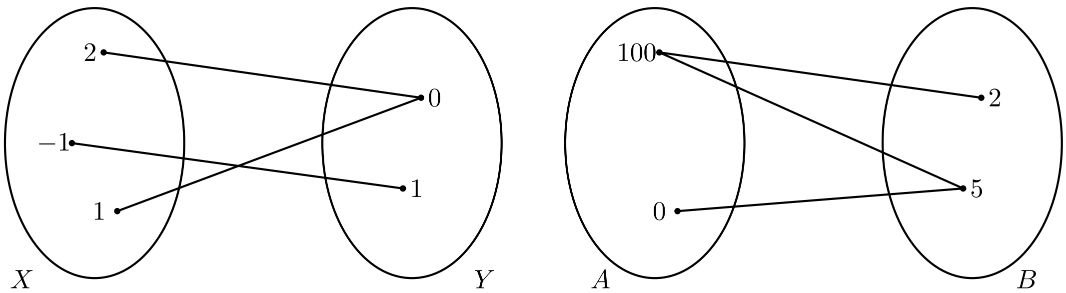
2.1.1 Definition

Eine *Funktion* f ist eine Zuordnung, die jedem Element x einer gegebenen Menge X (oft Zahlenmenge $X \subseteq \mathbb{R}$) ein eindeutiges Element y einer Menge Y (oft Zahlenmenge $Y \subseteq \mathbb{R}$) zuordnet.
Schreibweise: $y = f(x)$ oder $f : X \to Y$ oder manchmal auch $x \mapsto f(x)$. Man nennt $f(x)$ das *Bild* von x und umgekehrt x das *Urbild* von $f(x)$.

Beispiel 2.1.

1. $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1\}$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$
   Dies ist eine Funktion (vgl. Abb. 2.1a).

2. $A = \{0, 100\}$, $B = \{2, 5\}$, $g(0) = 5$, $g(100) = 2$, $g(100) = 5$
   Dies ist keine Funktion (vgl. Abb. 2.1b), da $x = 100$ nicht eindeutig ein y zugewiesen wird.



(a) Funktion f

(b) Abbildung g, keine Funktion

Abbildung 2.1: $f : X \to Y$ ist eine Funktion und $g : A \to B$ ist keine Funktion

Die Menge X heißt *Urbildmenge*, *Definitionsmenge* oder *Definitionsbereich*. Die Menge Y, aus der Bilder stammen, heißt *Wertemenge* oder *Wertebereich*. Die Menge der Bilder (also alle y–Werte zusammen) heißt *Bildmenge*, bezeichnet mit $f(X)$.

Beispiel 2.2. Für die quadratische Funktion $y = x^2$ (siehe Abb. 2.2) ist der maximale Definitionsbereich $X = \mathbb{R}$ und die Wertemenge ist $Y = \mathbb{R}_+$.

Die Bildmenge $f(X)$ ist eine Teilmenge des Wertebereichs Y, und Y ist eine Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, d. h. $f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt A.1).

Eine Funktionsbeschreibung besteht aus drei Teilen: der Zuordnungsvorschrift f, dem Definitionsbereich X und dem Wertebereich Y.

Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sowohl die Zuordnungsvorschriften, die Definitionsbereiche als auch die Wertebereiche übereinstimmen.
Allgemeiner können Funktionen auch als eine Zuordnung zwischen beliebigen Mengen (also nicht eingeschränkt auf Zahlenmengen) definiert werden.

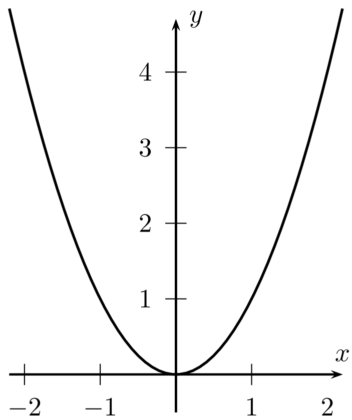


Abbildung 2.2: quadratische Funktion $f(x) = x^2$

Die Zuordnungsvorschrift für eine Funktion ist im Regelfall eine Gleichung, die sogenannte Funktionsgleichung $y = f(x)$ („y gleich f von x"). Dabei heißt x *unabhängige Variable* oder *das Argument der Funktion* f und y *abhängige Variable* oder *Funktionswert* der Funktion f an der Stelle x.
Die Form $y = f(x)$ heißt *explizite Darstellung der Funktionsgleichung*. Die Schreibweise $y = f(x)$ oder $f : X \to Y$ für eine Funktion bedeutet, dass f eine Funktion ist, die von ihrem Definitionsbereich X in den Wertebereich Y gemäß der Funktionsgleichung $y = f(x)$ abbildet.

2.1.2 Darstellung

Funktionen können durch Schaubilder (Graphen) oder Wertepaare (Wertetabelle) dargestellt werden. Dabei stellt die Wertetabelle keine eindeutige oder vollständige Umschreibung dar. *Der Graph* einer Funktion f mit dem Definitionsbereich X ist die Menge der geordneten Zahlenpaare

$$\Gamma_f = \{(x, y) \,|\, y = f(x), x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Geordnet bedeutet, dass in $(x, y) = (x, f(x))$ die Reihenfolge von x und y wichtig ist: (x, y) ist im Allgemeinen nicht gleich (y, x).

In einem kartesischen, 2–dimensionalen Koordinatensystem ist die waagerechte Achse die x–Achse oder *Abszissenachse*, die senkrechte Achse ist die y–Achse oder *Ordinatenachse*. Die Zahl x ist die *Abszisse* und y die *Ordinate* eines Punktes (x, y).
Auch mittels einer Wertetabelle kann eine Funktion dargestellt werden. In einer *Wertetabelle* werden für einige ausgewählte Argumente x die geordneten Zahlenpaare (x, y) für eine Funktion $y = f(x)$ eingetragen. Dabei müssen die ausgewählten Werte für x Elemente des Definitionsbereichs X der Funktion sein (in Zeichen: $x \in X$).
Eine *elementare Funktion* ist eine Funktion, deren Funktionsgleichung durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck dargestellt werden kann.
Elementare Funktionen sind durch Formeln definiert, die nur endlich viele mathematische Operationen mit der unabhängigen Variablen x und den Koeffizienten enthalten.

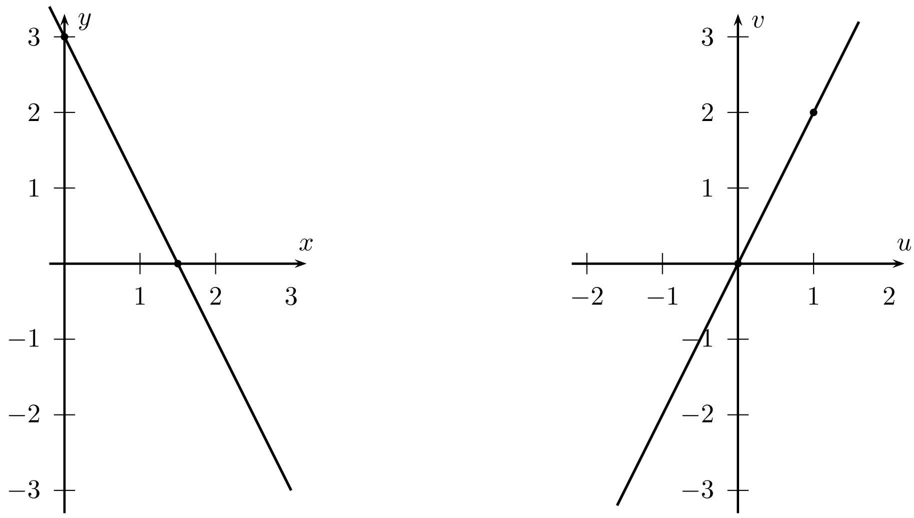
Beispiel 2.3. lineare Funktionen (vgl. Abschnitt 2.3.1):

1. $y = -2x + 3$, $X = Y = \mathbb{R}$ (vgl. Abb. 2.3b)
2. $v = 2u$, $X = Y = \mathbb{R}$ (vgl. Abb. 2.3a)

Wertetabellen:

x	$3/2$	0
y	0	3

u	0	1
v	0	2



(a) monoton fallende Funktion $y = -2x + 3$ (b) monoton wachsende Funktion $v = 2u$

Abbildung 2.3: Graphen der linearen Funktion

Zum Zeichnen linearer Funktionen genügt es, die Funktionswerte von zwei Stellen zu berechnen.

Beispiel 2.4. $y = -^2/_x$, $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $Y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ (siehe Abb. 2.4 – blau und Abschnitt 2.3.5)
Wertetabelle:

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	$^1/_2$	1	2	-2	-1	$-^1/_2$

Beispiel 2.5. $y = \sqrt{x}$, $X = [0; +\infty)$, $Y = [0; +\infty)$ – Quadratwurzel
(siehe Abb. 2.4 – rot und Abschnitt 2.3.5)
Wertetabelle:

x	0	1	4
y	0	1	2

Beispiel 2.6. $y = x^2$, $X = \mathbb{R}$, $Y = [0; +\infty)$ – Quadratische Funktion (siehe Abb. 2.5a und Abschnitt 2.3.3)
Wertetabelle:

x	0	± 1	± 2
y	0	1	4

Beispiel 2.7. $y = ^2/_3 \cdot x^3$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ – Kubische Funktion (siehe Abb. 2.5b und Abschnitt 2.3.4)
Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

2.2 Eigenschaften von Funktionen

Eine ausführlichere Behandlung folgt im Abschnitt 6.3. Hier sollen nur ein paar grundlegende Begriffe erklärt werden, die im nächsten Abschnitt von Bedeutung sind.
Es sei $y = f(x)$. Die Stelle x_0 heißt die *Nullstelle der Funktion* $f(x)$, wenn $f(x_0) = 0$ gilt. Es kann mehr als eine Nullstelle geben.

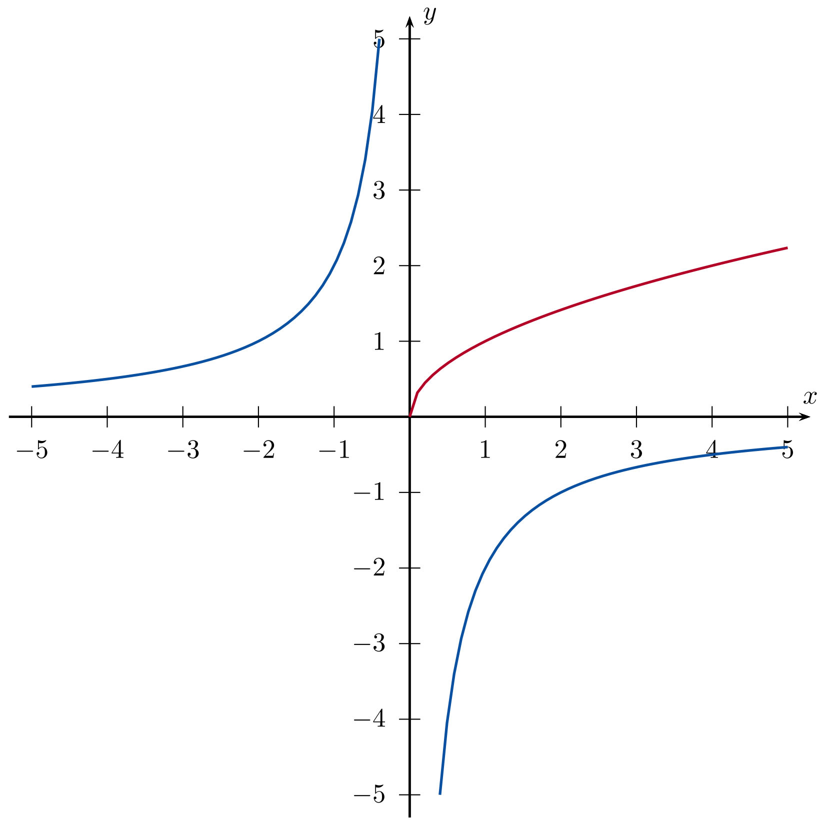


Abbildung 2.4: Hyperbelfunktion $-2/x$ (blau) und Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ (rot)

Die Nullstellen von f sind Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

Anschaulich sind die Nullstellen von $f(x)$ die Abszissen der Schnittpunkte des Graphen mit der x–Achse.

Eine Funktion f heißt in einem bestimmten Bereich $B \subseteq X$

monoton wachsend, falls

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in B$$

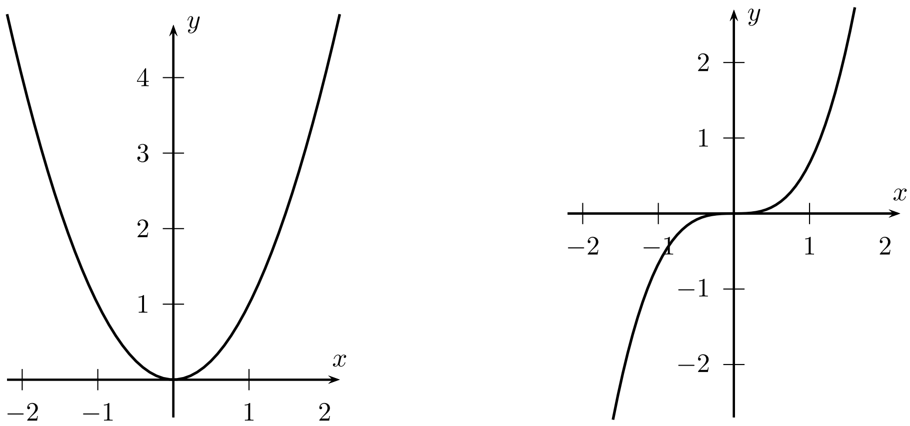
monoton fallend, falls

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad \forall x \in B$$

Eine Funktion heißt *streng monoton wachsend/ fallend*, falls $f(x_1) = f(x_2)$ ausgeschlossen wird (vgl. Abschnitt 5.1.5).

Beispiel 2.8. Im vorhergehenden Beispiel (siehe Abschnitt 2.1.2) wurden elementare Funktionen diskutiert. Jetzt kann bestimmt werden, welche Funktionen monoton fallend oder wachsend sind.

1. $f(u) = 2u$ ist streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$ (vgl. Bsp. 2)
2. $f(x) = -2x + 3$ ist streng monoton fallend in $\mathbb{R}$ (vgl. Bsp. 1)
3. $f(x) = -2/x$ ist streng monoton wachsend im Bereich $(-\infty; 0)$ und auch im Bereich $(0; +\infty)$ (vgl. Bsp. 2.4)
4. $f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton wachsend im Definitionsbereich $X = [0; +\infty)$ (vgl. Bsp. 2.5)



(a) quadratische Funktion $y = x^2$ (b) kubische Funktion $y = {}^2\!/\!_3 \cdot x^3$

Abbildung 2.5: Normalparabel und Parabel 3. Ordnung

5. $f(x) = x^2$ ist streng monoton fallend in $(-\infty; 0]$ und streng monoton wachsend in $[0; +\infty)$ (vgl. Bsp. 2.6)
6. $f(x) = {}^2\!/\!_3 \cdot x^3$ streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$ (vgl. Bsp. 2.7)

2.3 Spezielle Funktionstypen

2.3.1 Lineare Funktionen

Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung

$$f(x) = a + bx, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$$

ist eine *affin lineare Funktion* (ganzrationale Funktion *1. Grades*). Wenn $b = 0$, d. h. $f(x) = a$, ist die Funktion $f(x)$ unabhängig von x, $f(x)$ wird in diesem Fall eine *konstante Funktion* genannt (Abb. 2.6, blau).

Die konstante Funktion ist monoton wachsend und monoton fallend zugleich.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade (daher der Name „lineare Funktion"), und zwar die Gerade mit dem *Anstieg* (auch Höhenzuwachs oder Steigung) b und dem Achsenabschnitt a auf der Ordinatenachse.
Ist $a = 0$, so wird die lineare Funktion $y = bx$ auch *lineare Funktion* genannt. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit der Steigung b (Abb. 2.6 – rot). Der Parameter b wird auch *Proportionalitätsfaktor der Gleichung* genannt, denn es gilt $y = bx$, $b = {}^y\!/\!_x$ (vgl. Anstieg einer Funktion Abschnitt 6.2).
Für $b > 0$ ist die Funktion streng monoton wachsend (Abb. 2.6 – rot), für $b < 0$ ist sie streng monoton fallend (Abb. 2.6 – grün).
Den Schnittpunkt des Graphen der linearen Funktion mit der x–Achse (die *Nullstelle*) kann leicht gefunden werden: Dazu wird die Gleichung $a + bx_0 = 0$ nach x_0 aufgelöst. Addition von $-a$ auf und Division durch $b \neq 0$ auf beiden Seiten führt zu $x_0 = -{}^a\!/\!_b$. So konnte die Lösung x_0 dieser linearen Gleichung gefunden werden.
Der Schnittpunkt des Graphen der linearen Funktion mit der y–Achse ist a, vgl. Abb. 2.6. Bei dem roten Graph der Abbildung ist a gleich Null, im grünen Graph ist a negativ und im blauen ist a positiv.

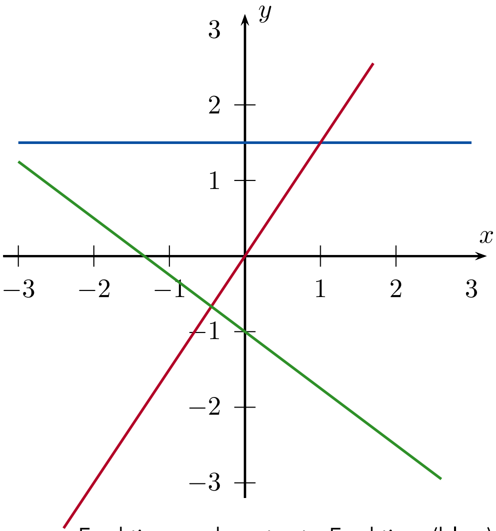


Abbildung 2.6: Monotonie linearer Funktionen: konstante Funktion (blau), monoton wachsende Funktion (rot), monoton fallende Funktion (grün)

2.3.2 Betragsfunktionen

In der Mathematik ordnet die *Betragsfunktion* einer reellen Zahl ihren Abstand zur Null zu. Dieser so genannte *absolute Betrag*, *Absolutwert* oder auch schlicht *Betrag* ist immer eine nichtnegative reelle Zahl. Der Betrag einer Zahl x wird mit $|x|$ bezeichnet. Für eine reelle Zahl x gilt:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Beispiel 2.9.

1. $|5| = 5$
2. $|-4| = 4$

Der Graph der Betragsfunktion $y = |x|$ ist in Abb. 2.7 dargestellt.

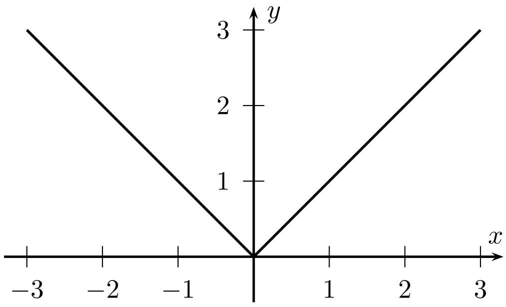


Abbildung 2.7: Betragsfunktion $y = |x|$

Beispiel 2.10. Die Funktion $f(x) = |x-3|$ gibt den Abstand von x zu 3 an.

2.3.3 Quadratische Funktionen

Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung in der Form

$$f(x) = a + bx + cx^2, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

heißt *quadratische Funktion* (ganzrationale Funktion 2. *Grades*).
Der Schnittpunkt mit der y–Achse kann direkt abgelesen werden, da $f(0) = a$ (vgl. Abb. 2.8, $f(0) = a = {}^6\!/\!_5$).

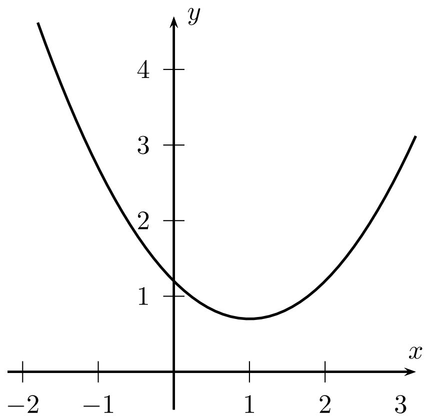


Abbildung 2.8: Quadratische Funktion $y = {}^1\!/\!_2 \cdot x^2 - x + {}^6\!/\!_5$

Die Nullstellen von $f(x)$ sind Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ (siehe Abschnitt 3.2).
Der Graph jeder quadratischen Funktion ist eine *Parabel* (Abb. 2.8). Parabeln besitzen einen tiefsten bzw. höchsten Punkt, den *Scheitel*

$$(u, v) = \left(-\frac{b}{2c}, f\left(-\frac{b}{2c}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2c}, a - \frac{b^2}{4c}\right).$$

Jede Funktion 2. Grades lässt sich mit Hilfe des Prinzips der quadratischen Ergänzung in die *Scheitelpunktform* umschreiben:

$$f(x) = c(x - u)^2 + v. \tag{2.3.2}$$

In dieser Darstellung kann man den Scheitel (u, v) direkt ablesen.
Durch die *quadratische Ergänzung* soll ein Ausdruck so erweitert werden, dass er einen Binom enthält. Dafür wird zuerst der Faktor c bzgl. quadratischen und linearen Gliedes ausgeklammert.

$$a + bx + cx^2 = c\left(x^2 + {}^b\!/\!_c \cdot x\right) + a$$

Anschließend wird zum Ausdruck innerhalb der Klammer ein Absolutglied (rot in Gl. (2.3.3)) addiert, sodass auf die Klammer eine binomische Formel angewandt werden kann (grün in Gl. (2.3.4)). Um den Wert des Gesamtausdrucks nicht zu verändern, muss dieses Absolutglied gleichzeitig wieder subtrahiert werden (blau in Gl. (2.3.3)). Insgesamt wird eine Null addiert.

$$c\left(x^2 + \frac{b}{c}x\right) + a = c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2\right) + a \tag{2.3.3}$$

$$= c\left(\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2\right) + a \tag{2.3.4}$$

$$= c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 - c\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + a \tag{2.3.5}$$

$$= c\left(\underbrace{x + \frac{b}{2c}}_{x-u}\right)^2 + \underbrace{\left(a - \frac{b^2}{4c}\right)}_{v} \tag{2.3.6}$$

Beispiel 2.11. Für die Funktion $y = {}^1\!/_2 \cdot x^2 - x + {}^6\!/_5$, vgl. Abb. 2.8, ist der Scheitel:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{b}{2c} = -\frac{1}{2 \cdot {}^1\!/_2} = -1 \\ v &= f(u) \\ &= {}^1\!/_2 \cdot (-1)^2 - (-1) + {}^6\!/_5 = {}^{27}\!/_{10} \end{aligned}$$

Der Faktor c steuert den Öffnungswinkel und die Öffnungsrichtung der Parabel. Durch Division durch $c \neq 0$ (weil wir sonst eine lineare Funktion haben), erhält man die sogenannte *Normalform* der quadratischen Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + px + q$ (mit $p = {}^b\!/_c$ und $q = {}^a\!/_c$).

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion in Normalform lassen sich mit Hilfe der Diskriminanten D bestimmen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ &= \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{D}\right), \qquad D = p^2 - 4q \end{aligned}$$

Für die Zahl der Lösunge gilt

- $D > 0$: zwei
- $D = 0$: genau eine
- $D < 0$: keine

Mit Hilfe des *Satzes von Vieta* lässt sich ein Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer quadratischen Funktion und den Parametern der Normalform herstellen.

Satz von Vieta:
Sind x_1 und x_2 die Nullstellen einer quadratischen Funktion $f(x)$, dann resultieren die Parameter der Normalform aus

$$p = -(x_1 + x_2), \qquad q = x_1 \cdot x_2.$$

Beispiel 2.12. $x_1 = 2$, $x_2 = 3 \Rightarrow p = -(2+3) = -5$, $q = 2 \cdot 3 = 6$
$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Mit den Koeffizienten $p = q = 0$ resultiert die Gleichung der Normalparabel ($f(x) = x^2$ Abb. 2.5a). Der Punkt $(0,0)$, also der Koordinatenursprung, ist der Scheitelpunkt der Normalparabel. Die Normalparabel ist symmetrisch zur y–Achse und nach oben geöffnet.

2.3.4 Kubische Funktion

Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}, d \neq 0$$

heißt *kubische Funktion* (ganzrationale Funktion *3. Grades*).
Der Graph jeder kubischen Funktion ist eine *kubische Parabel*. Die kubische Normalparabel $y = x^3$ ergibt sich mit den Koeffizienten $a = b = c = 0$, $d = 1$ (Abb. 2.9).
Abhängig von den Koeffizienten a, b, c, d gibt es einen, zwei (dann ist ein Schnittpunkt ein Berührungspunkt) oder drei Schnittpunkte mit der x–Achse. Der Schnittpunkt mit der y–Achse ist $(0, a)$.
Die kubische Normalparabel schneidet sowohl die x–Achse als auch die y–Achse im Ursprung.

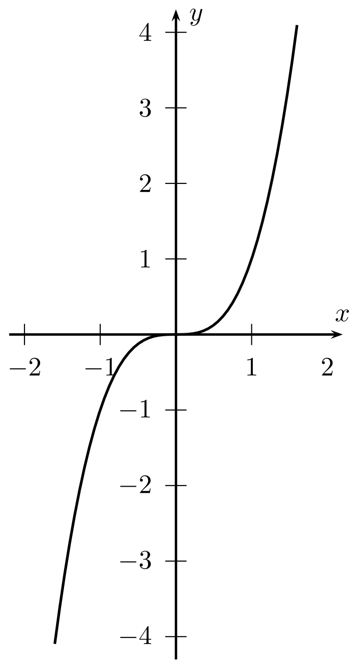


Abbildung 2.9: Kubische Normalparabel $y = x^3$

2.3.5 Potenz- und Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen

Funktionen mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{Q}$$

heißen *Potenzfunktionen*. Dabei ist n der Exponent oder auch *Grad der Potenzfunktion*. Meist wird für $n \in \mathbb{Z}$ von Potenzfunktionen und speziell für $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ von Wurzelfunktionen (siehe dazu Abschnitt 2.3.5) gesprochen. Bei Wurzelfunktionen ist jedoch zusätzlich $x \geq 0$ zu beachten.

Fall 1: Ganzzahlig positiver Exponent Der Graph einer Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wird *Parabel* n–ten Grades genannt.
In Abb. 2.10 ist erkennbar, dass der Graph einer Potenzfunktion mit geradem, positivem Exponenten ($n = 2, 4, 6, \ldots$) symmetrisch zur y–Achse ist, die Funktion ist *gerade*. Außerdem sind ale Funktionswerte nicht negativ. Bei ungeradem, positivem Exponenten ($n = 1, 3, 5, \ldots$) ist der zugehörige Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (vgl. Abb. 2.11), die Funktion ist daher *ungerade* (vgl. Abschnitt 6.3.4).

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x_0 = 0$ je nach Grad n der Potenzfunktion ist es eine n–fache Nullstelle

Monotonie:

- gerader Exponent: monoton fallend für $x \leq 0$, monoton wachsend für $x \geq 0$
- ungerader Exponent: monoton wachsend

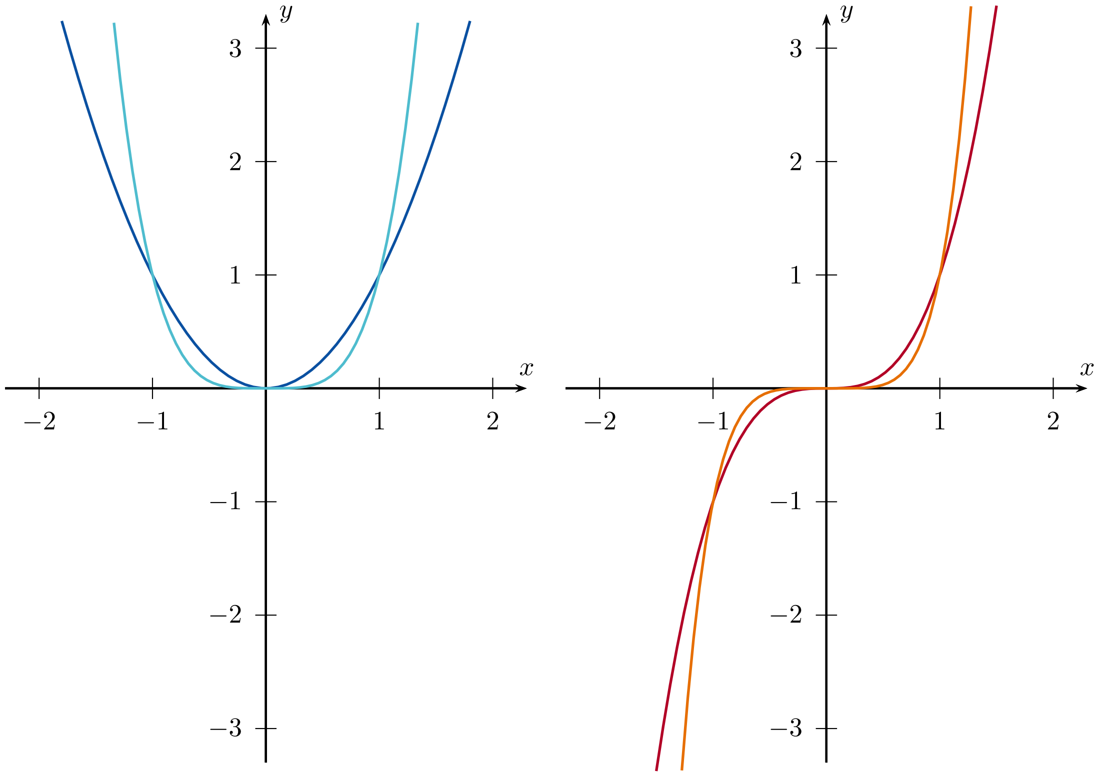


Abbildung 2.10: Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten n (blau – $n = 2$, cyan – $n = 4$, rot – $n = 3$, orange – $n = 5$)

Werden solche Potenzfunktionen durch Skalierung, Verschiebung entlang der Koordinatenachsen oder Verkettung untereinander transformiert, so entstehen beispielsweise quadratische und kubsiche Funktionen (siehe dazu Abschnitt 2.3.3 und 2.3.4).

Fall 2: Ganzzahlig negativer Exponent $\quad n \in \mathbb{Z}$ und $n \leq -1$
Der Graph einer Potenzfunktion mit negativem, ganzem Exponenten n wird *Hyperbel* genannt. Er besteht immer aus zwei Teilen, den sogenannten Hyperbelästen. Anhand von Abb. 2.11 ist erkennbar, dass der Graph einer Potenzfunktion mit negativem geradem Exponent ($n = -2, -4, -6, \ldots$) symmetrisch bezüglich der y–Achse ist, die Funktion ist gerade. Bei negativem ungeradem Exponent ($n = -1, -3, -5, \ldots$) ist der zugehörige Funktionsgraph symmetrisch bezüglich der Geraden $y = -x$.

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen: keine

Monotonie:

- gerader Exponent: monoton wachsend für $x \leq 0$, monoton fallend für $x \geq 0$
- ungerader Exponent: monoton fallend auf $x < 0$ und $x > 0$

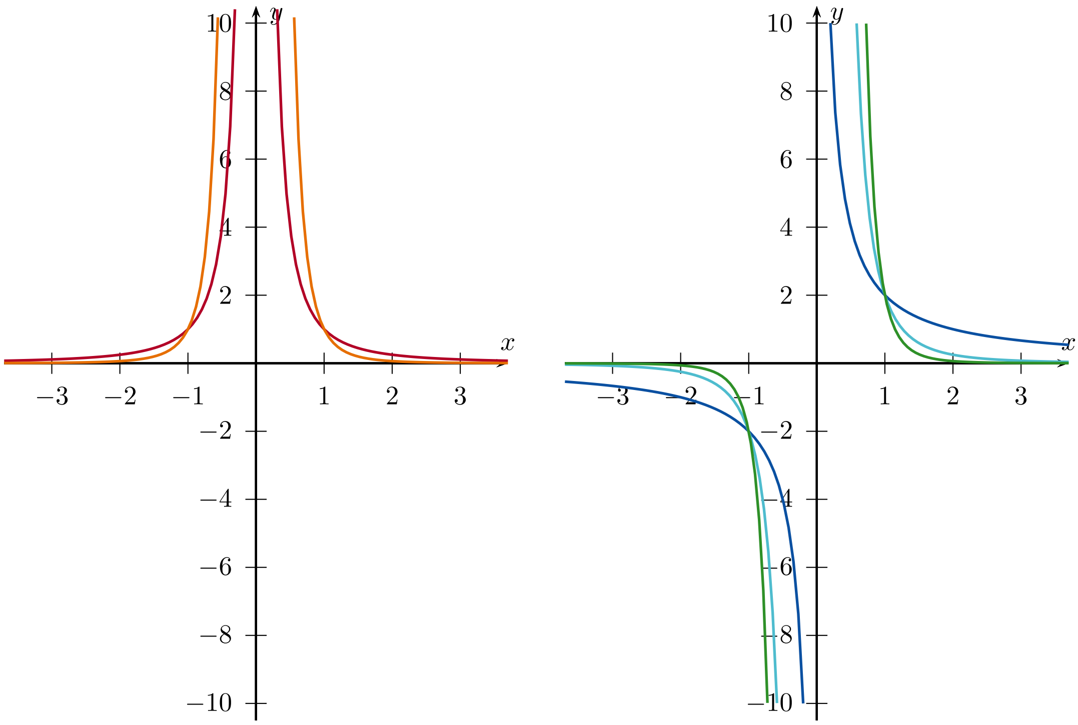


Abbildung 2.11: Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten n (blau – $n = -1$, cyan – $n = -3$, grün – $n = -5$, rot – $n = -2$, orange – $n = -4$)

Wurzelfunktionen

Potenzfuntkionen mit gebrochenem Exponenten $n = {}^{p}/_{q}$, wobei $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teilerfremd sind, werden Wurzelfunktionen genannt. Die einfachste *Wurzelfunktion* ist dabei

$$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0,$$

vgl. Abschnitt 1.3 und Abb. 2.12.

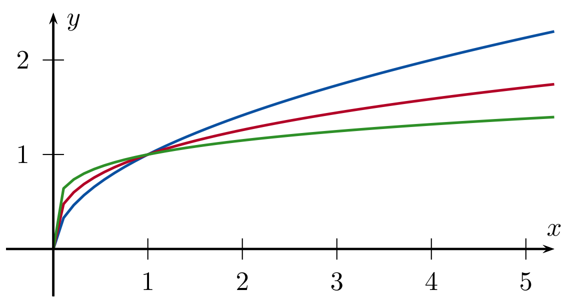


Abbildung 2.12: Wurzelfunktionen (blau – zweite Wurzel, rot – dritte Wurzel, grünen – fünfte Wurzel

Eigenschaften der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$:

Definitionsbereich: $D_f = [0, +\infty)$

Nullstellen: $x_0 = 0$

Monotonie: monoton wachsend

Krümmung: konkav

2.3.6 Exponential- und Logarithmusfunktion

Exponentialfunktion

Funktionen mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = a^x, \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

heißen *Exponentialfunktionen*. Im Gegensatz zu den Potenzfunktionen befindet sich die Variable x im Exponenten und nicht in der Basis.

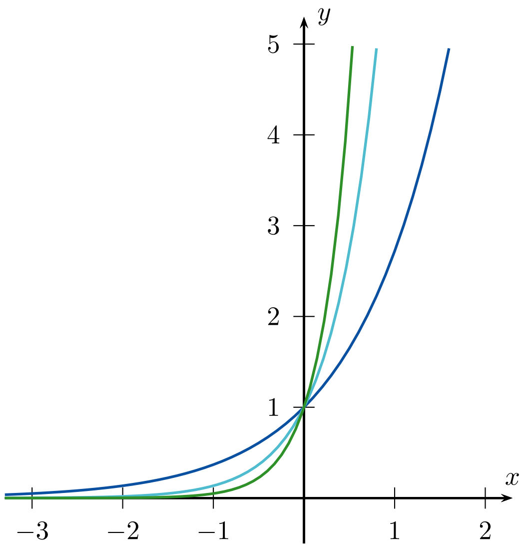
Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$

Nullstellen: keine

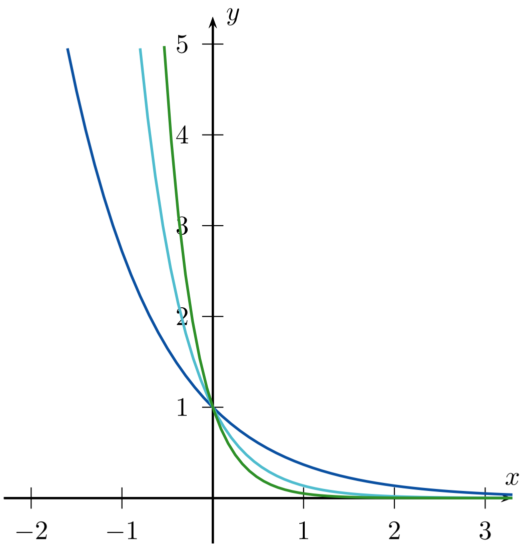
Monotonie: für $0 < a < 1$ monoton fallend, für $a > 1$ monoton wachsend

Krümmung: konvex, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Schnittpunkt mit y–Achse: immer $(0; 1)$, denn $a^0 = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$



(a) Exponentialfunktion, positiver Exponent n



(b) Exponentialfunktion, negativer Exponent $-n$

Abbildung 2.13: Beispiele für Exponentialfunktionen (blau – $n = 1$, cyan – $n = 2$, grün – $n = 3$)

Spezialfall der Exponentialfunktionen ist die natürliche Exponentialfunktion mit der *Euler'schen Zahl* e (vgl. Abschnitt 1.4):

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Häufig bezeichnet man diese Funktion auch schlichtweg als *Exponentialfunktion* oder kurz *e–Funktion*.

Fehlerwarnung: Am PC oder Taschenrechner wird das Symbol e manchmal für die Exponentialdarstellung von Zehnerpotenzen genutzt. Dies kann zu Missverständnissen führen.

Logarithmusfunktionen

Funktionen mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = \log_a x, \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

heißen *Logarithmusfunktionen* mit der *Basis* a (vgl. Abschnitt 1.4).

Definitionsbereich: $D_f = (0; +\infty)$

Nullstellen: $x_0 = 1$ für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$

Monotonie: für $0 < a < 1$ monoton fallend, für $a > 1$ monoton wachsend

Krümmung: für $a > 1$ konkav, für $0 < a < 1$ konvex

In Abb. 2.14 ist die asymptotische Annäherung an die y–Achse für x gegen Null erkennbar (vgl. Grenzwerte, Abschnitt 6.1.1).

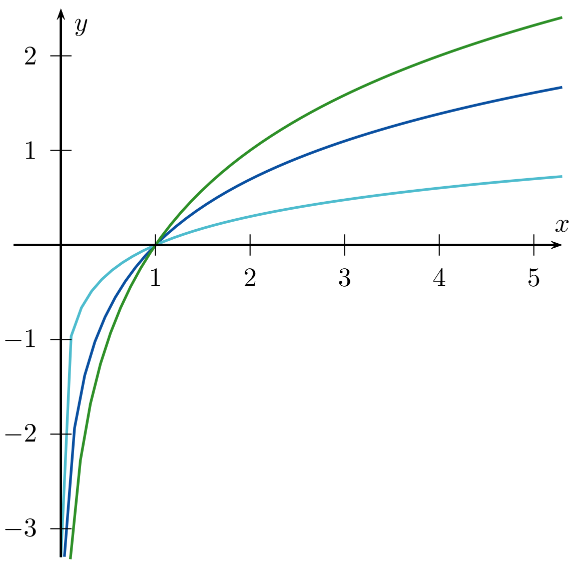


Abbildung 2.14: Logarithmusfunktionen mit verschiedenen Basen b (blau – $b = \mathrm{e}$, cyan – $b = 10$, grün – $b = 2$)

2.4 Graphentransformation

Betrachten wir jetzt verschiedene Möglichkeiten eine Funktion $f(x)$ zu modifizieren.

2.4.1 Verschiebung

Horizontalverschiebung

$$\tilde{f}(x) = f(x + a)$$

Verschiebung entlang der x–Achse um a, Änderung des Definitionsbereichs: $\tilde{X} = X + a$, keine Änderung des Wertebereichs.

- nach rechts, falls $a < 0$
- nach links, falls $a > 0$

Beispiel 2.13. Die Funktion $f(x) = 2x^2$ wird in $\tilde{f}(x) = f(x-3) = 2(x-3)^2$ transformiert. Der Parameter $a = -3$ ist negativ, Verschiebung des Graphen nach rechts (Abb. 2.15, blau).

Vertikalverschiebung

$$\tilde{f}(x) = f(x) + b$$

Verschiebung entlang der y–Achse um b, Änderung des Wertebereichs: $\tilde{Y} = Y + b$.

- nach oben, falls $b > 0$
- nach unten, falls $b < 0$

Beispiel 2.14. Die Funktion $f(x) = 2 \cdot x^2$ wird in die Funktion $\tilde{f}(x) = f(x) - 2 = 2 \cdot x^2 - 2$ transformiert. Der Parameter $b = -2$ ist negativ, Verschiebung des Graphen nach unten (Abb. 2.15, rot).

Beispiel 2.15. Die Funktion $f(x) = 2x^2$ wird in die Funktion $\tilde{\tilde{f}}(x) = f(x+1) - 3 = 2(x+1)^2 - 3$ transformiert.

Schritt 1: $\tilde{f}(x) = f(x+1) = 2(x+1)^2$: $a = 1$ ist positiv, Verschiebung des Graphen nach links

Schritt 2: $\tilde{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}(x) - 3 = 2(x+1)^2 - 3$: $b = -3$ ist negativ, Verschiebung des Graphen nach oben (Abb. 2.15, grün).

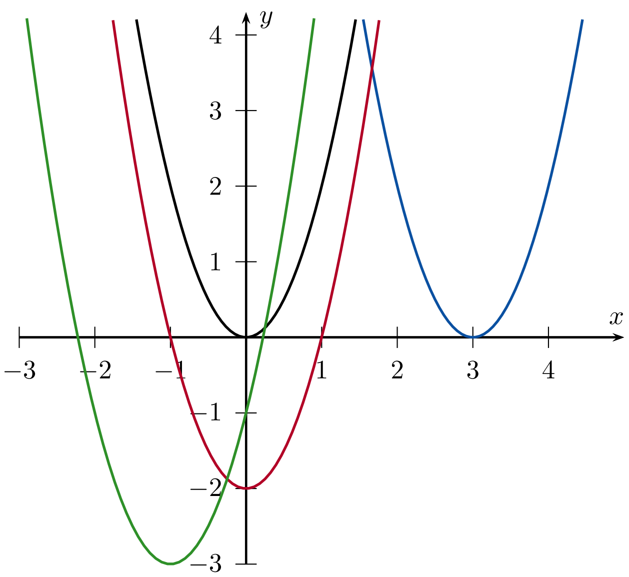


Abbildung 2.15: verschiedene Verschiebungen der Funktion $y = 2x^2$ (schwarz – Ausgangsfunktion, blau – Horizontalverschiebung um $a = 3$, rot – Vertikalverschiebung um $b = -2$, grün – Horizontal- und Vertikalverschiebung um $a = -1$ und $b = -3$)

2.4.2 Multiplikation mit einer Zahl

Dehnen entlang der y–Achse

$$\tilde{f}(x) = c \cdot f(x)$$

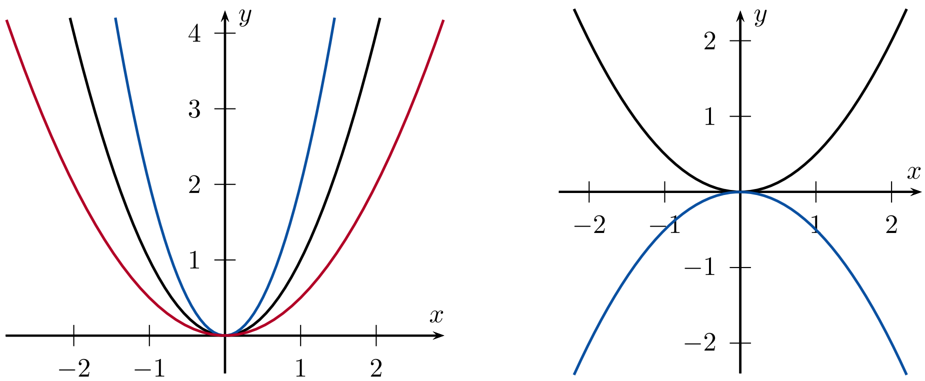
- Strecken um den Faktor c, falls $c > 1$
- Stauchen um den Faktor c, falls $0 < c < 1$

Dehnen des Graphen entlang der y–Achse, Änderung des Wertebereichs: $\tilde{Y} = c \cdot Y$.
Spezialfall: Spiegelung an der x–Achse, falls $c = -1$. Der Graph wird nach unten geklappt.

Beispiel 2.16.

1. $f(x) = x^2$:
   Transformation in $\tilde{f}_1(x) = 1/2 \cdot f(x) = 1/2 \cdot x^2$. Wegen $c_1 = 1/2 \in (0, 1)$ Stauchen des Graphen (Abb. 2.16a – rot).
   Transformation in $\tilde{f}_2(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$. Wegen $c_2 = 2 > 1$ Strecken des Graphen (Abb. 2.16a – blau).

2. $f(x) = x^2$: Transformation in $\tilde{f}(x) = -f(x) = -x^2$ (Abb. 2.16b).



(a) Stauchen (rot) und Strecken (blau) von $f(x) = x^2$ (schwarz)

(b) Spiegelung (blau) von $f(x) = 1/2 \cdot x^2$ (schwarz)

Abbildung 2.16: Stauchen, Strecken, Spiegeln von Funktionen

Dehnen entlang der x–Achse

$$\tilde{f}(x) = f(dx)$$

- Stauchen um den Faktor d, falls $d > 1$
- Strecken um den Faktor d, falls $0 < d < 1$

Dehnen entlang der x–Achse, Änderung des Definitionsbereichs: $\tilde{X} = 1/d \cdot X$.
Spezialfall: Spiegelung, falls $d = -1$ (Symmetrie bzgl. x–Achse).

Beispiel 2.17.

1. $f(x) = x^2$:
   Transformation in $\tilde{f}_1(x) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$. Wegen $d_1 > 1$ Stauchen des Graphen.
   Transformation in $\tilde{f}_2(x) = f(1/2 \cdot x) = (1/2 \cdot x)^2 = 1/4 \cdot x^2$. Wegen $0 < d_2 < 1$ Strecken des Graphen.

2. $f(x) = x^2$: Transformation in $\tilde{f}(x) = f(-x) = x^2$, Spiegelung (Abb. 2.16b).
   Es gilt: $\tilde{f}(x) = f(x)$!

Um den Unterschied zwischen Vervielfachung des Argumentes und Vervielfachung der Funktionen deutlicher zu erkennen, werden folgende Beispiele betrachtet.

Beispiel 2.18. Sei $f(x) = \sin(x)$ die Ausgangsfunktion.

1. Transformation in $f_1(x) = 2f(x) = 2\sin(x)$. Wegen $c > 1$ Strecken des Graphen entlang y–Achse (siehe Abb.2.17 – rot).
2. Transformation in $f_2(x) = 1/2 \cdot f(x) = 1/2 \cdot \sin(x)$. Wegen $0 < c < 1$ Stauchen des Graphen entlang y–Achse (siehe Abb. 2.17 – orange).
3. Transformation in $f_3(x) = f(2x) = \sin(2x)$. Wegen $d > 1$ Stauchen des Graphen entlang x–Achse. (siehe Abb. 2.17 – blau).
4. Transformation in $f_4(x) = f(1/2 \cdot x) = \sin(1/2 \cdot x)$. Wegen $0 < d < 1$ Strecken des Graphen entlang x–Achse. (siehe Abb. 2.17 – grün).

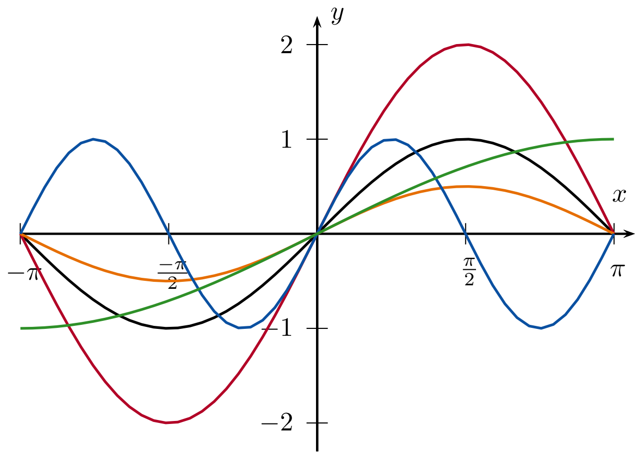


Abbildung 2.17: Stauchen und Strecken am Sinus (schwarz – $f(x) = \sin(x)$, rot – $f_1(x) = 2\sin(x)$, orange – $f_2(x) = 1/2 \cdot \sin(x)$, blau – $f_3(x) = \sin(2x)$, grün – $f_4(x) = \sin(1/2 \cdot x)$)

2.4.3 Betrag

Funktion eines Betrages

$$\tilde{f}(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

1. Auftragen der Funktion $f(x)$ (Ignorieren des Betrages) für $x \geq 0$
2. Spiegeln des Graphen an y–Achse

Beispiel 2.19. Die Funktion $f(x) = x + 1$ wird in die Funktion $\tilde{f}(x) = f(|x|) = |x| + 1$ transformiert (siehe Abb. 2.18 – blau).

Betrag einer Funktion

$$\tilde{f}(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

- Auftragen der Funktion $f(x)$ (Ignorieren des Betrages) für $f(x) \geq 0$
- Spiegeln des Graphen an x–Achse

Beispiel 2.20. Die Funktion $f(x) = x + 1$ wird in die Funktion $|f(x)| = |x + 1|$ bzw. $f(|x|) = |x + 1$ transformiert (siehe Abb. 2.18 – rot bzw. blau).

Beispiel 2.21. Die Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 1,5$ wird in die Funktion $|f(x)| = |x^2 + 2x - 1,5|$ bzw. $f(|x|) = |x|^2 + 2|x| - 1,5$ transformiert (siehe Abb. 2.19 – rot bzw. blau).

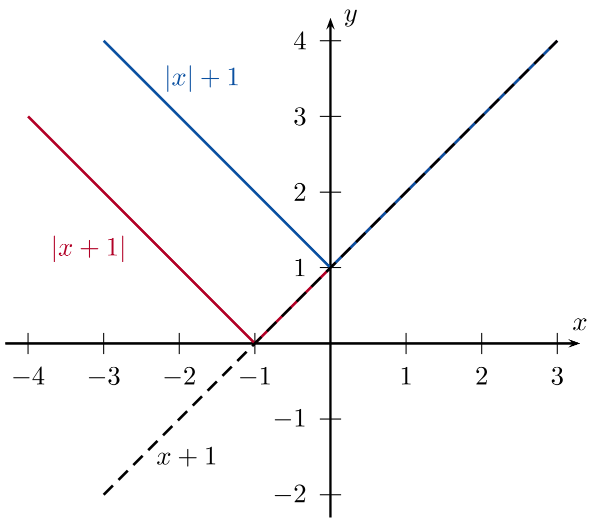


Abbildung 2.18: Beträge und Funktionen: dargestellt sind $f(x) = x+1$ (schwarz), sowie $f(|x|) = |x|+1$ (blau) und $|f(x)| = |x+1|$ (rot)

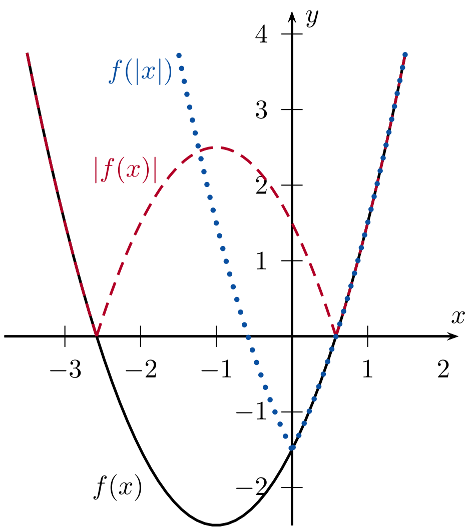


Abbildung 2.19: Beträge und Funktionen: dargestellt sind $f(x) = x + 1$ (schwarz), sowie $f(|x|) = |x|^2 + 2|x| - 1,5$ (blau) und $|f(x)| = |x^2 + 2x - 1,5|$ (rot)

3
Gleichungen, Ungleichungen und Systeme

3.1 Lineare Gleichungen, Ungleichungen und Systeme

3.1.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Eine *lineare Gleichung* oder *Gleichung 1. Grades* ist eine algebraische Gleichung, in der die Variable x in keiner höheren als der ersten Potenz verkommt. Die Gleichung

$$a + bx = 0, \qquad a \neq 0$$

heißt allgemeine Form der linearen Gleichung.
Lösungsschritte:

Schritt 1: Subtraktion von a

Schritt 2: Division durch $b \neq 0$

Für die Lösungsmenge gilt: $L = \{-{}^{b}/_{a}\}$.

Beispiel 3.1.

1. Lösen von $9x + 10 = 1$:
   (a) Addieren -10 auf beiden Seiten: $9x = -9$
   (b) Dividieren beider Seiten durch 9: $x = -1$
   (c) Lösungsmenge: $L = \{-1\}$.

2. Lösen von $(x + 4) \cdot 2 = 2(3x + 1)$:
   (a) Auflösen der Klammern: $2x + 8 = 6x + 2$
   (b) Zusammenfassen: $6 = 4x$
   (c) Dividieren beider Seiten durch 4: $x = {}^{6}/_{4} = {}^{3}/_{2}$
   (d) Lösungsmenge: $L = \{{}^{3}/_{2}\}$.

Grundsätzlich sollte eine Probe durchgeführt werden. Dabei ist jede Seite der Gleichung einzeln auszurechnen. Der berechnete Wert für x sollte stets in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden. Nach Einsetzen der Lösung sollen nicht die gleichen Umformungen wie bei der Hauptrechnung vorgenommen werden, da sonst leicht ein möglicher Fehler wiederholt werden kann.

Fehlerwarnung: Lösen von $2x = x$:
Dividieren durch x ist nur für $x \neq 0$ zulässig, Null ist aber hier gerde die Lösung. Richtig ist den Ausdruck zu $2x - x = 0$ zusammenzufassen und $x = 0$ als Lösung zu erhalten.

3.1.2 Lineare Ungleichungen mit einer Variablen

Eine Ungleichung zu lösen bedeutet, alle Werte der Variablen aus dem zugrunde liegenden Zahlenbereich zu bestimmen, für die die Ungleichung erfüllt ist.
Alle diese Werte heißen *Lösungen der Ungleichung* und alle Lösungen zusammen bilden die Lösungsmenge L der Ungleichung.
Eine lineare Ungleichung mit einer Variablen lässt sich durch äquivalente Umformungen stets in eine der folgenden vier Ungleichungen überführen. Zusätzlich sind die zugehörige Lösungsmenge angegeben (Subtraktion von a, Division durch $b > 0$):

$$\begin{aligned} a + bx < 0, &\qquad L = (-\infty, -{}^{a}/_{b}) \\ a + bx > 0, &\qquad L = (-{}^{a}/_{b}, \infty) \end{aligned}$$

Durch die Wahl von $\geq$ bzw. $\leq$ wird der Punkt $-a/b$ teil der Lösungsmenge.

Beispiel 3.2. Lösen von $-(2x+1) < 5$:

1. Auflösung der Klammer: $-2x - 1 < 5$
2. Zusammenfassen: $0 < 2x + 6$
3. Auflösen nach x: $-3 < x$
4. Lösungsmenge: $L = \{x \mid x > -3\} = (-\infty, -3)$.

Beispiel 3.3. Lösen von $3x + 4 \leq 5x$:

1. Zusammenfassen: $4 \leq 2x$
2. Auflösen nach x: $2 \leq x$
3. Lösungsmenge: $L = \{x \mid x \geq 2\} = [2, \infty)$.

Alternative Rechnung:

1. Zusammenfassen: $-2x \leq -4$
2. Auflösen nach x (Division durch negativ Zahl -2, dadurch Wechsel des Relationszeichens): $x \geq 2$
3. Lösungsmenge: $L = \{x \mid x \geq 2\} = [2, \infty)$.

3.1.3 Lineare Gleichungssysteme

Die Schwierigkeiten beim Bestimmen der Lösungen von Gleichungen werden noch größer, wenn nicht nur eine Variable aus einer Bestimmungsgleichung errechnet werden soll, sondern wenn mehrere Variable mehrere Gleichungen gleichzeitig erfüllen sollen.
Im Folgenden wird nur der Fall eines *Systems* von 2 Variablen und 2 Gleichungen betrachtet.

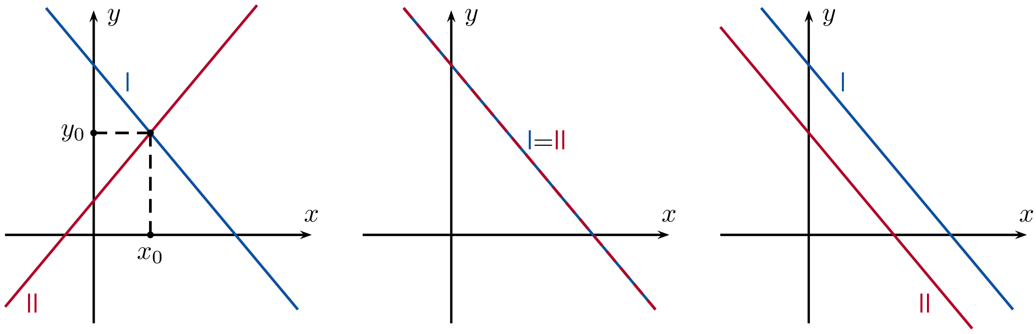
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Die Lösung eines solchen Gleichungssystems umfasst alle Werte, die für alle Gleichungen gleichzeitig eine Lösung darstellen. Sie besteht im Fall von zwei Gleichungen und zwei Variablen aus einer Menge von Wertepaaren.
Ein Gleichungssystem heißt *linear*, wenn alle Gleichungen des Systems lineare Gleichungen sind. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist durch die Koeffizienten der Variablen und durch die Absolutglieder (die Terme, die die Variablen nicht enthalten) bestimmt.
Für die Lösbarkeit eines LGS können drei Fälle auftreten (vgl. Abb. 3.1):

- das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung,
- das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung,
- das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Es gibt verschiedene Methoden, solche LGS zu lösen. Die einfachsten Verfahren sind das *Einsetzungsverfahren* (Substitutionverfahren), das *Additionsverfahren* und das *Gleichsetzungsverfahren*.

Beispiel 3.4. Gleichung I: $x - y = 0$ und Gleichung II: $2x + y = -2$, vgl. Abb. 3.2



(a) eindeutige Lösung (x_0, y_0) (b) unendlich viele Lösungen (c) keine Lösung

Abbildung 3.1: Graphen des Systems zweier linearer Funktionen

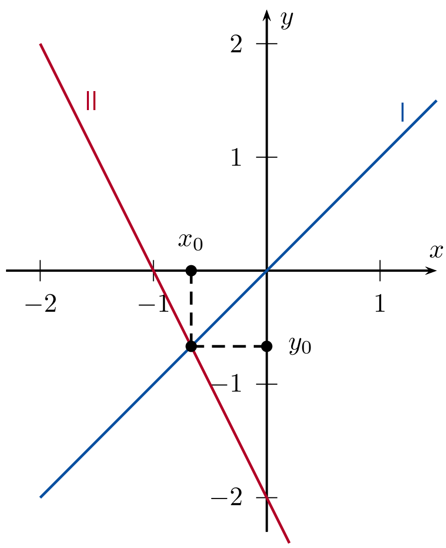


Abbildung 3.2: Lösungsskizze für das System I: $x - y = 0$, II: $2x + y = -2$

Einsetzungsverfahren

Eine der Gleichungen wird umgestellt, so dass eine der Variablen (z. B. y) einzeln auf einer Seite steht und durch die ander Variable beschrieben wird.
Nun wird die manipulierte Gleichung in die zweite eingesetzt. Gleichung zwei ist nun nur noch von einer Variablen abhängig und kann nach Umstellen wie gewohnt gelöst werden.
Die erhaltene Lösung für die zweite Variable wird nun in eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt. Es resultiert die zugehörige Lösung der ersten Variablen.

Beispiel 3.5. System aus Bsp. 3.4

- Umstellen von II nach y: $y = -2 - 2x$ (II′)
- Einsetzen von II′ in I: $0 = x - (-2 - 2x) = x + 2 + 2x = 3x + 2$ (I′)
- Lösen von I′: $x = -2/3$
- Einsetzen von x in I: $-2/3 - y = 0$ (I″)
- Lösen von I″: $y = -2/3$
- $L = \{-2/3, -2/3\}$

Additionsverfahren

Das Vielfache einer Gleichung wird auf die zweite Gleichung so aufaddiert, dass eine der Variablen eliminiert werden kann. Die resultierende Gleichung hängt also nur noch von einer Variablen ab und kann wie gewohnt gelöst werden. Die erhaltene Lösung wird in eine der Ursprungsgleichungen eingesetzt, es folgt die zugehörige Lösung für die zweite Variable.

Beispiel 3.6. System aus Bsp. 3.4

- II'= II $+ (-2) \cdot$ I: $(2x + y) + (-2) \cdot (x - y) = -2 + (-2) \cdot 0$
- Berechnen von II': $2x + y - 2x + 2y = 3y = -2$
- Lösung: $y = -2/3$
- Einsetzen in I: $x + 2/3 = 0$
- Lösung: $x = -2/3$
- $L = \{-2/3, -2/3\}$

Gleichsetzungsverfahren

Die Gleichungen werden so umgestellt, dass die rechten Seiten identisch sind und nur eine Variable enthalten. Das bedeutet, dass auch die linken Seiten identisch sein müssen. Diese werden gleich gesetzt und die resultierende Gleichung gelöst. Die Lösung wird in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt und diese gelöst.

Beispiel 3.7. System aus Bsp. 3.4

- Gleichung I$+y$: $y = x$ (I')
- Gleichung I$-2x$: $y = -2 - 2x$ (II')
- Gleichsetzen von I' und II': $x = -2x - 2$
- Umstellen: $3x = -2$
- Lösen: $x = -2/3$
- Einsetzen von x in II: $2 \cdot (-2/3) + y = -2$
- Lösen: $y = -2/3$
- $L = \{-2/3, -2/3\}$

3.1.4 Lineare Ungleichungssysteme

Als Erweiterung zu den linearen Ungleichungen mit einer Variable (Abschnitt 3.1.2) gibt es Systeme von linearen Ungleichungen mit mehreren Variablen, ähnlilch den LGS (Abschnitt 3.1.3). Diese Art von Systemen wird z. B. benötigt, um Definitionsbereiche zu bestimmen. Auch bei Optimierugnsproblemen spielen Ungleichungen eine wichtige Rolle.
Im folgenden werden nur die Systeme betrachtet, die aus zwei Ungleichungen bestehen und von zwei Variablen abhängen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x + a_{12}y & \leq & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & \leq & b_2 \end{array} \right. \tag{3.1.2}$$

Anstelle von $\leq$ können natürlich auch die Symbole $\geq$, $<$ bzw. $>$ platziert werden.
Eine graphische Lösung ist möglich, wenn statt der Ungleichungen die Gleichungen betrachtet und als lineare Funktionen aufgetragen werden. Jede solche Funktion teilt die Ebene in zwei Hälften, in der einen ist die Ungleichung erfüllt, in der anderen nicht. Zür Prüfung wird ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, in die Ungleichung eingesetzt und der Wahrheitswert geprüft. Zum Schluss wird der gültige Bereich markiert und vermerkt, ob die Geraden mit zur Lösungsmenge gehören, oder nicht.

Beispiel 3.8.

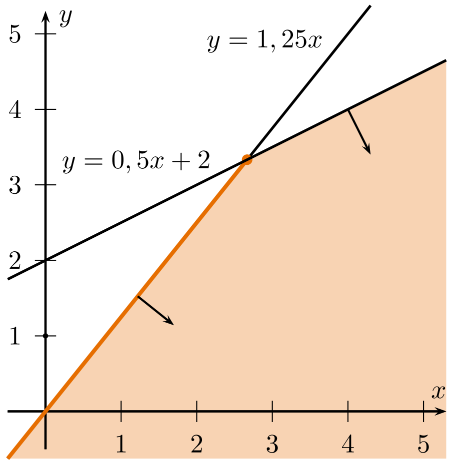
$$\begin{cases} -5x+4y & \leq & 0 \\ x-2y & > & -4 \end{cases}$$

System umgestellt nach y:

$$\begin{cases} y & \leq & 1,25x \\ y & < & 0,50x+2 \end{cases}$$

Zugehöriges LGS, umgestellt nach y:

$$\begin{cases} y & = & 1,25x \\ y & = & 0,50x+2 \end{cases}$$



Ein möglicher Punkt, der in beide Ungleichungen eingesetzt werden kann, ist $(0,1)$:

$$-5\cdot 0+4\cdot 1 \overset{?}{<} 0 \qquad\qquad 0-2\cdot 1 \overset{?}{>} -4$$

$$4 \overset{?}{<} 0 \quad \text{falsche Aussage} \qquad\qquad -2 \overset{?}{>} -4 \quad \text{wahre Aussage}$$

$$(0,1) \notin \text{Lösungsmenge} \qquad\qquad (0,1) \in \text{Lösungsmenge}$$

Die orange Fläche und der rote Rand bilden die Lösungsmenge.

3.2 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

3.2.1 Quadratische Gleichungen mit einer Variablen

vgl. Abschnitt 2.3.3.

3.2.2 Quadratische Ungleichungen mit einer Variablen

Im folgenden Abschnitt sollen Quadratische Ungleichungen der Form

$$f(x) = x^2 + px + q > 0 \tag{3.2.1}$$

gelöst werden. Dazu gehören natürlich auch alle Ungleichungen mit $<$, $\geq$ oder $\leq$ statt $>$.
Zunächst werden die Nullstellen x_1, x_2 von $f(x)$ bestimmt, vgl. Abschnitt 2.3.3. Anschließend wird eine von den Nullstellen unabhängige Stelle gewählt, diese wird in f eingesetzt und der Wahrheitswert der Ungleichung (3.2.1) geprüft. Die entstehende Lösungsmenge L ist ist abhängig vom Ungleichheitszeichen und der Wahl von p und q:

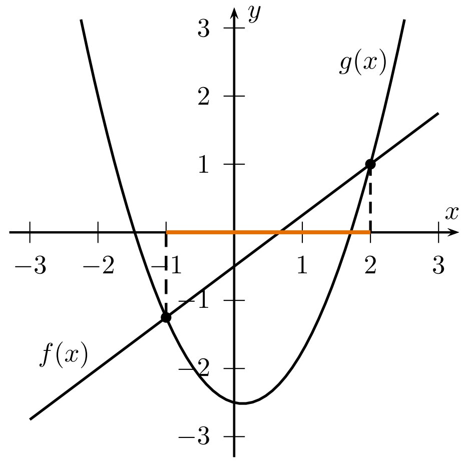
- für $D < 0$ (keine Lösung):
  - ganz $\mathbb{R}$ oder
  - die leere Menge,
- für $D = 0$ (genau eine Lösung x_1):
  - die Stelle x_1 oder
  - $\mathbb{R}\backslash\{x_1\}$,
- für $D > 0$ (zwei Lösungen x_1, x_2):
  - das Intervall zwischen den beiden Nullstellen (x_1, x_2) oder
  - der Bereich außerhalb der beiden Nullstellen $\mathbb{R}\backslash(x_1, x_2) = (-\infty, x_1] \cap [x_2, \infty)$.

Ähnliches gilt für Ungleichungen mit $\leq$ bzw. $\geq$ statt $<$ bzw. $>$. Bei Betrachtung der Lösung müssen hier offene und abgeschlossene Intervallgrenzen vertauscht werden.
Sollen die Schnittpunkte von zwei quadratischen Gleichungen bzw. von einer quadratischen Gleichung mit einer linearen bestimmt werden, werden diese gleich gesetzt. Durch Umformung wird eine neue (quadratische) Gleichung in Nullstellenform erzeugt und diese wie bisher gelöst.

Beispiel 3.9. Seien $f(x) = 0,75x - 0,5$ und $g(x) = x^2 - 0,25x - 2,5$. Es soll der Bereich bestimmt werden, in dem $g(x) \leq f(x)$ gilt (also auch $h(x) := g(x) - f(x) \leq 0$).

Nullstellen bestimmen:

$$
\begin{aligned}
0 &= h(x) = g(x) - f(x)\\
0 &= x^2 - 0,25x - 2,5 - (0,75x - 0,5)\\
0 &= x^2 - x - 2\\
D &= (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 > 0\\
x_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(-(-1) \pm \sqrt{9}\right)\\
&= \frac{1}{2}(1 \pm 3)\\
x_1 &= -1, \qquad x_2 = 2
\end{aligned}
$$



Test: $h(x_0 = 0) \geq 0$?

$$
\begin{aligned}
0^2 - 0 - 2 &\overset{?}{\leq} 0 \qquad \text{wahre Aussage}\\
L &= [-1, 2]
\end{aligned}
$$

3.3 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

3.3.1 Gleichungen mit Beträgen mit einer Variablen

Taucht in einer Gleichung ein oder mehr Beträge auf, ist es sinnvoll zunächst den Betrag allein auf eine Seite des Gleichheitszeichens zu bringen. Es ergibt sich die Form

$$|f(x)| = g(x). \tag{3.3.1}$$

Nun wird die Definition der Beträge Gl. (2.3.1) (Abschnitt 2.3.2) beansprucht. Es folgt

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{falls } f(x) < 0. \end{cases}$$

Es resultieren zwei Gleichungen mit einer Variablen und Nebenbedingungen. Diese sind unabhängig voneinander zu lösen. Falls die Nebenbedingungen erfüllt sind, ergibt die Vereinigung der Einzellösungen die Gesamtlösungsmenge L.

Beispiel 3.10. Es sei $|x + 2| - 3 = 4x$ gegeben und die Lösungemenge für x gesucht. Nach Addition von 3 folgt die Normalform (3.3.1) $|x + 2| = 4x + 3$

$$\begin{cases} 4x + 3 = x + 2, & \text{falls } x + 2 \geq 0 \\ 4x + 3 = -x - 2, & \text{falls } x + 2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = -1, & \text{falls } x \geq -2 \\ 5x = -5, & \text{falls } x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1/3, & \text{falls } x \geq -2 \quad \checkmark \\ x = -1, & \text{falls } x < -2 \quad \lightning \end{cases} \qquad L = \{-1/3\}$$

Beispiel 3.11. $|x-100| = -5$ ist unlösbar, da der Betrag stets nicht negativ ist. Es kann jedoch auch nachgerechnet werden.

$$-5 = |x-100| = \begin{cases} x-100, & \text{falls } x-100 \geq 0 \\ -x+100, & \text{falls } x-100 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -5 = x-100, & \text{falls } x \geq 100 \\ -5 = 100-x, & \text{falls } x < 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 95, & \text{falls } x \geq 100 \quad ↯ \\ x = 105, & \text{falls } x < 100 \quad ↯ \end{cases}$$

3.3.2 Ungleichungen mit Beträgen mit einer Variablen

Natürlich gibt es auch Ungleichungen mit Beträgen. Hier wird, wie bei den Gleichungen zuerst eine Normalform

$$|f(x)| < g(x)$$

erzeugt. Dabei muss natürlich gelten $g(x) \geq 0$. Diese wird ebenfalls mit Hilfe der Definition des Betrages aufgesplittet, dieses mal jedoch in zwei Ungleichungen. Diese werden wie in Abschnitt 3.1.2 gelöst und die Resultate mit den Nebenbedingungen abgeglichen.

4 Vektorrechnung

Das in Abbildung 4.1 dargestellte Fachwerk wird durch die Kräfte F_1, F_2 und F_3 in der angegebenen Weise belastet. Im Punkt A befindet sich das Festlager und in Punkt B das Gleitlager. Beim Aufbau des Fachwerks kommt es zu einer Ausgleichsbewegung, der Punkt B bewegt sich entlang der x–Achse, bis sich ein Gleichgewicht einstellt. Daher wirkt im Punkt B lediglich eine Kraft in y–Richtung. Wie groß sind die Auflagerkräfte F_{A} und F_{B} und deren Beträge $|F_{\mathrm{A}}|$ und $|F_{\mathrm{B}}|$ im statischen Gleichgewichtszustand?

$$a = 5\,\mathrm{m} \qquad b = 4\,\mathrm{m} \qquad \alpha = 30^\circ$$
$$|F_1| = 20\,\mathrm{kN} \qquad |F_2| = 30\,\mathrm{kN} \qquad |F_3| = 10\,\mathrm{kN}$$

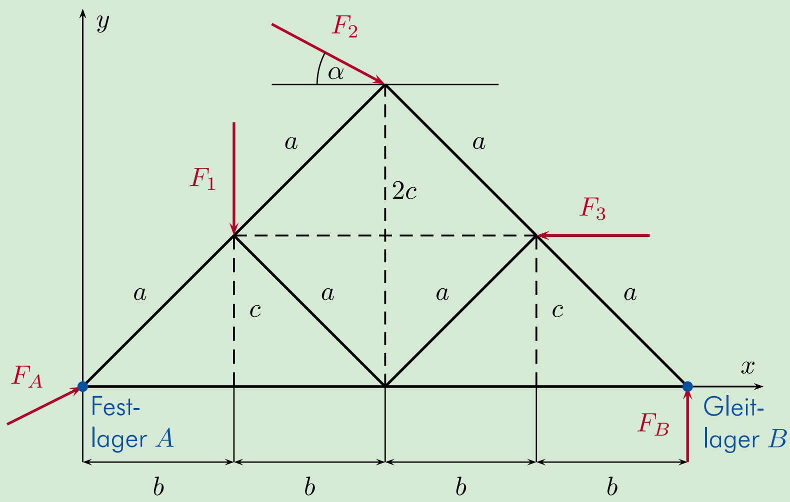


Abbildung 4.1: Kräfte am Fachwerk

4.1 Definition

Ein *Vektor*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

ist mathematisch gesehen ein *Tupel* von n reellen Zahlen $x_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \ldots, n$). In der Physik ist er eine Größe mit Betrag und Richtung. Der physikalische Vektor ist ein Spezialfall des mathematischen: es wird $n = 2$ oder $n = 3$ gewählt.

Wird eine Kraft ausgeübt, besitzt diese immer eine Richtung und einen Betrag. Damit kann sie als Vektor dargestellt werden.

Als Koordinatensystem wird meist das *kartesische* gewählt, bei dem alle Basisvektoren die Länge Eins besitzen und im rechten Winkel zueinander stehen

$$|x| = |y| = |z| = 1, \qquad x \perp y, \qquad x \perp z, \qquad y \perp z$$

Allgemein ist der Betrag eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ definiert als

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{4.1.1}$$

Unteschied zwischen Punkt und Vektor:
Obwohl die Schreibweisen von Punkt und Vektor identisch sind, haben sie unterschiedliche Bedeutungen. Ein Punkt markiert eine bestimmte Stelle im Raum. Ein Vektor hingegen gibt Richtung und Länge an.
Wird die Differenz von zwei Punkten gebildet, so ist das Resultat ein Vektor.

Rechenregeln

Das Fachwerk soll sich im Gleichgewicht befinden. Das bedeutet, dass sowohl die Summe der Kräfte als auch die Summe der Momente verschwinden müssen.
Um dies rechnerisch umsetzen zu können, muss die Summe von Vektoren definiert werden.

Mit Hilfe des *Kreuzproduktes* $x \times y$ (Gl. (4.1.5)) lässt sich ein Vektor z bestimmen, der senkrecht auf der Ebene steht, die von den Vektoren x und y aufgespannt wird. Der Betrag von z entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten x, y

$$|x \times y| = |x| \cdot |y| \cdot \sin\left(\angle\left(x, y\right)\right).$$

Das *Skalarprodukt* von zwei Vektoren x, y ist Null, wenn diese Senkrecht aufeinander stehen.

Rechnen mit Vekoren $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bzs. $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und dem Skalar $c \in \mathbb{R}$:

Addition:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

Multiplikation mit Skalar:

$$c \cdot x = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n \\ &= |x| \cdot |y| \cdot \cos\left(\angle\left(x, y\right)\right) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Kreuzprodukt

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

Cauchy–Schwarz–Ungleichung:

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y| \tag{4.1.6}$$

Bestimmung der Kraftvektoren:
Die Vektoren F_i wurden in Kilonewton (kN) gemessen. Die Maßeinheiten werden jedoch bei den folgenden Rechnungen nicht mit angegeben.
Die Vektoren F_1 und F_3 weisen entlang einer der ausgezeichneten Richtungen x, y, z des kartesischen Koordinatensystems, vgl. Abb. 4.1. Die Länge, also der Betrag, wird durch eine einzige Komponente realisiert. Zu beachten ist noch der Richtungssinn, der bei diesen Vektoren entgegen dem Koordinatensystem verläuft, daher das negative Vorzeichen.

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -|F_1| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad F_3 = \begin{pmatrix} -|F_3| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor F_2 besitzt Komponenten in die Richtungen x und y, um hier die Zahlenwerte bestimmen zu können, werden die trigonometrischen Funktionen (vgl. Abschnitt 1.5) benötigt

$$F_2 = \begin{pmatrix} |F_2| \cdot \cos\alpha \\ -|F_2| \cdot \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos(30°) \\ -30 \cdot \sin(30°) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie in Abb. 4.1 angedeutet, weist F_A in eine gemischt Richtung und F_B entlang einer ausgewiesenen Richtung

$$F_A = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad F_B = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichgewichtsbedingung (Kräfte):
Die Summe über alle wirkenden Kräfte muss Null ergeben.

$$\begin{aligned} F_A + F_B + F_1 + F_2 + F_3 &= 0 \\ \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} F_{Ax} + 16 \\ F_{Ay} + F_{By} - 35 \\ 0 \end{pmatrix} &\overset{(4.1)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Bestimmung der Drehomente:
Wirkt eine Kraft F auf einen Hebelarm der Länge r, dann ist das resuliterende Drehmoment

$$M_i = F_i \times r_i,$$

mit dem Kreuzprodukt „$\times$" (vgl. Gl. (4.1.5)). Die Maßeinheit der hier gemachten Angaben ist für r Meter (m) und für das Drehmoment Kilonewtonmeter (kNm).
Die Hebelarme r_i sind die Richtungsvektoren zwischen dem Drehzentrum A und den Ansatzpunkten der Kräfte F_B, F_1, F_2 bzw. F_3. Um diese zu bestimmen, wird die Länge c benötigt. Sie kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt werden (vgl. Abschnitt 1.5), beachte die unterschiedliche Beschriftung)

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = \pm 3$$

In diesem Fall wird nur die positive Lösung genutzt, da es sich bei c um einen Abstand handelt.

Die Vektoren r_i können durch Abgleich mit der Skizze (vgl. Abb. 4.1) erhalten werden.

$$r_1 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 2b \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$r_3 = \begin{pmatrix} 3b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r_B = \begin{pmatrix} 4b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Die zugehörigen Momente lauten also:

$$M_1 = r_1 \times F_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & - & 0 \cdot (-20) \\ 0 \cdot 0 & - & 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot (-20) & - & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix},$$
$$M_2 = r_2 \times F_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -276 \end{pmatrix},$$
$$M_3 = r_3 \times F_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix},$$
$$M_B = r_B \times F_B = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \cdot F_{By} \end{pmatrix}$$

Gleichgewichtsbedingung (Momente):
Die Summe über alle wirkenden Momente muss Null ergeben.

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_B = 0$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -276 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \cdot F_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -326 + 16 \cdot F_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.8}$$

Aus Gl. (4.1.7) und (4.1.8) resultieren die drei skalaren Bedingungen

$$\begin{aligned} F_{Ax} + 16 &= 0 \quad \Rightarrow & F_{Ax} &= -16 \\ F_{Ay} + F_{By} - 35 &= 0 & & \\ 16 \cdot F_{By} - 326 &= 0 \quad \Rightarrow & F_{By} &= 20,375 \\ F_{Ay} &= 35 - F_{By} & &= 14,625 \end{aligned}$$

Die Beträge der Auflagekräfte sind mit Gl. (4.1.1) bestimmbar

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2 + 0^2} = \sqrt{(-16)^2 + 14,625^2} = 21,68$$
$$F_B = \sqrt{0^2 + F_{By}^2 + 0^2} = F_{By} = 20,375.$$

4.2 Geradengleichungen

In Abb. 4.2 ist zu sehen, wie auf dem Dach eine Antenne am Punkt Q angebracht ist. Die Antenne weist 2,5 m senkrecht nach oben. Paralleles Licht (gelb) fällt in Richtung v auf die Antenne, sodass ein Schatten auf dem Dach erscheint.
Welche Koordinaten hat die Spitze des Antennenschattens S?

$$Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,5 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3,5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

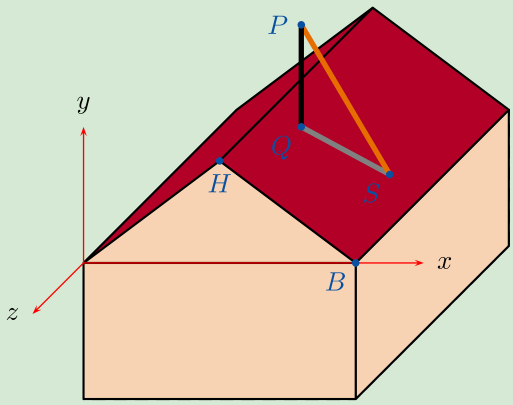


Abbildung 4.2: 3D–Ansicht des Hauses

Ziel ist es eine Geradengleichung g für den Lichstrahl zu finden, der die Antennenspitze streift. Außerdem muss eine Gleichung für die Dachebene E bestimmt und beide zum Schnitt miteinander gebracht werden.

Punktrichtungsform einer Geraden

Für die Punktrichtungsform einer Geraden g wird ein *Ortsvektor* p und ein *Richtungsvektor* v benötigt. Ein Ortsvektor entsteht bei Subtraktion von Null von einem festen Punkt P

$$p = P - 0.$$

Ausgehend vom Ortsvektor p wird eine Richtung v verfolgt und beim Durchlaufen des Parameters $t \in \mathbb{R}$ eine Gerade erzeugt.

$$g : x = p + t \cdot v, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.2.1}$$

Paramterform der Geraden:
Der Ortsvektor bezieht sich in dieser Aufgabe auf die Spitze der Antenne P:

$$P = Q + \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,5 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor lauter daher

$$p = P - 0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Es resultiert die Paramterform

$$g : x = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3,5 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

4.2.1 Zwei–Punkt–Form einer Geraden

Sind zwei Punkte P, Q gegeben, durch die die Gerde verlaufen soll, dann werden die beiden Ortsvektoren

$$p = P - 0, \qquad q = Q - 0$$

benötigt

$$g : x = p + t \cdot (q - p), \qquad t \in \mathbb{R}$$

4.2.2 Normalform einer Geraden

Die Normalform einer Geraden bzw. Ebene kann nur aufgestellt werden, wenn das Bezugssystem eine Dimension größer ist. Für Geraden bedeutet das ein 2–dimensionales und für Ebenen ein 3–dimensionales Koordinatensystem.

Für die Normalform einer Geraden g wird ein *Normalenvektor* n benötigt, dieser steht senkrecht auf g und hat eine beliebige Länge.
Im zweidimensionale Raum ist ein Normalenvektor n zum Vektor x:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad n = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$g : n \cdot (x - p) = 0, \qquad P \in g \tag{4.2.3}$$

Der Vektor p ist dabei ein beliebiger Punkt auf der Geraden.

4.2.3 Hesse'sche Normalform einer Geraden

Die Hesse'sche Normalform (HNF) ist ein Spezialfall der Normalform, bei der der Normalenvektor die Länge 1 besitzt ($|n| = 1$).
Schreibweise: n_0
Wurde bereits ein Normalenvektor n bestimmt, dann gilt für den Normaleneinheitsvektor

$$n_0 = \frac{n}{|n|}.$$

4.3 Ebenengleichungen

4.3.1 Punktrichtungsform einer Ebene

Benötigt wird ein Ortsvektor p und zwei linear unabhängige Vektoren v_1, v_2, die Richtungs- oder Spannvektoren.

$$E : x = p + s \cdot v_1 + t \cdot v_2, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Für die Ebenengleichung werden drei Punkte der Ebene benötigt. Einer davon ist Q, der Verankerungspunkt der Antenne auf dem Dach. Ein zweiter ist Punkt B aus dem ersten Teil der Aufgabe. Ein dritter möglicher Punkt ist der Giebel H, ebenfalls in Abb. 4.1 ablesbar.

$$Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,5 \\ -5 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} q, \qquad B = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} b, \qquad H = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} h$$

Eine Möglichkeit, die Richtungsvektoren zu bestimmen, ist folgende

$$v_1 = b - q = \begin{pmatrix} 6 \\ -4,5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = h - q = \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Parameterform der Ebene

$$E : x = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4,5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

4.3.2 Drei–Punkt–Form einer Ebene

Liegen drei Punkte P, Q und R einer Ebene vor, mit den zugehörigen Ortsvektoren p, q und r, dann gilt

$$E : x = p + s \cdot (q - p) + t \cdot (r - p)$$

Normalform einer Ebene

Zentrales Element ist auch hier wieder der Normalenvektor n, vgl. Abschnitt 4.2.2. Nur im dreidimensionalen Fall wird mit Hilfe der Gleichung

$$E : n \cdot (x - p) = 0, \qquad p \in E$$

eine Ebenengleichung angegeben.
Die Bestimmung des Normalenvektors erfolgt mit Hilfe der drei Punkte P, Q, R und damit der zugehörigen Ortsvektoren p, q, r. Eine Möglichkeit ist das Kreuzprodukt zu Hilfe zu ziehen

$$n = (q - p) \times (r - p)\,. \tag{4.3.1}$$

Eine andere Möglichkeit ist die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Hieraus resultiert sogar schon der Normaleneinheitsvektor n_0.

$$\begin{aligned} (q-p)\cdot n &= 0 \\ (r-p)\cdot n &= 0 \\ |n| = \sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad n_1^2+n_2^2+n_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Mit Gl. (4.3.1) folgt

$$\begin{aligned} n &= (b-p)\times(h-p) \\ &= \left(\begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\4,5\\-5\end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\4,5\\-5\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}6\\-4,5\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\1,5\\5\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-30\\-40\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei Normalenvektoren geht es nicht um deren Länge, sondern nur um die Richtung, daher darf der Vektor skaliert werden:

$$\begin{pmatrix}-30\\-40\\0\end{pmatrix} = -10\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$$

Die Normalform lautet also zum Beispiel:

$$E: \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\left(x-\begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0.$$

4.3.3 Hesse'sche Normalform einer Ebene

Analog zu Abschnitt 4.2.3 ist die Hesse'sche Normalform der Ebene ein Spezialfall der Normalform mit dem Normalenvektor n_0 und $|n_0| = 1$.

Für die Hesse'sche Normalform muss der Normalenvektor n noch normiert werden

$$n_0 = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Hesse'sche Normalform

$$E: \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\left(x-\begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0 \tag{4.3.2}$$

Der Schnittpunkt S der Geraden g (Gl. (4.2.2)) mit der Ebene E (Gl. (4.3.2)) wird durch Einsetzen von g in E bestimmt:

$$\begin{aligned}
E(g): \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}10\\7\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3,5\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix}\right)&=0\\
\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6 & + & 2t\\7 & - & 3,5t\\-5 & - & 2t\end{pmatrix}&=0\\
\frac{1}{5}(-18+6t+28-14t)&=0 && |\cdot 5\\
10-8t&=0 && |+8t\\
8t&=10 && |:8\\
t&=1,25
\end{aligned}$$

Der erhaltene Paramteter t wird wiederum in g eingesetzt, um den Schnittpunkt S zu erhalten

$$\begin{aligned}
S=g(t=1,25)&=\begin{pmatrix}10\\7\\-5\end{pmatrix}+1,25\cdot\begin{pmatrix}2\\-3,5\\-2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}10\\7\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2,5\\-4,375\\-2,5\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}12,5\\2,625\\-7.5\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4.4 Weitere Aufgaben

1. Ein Unternehmen hat zwei Fabriken, die als Output drei verschiedene Güter produzieren. Die gesamte Arbeitskraft ist fest. Wenn ein Anteil λ der Arbeitskraft der ersten Fabrik und der Anteil $1-\lambda$ (mit $0\le\lambda\le 1$) der zweiten Fabrik zugewiesen wird, so ist der gesamte Output der drei Güter gegeben durch den Vektor

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\lambda+2\\-2\lambda+6\\-6\lambda+10\end{pmatrix}.$$

   (a) Ist es dem Unternhmen möglich, einen der zwei Outputvektoren $a=(5,5,7)^T$ und $b=(7,5,5)^T$ zu produzieren, wenn kein Output vernichtet werden darf?

   (b) Wie ändern sich Ihre Antworten, wenn Output vernichtet werden darf?

   (c) Wie wird die den Erlös maximierende Wahl des Anteils λ von dem Verkaufspreis (p_1,p_2,p_3) dieser drei Güter abhängen? Welche Bedingung müssen die Preise erfüllen, damit beide Fabriken in Betrieb bleiben sollen?

2. In dem in Abb. 4.3 dargestellten Dreibein, dessen Stäbe gelenkig gelagert sind, greift im Gelenk S eine Gewichtskraft G vom Betrag $|G| = 18\,\mathrm{kN}$ an. Welche Reaktionskräfte (Zug- bzw. Druckkräfte) F_A, F_B und F_C treten in den drei Stäben auf?

$$A=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Lösungshinweis: Setzen Sie die Reaktionskräfte in der aus Abb. 4.3 ersichtlichen Weise zunächst als Zugkräfte an. Das Eigengewicht der Stäbe bleibt unberücksichtigt.

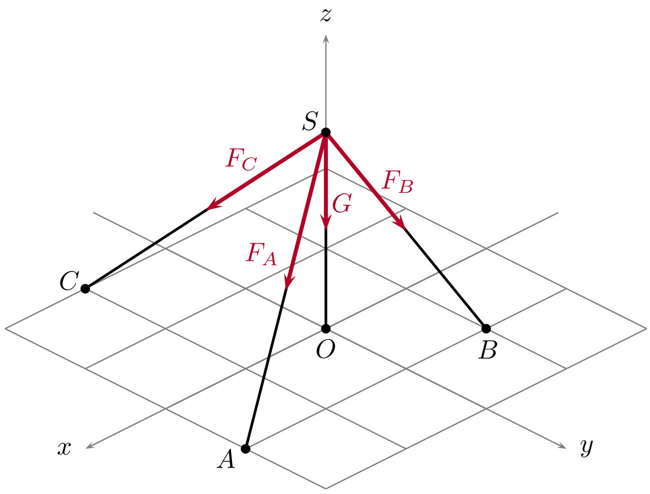


Abbildung 4.3: Dreibein

3. Ein Bauunternehmen hat einen Auftrag für mehrere Häuser von drei verschiedenen Typen: 5 vom Typ A, 7 vom Typ B und 12 vom Typ C. Schreiben Sie einen 3–dimensionalen Vektor x, dessen Koordinaten die Anzahl der Häuser von jedem Typ angeben. Nehmen Sie an, dass für Häuser vom Typ A je 20 Einheiten Holz gebraucht werden, für Typ B je 18 Einheiten und für Typ C je 25 Einheiten. Schreiben Sie einen Vektor u auf, der die verschiedenen Holzmengen angibt, die für je ein Haus von jedem der drei Typen A, B und C benötigt werden. Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Holz, die benötigt wird, indem Sie das innere Produkt $u \cdot x$ berechnen.

4. Ein Unternehmen produziert nichtnegative Outputmengen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ von n verschiedenen Gütern und benutzt als Input die nichtnegativen Mengen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ derselben n Güter.

   Konkret produziert das Unternehmen zwei Güter: dabei wird das zweite Gut als Input genutzt und das erste ist der Output. Sein Netto–Outputvektor $y = z - x$ ist $(2, -1)$. Der Preisvektor p ist $(1, 3)$. Bestimmen Sie

   (a) den Outputvektor z und den Inputvektor x

   (b) dei Kosten k

   (c) die Einnahmen e

   (d) den Wert des Netto–Outputs n

   (e) den Gewinn oder Verlust des Unternehmens.

Lösungen

1. (a) Wenn kein Output vernichtet werden darf, kann der Outputvektor a mit $\lambda = 1/2$ produziert werden. Der Outputvektor b ist nicht produzierbar.

   (b) Wenn Output vernichtet werden darf, ist b trotzdem nicht produzierbar.

   (c) $f(\lambda) = \lambda\,(6p_1 - 2p_2 - 6p_3) + 2p_1 + 6p_2 + 10p_3 \to \max$
   Die Funktion $f(\lambda) = \lambda \cdot m + n$ ist linear. Damit beide Fabriken bestehen bleiben, muss

   $$m = 6p_1 - 2p_2 - 6p_3 = 0$$

   gelten. Für $m > 0$ läge das Maximum bei $\lambda = 1$ und für $m < 0$ läge das Maximum bei $\lambda = 0$.

2. Die Stabkräfte sind Druckkräfte mit (Angaben in kN)

$$\begin{aligned} F_A &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, & F_B &= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, & F_C &= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \\ |F_A| &= 3, & |F_B| &= 12,25, & |F_C| &= 9. \end{aligned}$$

3. $x = (5, 7, 12)$, $u = (20, 18, 25)$, $u \cdot x = 526$

4. (a) Da das erste Gut nur als Output dient und das zweite nur als Input gilt

$$z = s \cdot (1, 0), \qquad x = t \cdot (0, 1), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

   Wegen $y = (2, -1)$ gilt $x = (0, 1)$ und $y = (2, 0)$.

   (b) Die Kosten ergeben sich als Produkt von Preis der Güter und Anzahl des Inputs ($k = (1, 3) \cdot (0, 1) = 3$).

   (c) Die Einnahmen ergeben sich als Produkt von Preis der Güter und Anzahl des Output ($e = (1, 3) \cdot (2, 0) = 2$).

   (d) Der Wert des Netto–Ouputs

5
Folgen und Reihen

Zu Jahresbeginn wird ein Kredit in Höhe von $125\,000$ € ausgereicht. Beginnend mit Ende des gleichen Jahres soll durch Zahlung von jährlich nachschüssigen Raten jeweils gleicher Höhe die Tilgung des Kredits nach 25 Jahren abgeschlossen sein. Wie hoch müssen die Raten sein, wenn jährliche Verzinsung mit Zinseszins bei einem Zinssatz von $4\,\%$ vereinbart wird?

Um die Aufgabe zu bearbeiten werden die beiden Zahlungsströme

1. Einmalzahlung $K_0 = 125\,000$ € zur Zeit $k = 0$
2. 25 Raten jeweils zu den Zeiten $k = 1, \ldots, 25$ der noch zu bestimmenden Höhe r

getrennt betrachet. Das *Äquivalenzprinzip* verlangt die Gleichheit der Endwerte beider Zahlungsreihen nach 25 Jahren im entsprechenden Zinsmodell, das ist hier die Verzinsung mit Zinseszins mit *Zinssatz* $i = 4\,\% = 0,04$, d. h. mit *Aufzinsungsfaktor* $p = i + 1 = 1,04$. Der Endwert der 2. Zahlungsreihe ergibt sich als Summe der Endwerte von 25 Einmalzahlungen der Höhe r mit einer Laufzeit von $25 - k$ Jahren, $k = 1, \ldots, 25$. Mit $n = 25$ resultiert allgemein:

$$K_0 p^n = r \cdot p^{n-1} + r \cdot p^{n-2} + \cdots + r \cdot p^1 + r. \qquad (5.0.1)$$

5.1 Folgen

5.1.1 Definition Folge

Sei eine beliebige Menge M und eine Zuordnungsvorschrift gegeben, dann wird die entstehende Menge $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ eine *Folge* genannt.
Sind die Glieder $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_i, \ldots$ Zahlen, also $M = \mathbb{R}$, so wird von einer *Zahlenfolge* gesprochen.
Andere Beispiele sind: $M = \mathbb{R}^n$ eine Folge von Vektoren oder für $M = \{A, B, \ldots, Z\}$ eine Folge von Großbuchstaben. Alle hier folgenden Aussagen beziehen sich auf Zahlenfolgen.
Die Folgen

$$\{a_k\}_{k=0}^{i} = \{a_0, a_1, \ldots, a_i\}, i < \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \{a_k\}_{k=0}^{\infty} = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

heißen *endliche* bzw. *unendliche Zahlenfolge*.

Die einzelnen Zahlungen des zweiten Zahlungsstroms können als endliche Folge betrachtet werden. Sinnvoll ist es hierbei die Summe rückwärts zu betrachten

$$\begin{aligned} Z_0 &= r \\ Z_1 &= r \cdot p^1 \\ &\vdots \\ Z_{n-1} &= r \cdot p^{n-1}. \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad Z_k = r \cdot p^k, \quad k = 0, \ldots, n-1 \qquad (5.1.1)$$

Das Symbol k heißt *Index*, a_k heißt *k–tes Glied* der Folge und a_{k+1} heißt *Folgeglied* oder *nachfolgendes Glied* von a_k.

Es kann aber auch jeder andere Startindex gewählt werden. Statt einer Aufzählung aller (bei endlich vielen) oder der ersten Glieder der Folge ist es oft vorteilhafter und präziser eine Folge durch ein Bildungsgesetz oder eine Bildungsvorschrift zu charakterisieren. Man unterscheidet dabei:

implizite Bildungsvorschrift: sie gibt an, wie das Glied a_{k+1} aus a_k erzeugt werden kann, bei einem Startwert a_0,

Beispiel 5.1. $a_{k+1} = 2a_k + 3$, $a_0 = 0$
$\{0, 3, 9, 21, 45, \ldots\}$

explizite Bildungsvorschrift: sie gibt an, wie jedes beliebige Glied der Folge direkt berechnet werden kann, bei einem Startwert a_0,

Beispiel 5.2. $a_k = k^2$, $a_0 = 0$
$0, 1, 4, 9, \ldots$

Beispiel 5.3. Darstellungsformen unendlicher Zahlenfolgen durch

- *Aufzählung:* Folge der Quadratzahlen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
- *Wertetabelle:* Zuordnung von Kapital auf einem verzinsten Konto jeweils am Ende des n–ten Jahres.

0	1	2	3	4	5
100,00 €	105,00 €	110,25 €	115,76 €	121,55 €	127,62 €

- *explizite Bildungsvorschrift:*

Folge der geraden Zahlen: $a_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}$
$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

Folge der ungeraden Zahlen: $a_k = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$
$\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Folge der Zweierpotenzen: $a_k = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$
$\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$

weitere Folge: $a_n = \frac{3k^2-4}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

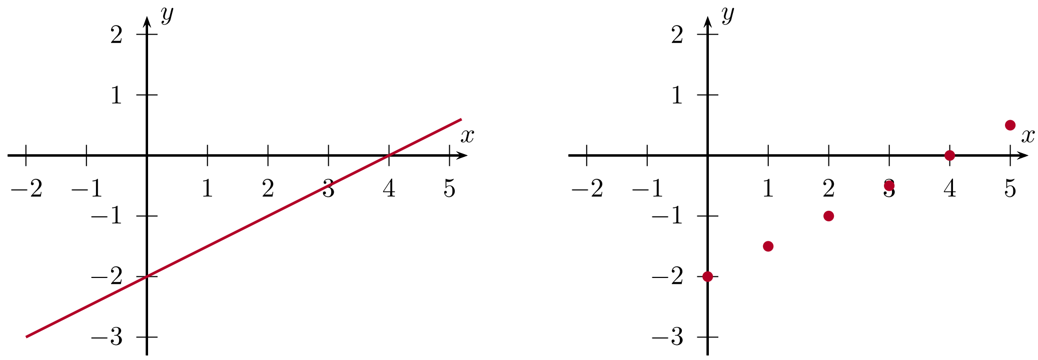
5.1.2 Vergleich von Folgen, Funktionen und Mengen

Zusammenhang zwischen Folgen und Funktionen

Zahlenfolgen sind Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, also $X = \mathbb{N}$. Die explizite Bildungsvorschrift einer Zahlenfolge ist dabei der Funktionsgleichung einer Funktion gleichzusetzen.

Beispiel 5.4. Die lineare Funktion $f(x) = 1/2 \cdot x - 2$ hat gewöhnlich den Definitionsbereich $X = \mathbb{R}$ (siehe Abb. 5.1a). Wird nun der Definitionsbereich auf die natürlichen Zahlen $X = \mathbb{N}$ eingeschränkt und $f(k) := a_k$ definiert, so folgt die Zahlenfolge $\{a_0, a_1, \ldots\}$ mit der Zuordnungsvorschrift $a_k = 1/2 \cdot k - 2$ (siehe Abb.5.1b).

Abbildung 5.1b zeigt, dass der Graph einer Zahlenfolge stets aus einzelnen Punkten besteht und keine durchgezogenen Linie darstellt!



(a) Graph der Funktion (b) Graph der Folge

Abbildung 5.1: Vergleich Funktion und Folge

Unterschiede zwischen Folgen und Mengen

Auch wenn die Schreibweise einer Zahlenfolge ähnlich zu der einer Menge ist, so gibt es doch zwei entscheidende Unterschiede zwischen Mengen (vgl. Kapitel A) und Folgen:

- Bei Mengen spielt die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente keine Rolle. Für Folgen ist die Reihenfolge jedoch maßgeblich.
- In einer Menge kann tritt jedes Element genau einmal auf. Eine Folge hingegen kann ein Element beliebig oft enthalten.

Beispiel 5.5. Gegeben seien zwei Mengen und zwei Folgen mit den Elementen 1 und 3.
Die Mengen $A = \{1, 3\}$ und $B = \{3, 1\}$ sind identische Mengen.
Die Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} = \{3, 1, 3, 1, 3, \ldots\}$ mit $a_k = 2 + (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$ und $\{b_k\}_{k=0}^{\infty} = \{1, 3, 1, 3, 1, \ldots\}$ mit $b_k = 2 + (-1)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ sind hingegen verschiedene Folgen.

5.1.3 Grenzwert einer Folge

Eine Zahl a heißt *Grenzwert* der Zahlenfolge $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, wenn für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index k_0 existiert, so dass alle Glieder a_n der Folge mit einem Index $k > k_0$ einen Abstand kleiner als ε von a haben:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \quad a - \varepsilon \leq a_k \leq a + \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0, k \in \mathbb{N}.$$

Der Abstand ε kann beliebig klein sein, d. h., dass die Folgeglieder ab dem Index k_0 beliebig nah am Grenzwert a liegen müssen. Da der Index vom gewählten ε abhängt, wird auch $k_0(\varepsilon)$ geschrieben. Besitzt eine Zahlenfolge einen Grenzwert, so heißt sie *konvergent*.

Schreibweise:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = a$$

„Die Folge a_k konvergiert für k gegen unendlich gegen a."
Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig. Eine Zahlenfolge kann nicht mehrere Grenzwerte besitzen.

Eine Zahlenfolge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt *divergent*. Eine Zahlenfolge $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ heißt *bestimmt divergent* gegen ∞, wenn für jede noch so große Zahl $C > 0$ ein Index $k_0 := k_0(C)$ existiert, sodass

$$a_k > C, \qquad \forall k \geq k_0$$

gilt. Das heißt, die Glieder der Folge wachsen über jede Schranke C hinaus. Entsprechend heißt eine Zahlenfolge mit $a_k < -C, \forall\, k \geq k_0, \forall\, C \in \mathbb{R}$ bestimmt divergent gegen $-\infty$.
Anders als bei Funktionen wird immer das Verhalten für n gegen unendlich betrachtet. Eine Folge kann daher nicht „zwischendurch gegen unendlich streben“ und „später“ gegen einen Grenzwert.

5.1.4 Rechnen mit Grenzwerten

Seien zwei konvergente Zahlenfolgen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit den Grenzwerten $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ und $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$ gegeben. Dann gelten folgende Grenzwertsätze:

- $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$
- $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k \cdot b_k) = ab$
- $\lim\limits_{k\to\infty} {}^{a_k}/_{b_k} = {}^{a}/_{b}$ falls $b \neq 0$ und $b_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Einige wichtige Grenzwerte, die bekannt sein sollten (für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}, b \geq 0$):

- $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{c} = 1$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$
- $\lim\limits_{k\to\infty} c = c$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e}$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k = \mathrm{e}^c$, vgl. Abschnitt 2.3.6

Beispiel 5.6. Ausgehend von obigen Rechenregeln und der Kenntnis einiger Grenzwerte lassen sich Grenzwerte für weitere Folgen berechnen, beispielsweise so:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{4k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k}{k(1+\frac{1}{k})} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 4}{\lim\limits_{k\to\infty} 1 + \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}} = \frac{4}{1+0} = 4$$

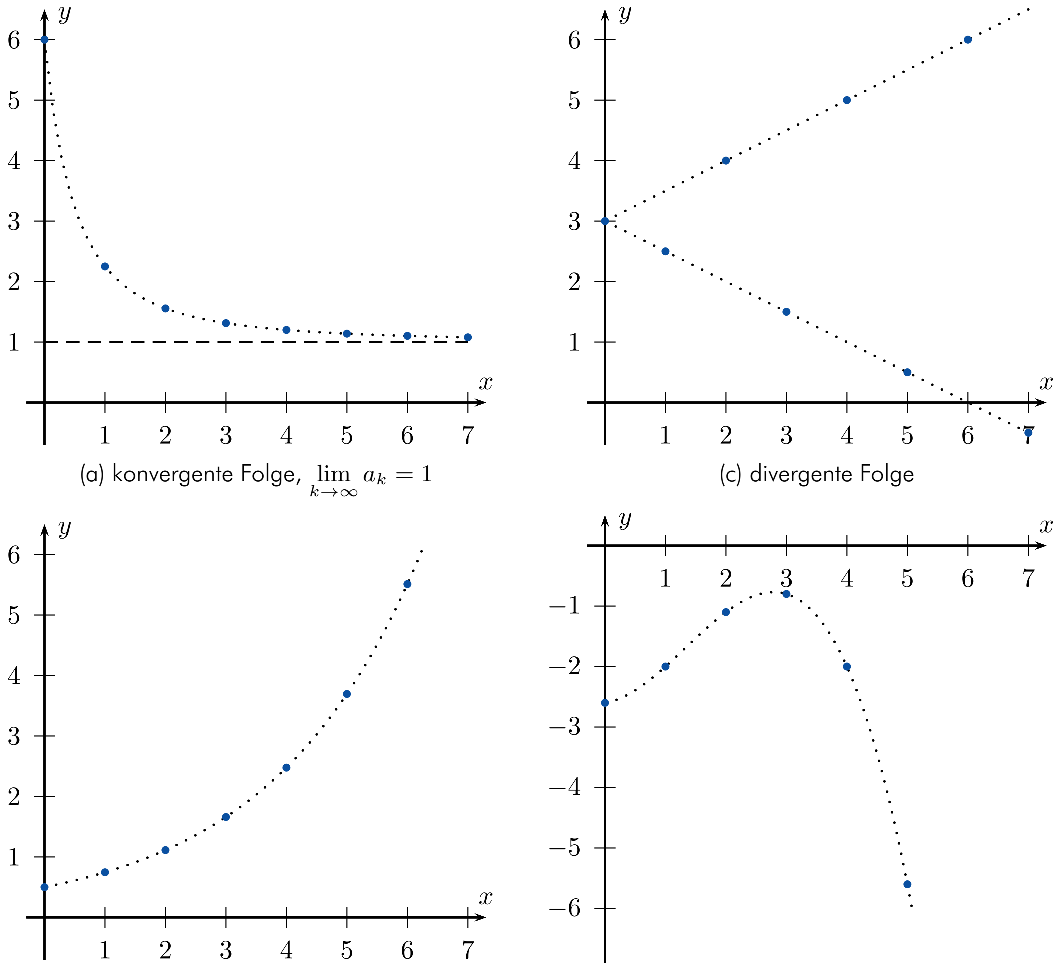
5.1.5 Eigenschaften von Folgen — Beschränktheit und Monotonie

Eine Zahlenfolge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt

- *nach oben beschränkt*, wenn es ein Konstante $C_o \in \mathbb{R}$ gibt, für die gilt $a_k \leq C_o, \forall\, k \in \mathbb{N}$
- *nach unten beschränkt*, wenn es ein Konstante $C_u \in \mathbb{R}$ gibt, für die gilt $a_k \geq C_u, \forall\, k \in \mathbb{N}$
- *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist. Anders formuliert: wenn eine Zahl $C > 0$ existiert für die $-C \leq a_k \leq C, \forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt.

Anschaulich bedeutet dies, dass die Folge den rot markierten Bereich in Abb. 5.3 nicht verlässt, weder nach oben noch nach unten.
Eine Zahlenfolge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt

- *monoton wachsend*, wenn $a_k < a_{k+1}, \forall\, k \in \mathbb{N}$



(a) konvergente Folge, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$

(c) divergente Folge

(b) bestimmt divergente Folge gegen $+\infty$

(d) bestimmt divergente Folge gegen $-\infty$

Abbildung 5.2: Konvergenz und Divergenz an Beispielfolgen

- *monoton fallend*, wenn $a_k > a_{k+1},\ \forall\, k \in \mathbb{N}$
- *monoton nicht wachsend*, wenn $a_k \geq a_{k+1},\ \forall\, k \in \mathbb{N}$
- *monoton nicht fallend*, wenn $a_k \leq a_{k+1},\ \forall\, k \in \mathbb{N}$

Zum Teil werden auch die Begriffe streng monoton wachsend/ fallend verwendet, falls die Gleichheit ausgeschlossen wird, und monoton wachsend/ fallend falls die Gleichheit gilt (vgl. Abschnitt 2.2). Es ist also zu beachten, welche Formulierung im konkreten Fall genutzt wird.
Zum Test auf Monotonie wird die Ungleichung $a_k > a_{k+1}$ bzw. $a_k < a_{k+1}$ so lange umgeformt, bis eine wahre oder falsche Aussage entsteht.

Beispiel 5.7. Beispielfolgen mit unterschiedlichen Eigenschaften:

Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.

Die Umkehrung der vorigen Aussage gilt nicht! Nicht jede beschränkte Folge ist automatisch konvergent! Siehe dazu Abb. 5.4a – blau.

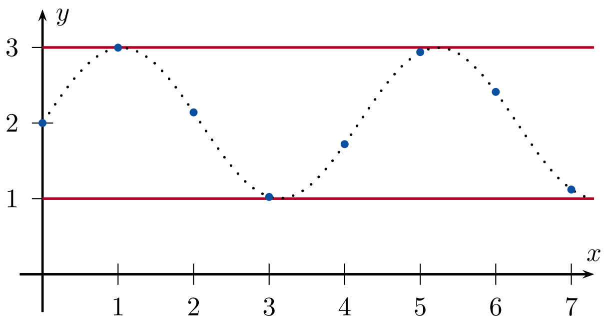


Abbildung 5.3: Beschränktheit einer Zahlenfolge

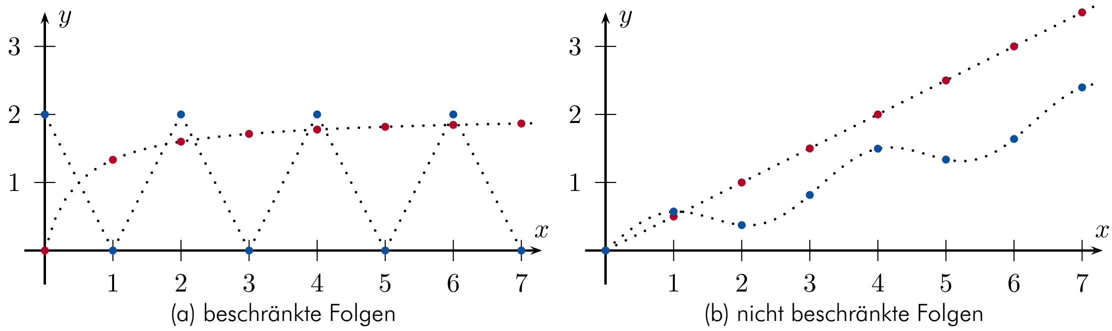


Abbildung 5.4: Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz; monotone Folgen in rot und nicht monotone in blau; die einzige konvergente Folge ist die rote in Abb. 5.4a

Jede monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.
Betrachte zu einer Folge $\{a_k\}$ die zugehörige Folge $\{|a_k|\}$. Ist diese neue Folge monoton und beschränkt, dann ist auch die ursprüngliche Folge konvergent.

5.1.6 Spezielle Zahlenfolgen

Einige Zahlenfolgen haben aufgrund ihrer speziellen Form bzw. ihrer besonderen Bedeutung in der Anwendung eigene Namen.
Konstante Folgen sind Folgen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, deren Glieder alle gleich sind. Solche Folgen sind stets monoton nicht wachsend und nicht fallend zugleich, beschränkt und daher konvergent. Es gilt ($c \in \mathbb{R}$):

$$a_k = c, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = c.$$

Alternierende Folgen sind Zahlenfolgen, deren Glieder abwechselnd das Vorzeichen wechseln. Eine typische alternierende Folge ist die Folge mit der Bildungsvorschrift $a_k = (-1)^k$.

Die Folgen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = (-1)^{2k}$ oder $a_k = (-1)^k + 4$ hingegen sehen zwar ähnlich aus, sind jedoch keine alternierenden Folgen, da sich die Vorzeichen nicht ändern.

Nullfolgen sind Zahlenfolgen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert Null, d. h. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Da sie einen Grenzwert besitzen, sind Nullfolgen stets konvergent. Für die Berechnung von Grenzwerten und Reihen sind Nullfolgen von besonderer Bedeutung.

Beispiel 5.8. Beispiele für Nullfolgen:

1. $a_k = \frac{1}{k!} = \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}$

2. $a_k = \frac{1}{2^k} = 0,5^k$

3. $a_k = \sqrt[k]{4} - 1$

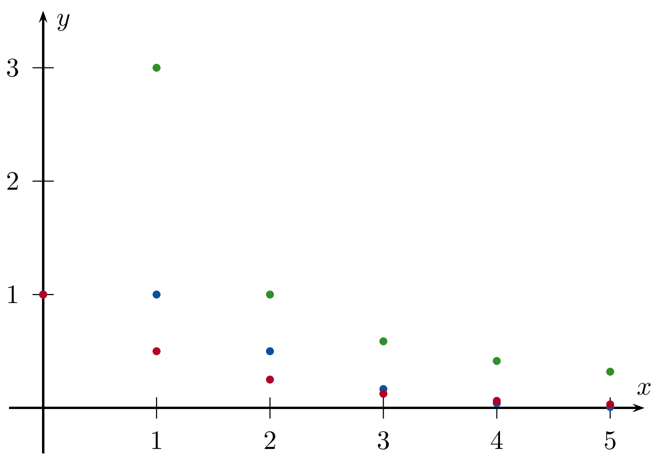


Abbildung 5.5: verschiedene Nullfolgen: blau – $\frac{1}{k!}$, rot – $\frac{1}{2^k}$, grün – $\sqrt[k]{4} - 1$

Harmonische Folge nennt man die Folge der Kehrwerte der natürlichen Zahlen, $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = {}^1/_k$. Die harmonische Folge ist eine Nullfolge.

Arithmetische Zahlenfolgen

Arithmetische Zahlenfolgen sind Folgen, bei denen die Differenz d zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern immer konstant ist. Es gilt also:

$$a_{k+1} - a_k = d, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$
$$a_{k+1} = a_k + d \qquad \text{(rekursive Bildungsvorschrift).}$$

Nach Zusammenfassen dieser Eigenschaft lässt sich für arithmetische Folgen die explizite Bildungsvorschrift formulieren:

$$a_k = a_0 + kd \qquad \text{falls die Folge mit dem Index } k = 0 \text{ startet,}$$
$$a_k = a_1 + (k-1)d \qquad \text{falls die Folge mit dem Index } k = 1 \text{ startet.}$$

Mit dieser expliziten Bildungsvorschrift lässt sich jedes Glied der Folge sofort aus der Differenz d und dem Startglied a_0 berechnen.

Eigenschaften:

- $d = 0$: konstante Folge, beschränkt (durch das Startglied)
  $\Rightarrow$ konvergent.
- $d > 0$: monoton wachsend, nicht beschränkt
  $\Rightarrow$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.
- $d < 0$: monoton fallend, nicht beschränkt
  $\Rightarrow$ bestimmt divergent gegen $-\infty$.

Beispiel 5.9. Arithmetische Folgen sind vergleichbar mit linearen Funktionen.

1. $a_k = 1/2 + 1/2 \cdot k$; Startindex: $k = 0$; $d = 1/2$; $a_0 = 1/2$ (vgl. Abb. 5.6 – blau)
2. $a_k = 3,5 - 0,6k$; Startindex: $k = 0$; $d = -0,6$; $a_0 = 3,5$ (vgl. Abb. 5.6 – rot)

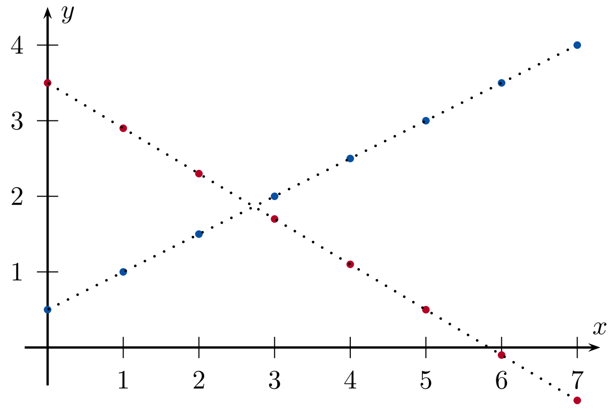


Abbildung 5.6: verschiedene arithmetische Folgen: blau – $d > 0$, rot – $d < 0$

Geometrische Zahlenfolgen

Geometrische Zahlenfolgen sind Folgen, bei denen der Quotient q zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Es gilt also:

$$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{5.1.2}$$

$$a_{k+1} = a_k \cdot q \qquad \text{(rekursive Bildungsvorschrift).} \tag{5.1.3}$$

Die aufeinander folgenden Glieder der Folge $\{Z_k\}_{k=0}^{n-1}$ des zweiten Zahlungsstroms unterscheiden sich um den Faktor p. Es gilt

$$q \overset{(5.1.2)}{:=} \frac{Z_{k+1}}{Z_k} \overset{(5.1.1)}{=} \frac{r \cdot p^{k+1}}{r \cdot p^k} = p.$$

Die Folge $\{Z_k\}_{k=0}^{n-1}$ ist also eine geometrische Folge mit

$$a_0 = Z_0 = r.$$

Ein Glied der Folge lässt sich folglich aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit q ermitteln. Die explizite Bildungsvorschrift lautet:

$$a_k = a_0 \cdot q^k \qquad \text{falls die Folge mit dem Index } k = 0 \text{ startet}$$

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \qquad \text{falls die Folge mit dem Index } k = 1 \text{ startet}$$

Konvention: $q \neq 0$ und $a_1 \neq 0$ bzw. $a_0 \neq 0$.

Häufig treten solche Folgen bei Wachstumsprozessen auf, beispielsweise bei Bakterienkulturten, Sparguthaben durch Verzinsung oder auch beim radioaktiven Zerfall.

Eigenschaften:

- $q = 1$: konstante Folge $\Rightarrow$ monoton nicht wachsend und fallend, beschränkt $\Rightarrow$ konvergent
- $q > 1$: nicht beschränkt
  - $a_0 > 0$: monoton wachsend $\Rightarrow$ bestimmt divergent gegen $+\infty$
  - $a_0 < 0$: monoton fallend $\Rightarrow$ bestimmt divergent gegen $-\infty$
- $0 < q < 1$: beschränkt
  - $a_0 > 0$: monoton fallend $\Rightarrow$ Nullfolge
  - $a_0 < 0$: monoton wachsend $\Rightarrow$ Nullfolge
- $-1 < q < 0$: beschränkt, alternierend $\Rightarrow$ Nullfolge
- $q < -1$: alternierend, nicht beschränkt $\Rightarrow$ divergent
- $q = -1$: alternierend, beschränkt $\Rightarrow$ divergent

Konvergente geometrische Folgen sind also entweder konstant oder Nullfolgen.

Mit
$$q = p = 1,04 > 1$$
und $a_0 = r > 0$ ist die Folge $\{Z_k\}_{k=0}^{n-1}$ also monoton wachsend.

$$\lim_{k\to\infty} q^k = 0, \qquad |q| < 1$$

Beispiel 5.10. Beispiele für geometrische Folgen:

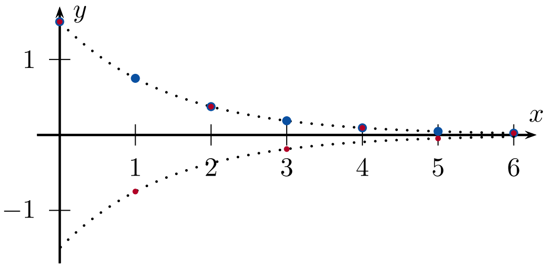
1. $a_k = 2^k$, Startindex: $k = 0$, $q = 2, a_0 = 1$
2. $a_k = -2/3^k$, Startindex: $k = 0$, $q = 1/3, a_0 = -2$
3. $a_k = 4(3/5)^{k-1}$, Startindex: $k = 1$, $q = 3/5, a_1 = 4$

5.2 Reihen

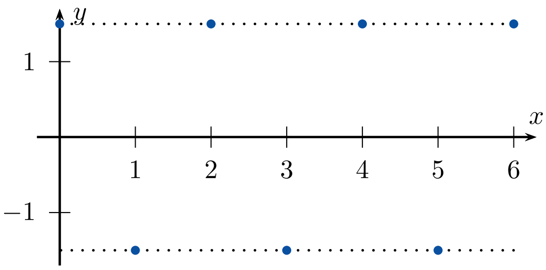
5.2.1 Definition Partialsumme und Reihe

Sei $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Zahlenfolge. Dann heißt die Aufsummierung aller Glieder einer Folge bis zum Index n, geschrieben
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
n–te Partialsumme der Zahlenfolge $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Die Partialsumme ist eine reelle Zahl.

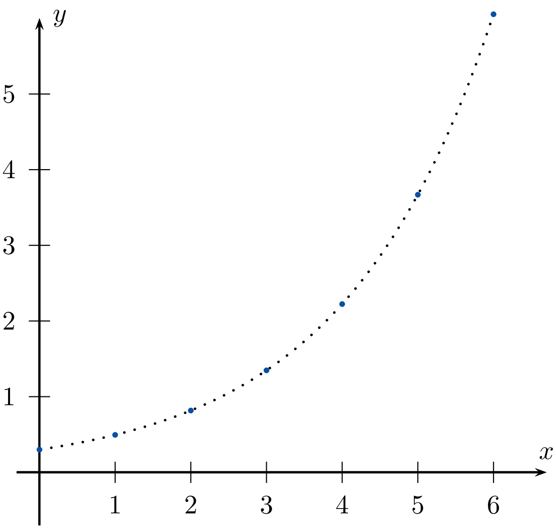
Die rechte Seite aus Gl. (5.0.1) stellt die Summe über den Folgenwerten aus (5.1.1) dar. Diese Summe ist also eine Reihe
$$r \cdot p^{n-1} + r \cdot p^{n-2} + \cdots + r \cdot p^1 + r = r + r \cdot p^1 + \cdots + r \cdot p^{n-2} + r \cdot p^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} r \cdot p^k.$$



(a) Geometrische Folgen mit $0 < q < 1$ (blau) und $-1 < q < 0$ (rot)



(b) Geometrische Folge mit $q = -1$



(c) Geometrische Folge mit $q > 1$

Abbildung 5.7: verschiedene Geometrische Folgen

Wird aus den n–ten Partialsummen eine Folge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ gebildet, so heißt die Folge der Partialsummen *Reihe*. Konvergiert diese Folge gegen eine Zahl s, so heißt s *Summe der Folge* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ oder *Grenzwert der Reihe*.

Schreibweise:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Dementsprechend heißt eine Reihe mit einem Grenzwert *konvergent*, andernfalls *divergent*. Für Reihen gelten ebenso die Begriffe bestimmt *divergent gegen* $\pm\infty$.
Damit eine Reihe konvergiert, müssen ihre Glieder eine Nullfolge bilden.
Der Ausdruck $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist zum Einen der Wert bzw. Grenzwert einer Reihe, zum Anderen wird er aber auch verwendet, um die Reihe als Partialsummenfolge zu benennen.

Index–Verschiebung: Manchmal ist es zweckmäßig den Laufindex k der Summe zu verschieben. Wichtig ist, bei Verschiebung der Indizes den Wert der Summe nicht zu verändern.

- Verschieben des Startindex':

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l} \tag{5.2.1}$$

- Erweitern der Reihe um Glieder, die danach wieder abgezogen werden müssen:

$$\sum_{k=5}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{4} a_k$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=0}^{n-1} r \cdot p^k = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k \overset{(5.2.1)}{=} \sum_{k=1}^{n} Z_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} r \cdot p^{k-1}$$

(wird bei den weiteren Rechnungen nicht benötigt)

5.2.2 Spezielle Reihen

Analog zu den speziellen Folgen gibt es auch spezielle Reihen mit eigenen Namen.

Alternierende Reihen

Ist die Folge a_k eine alternierende Folge, so wird $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine alternierende Reihe genannt, vgl. Abschnitt 5.1.6. Eine solche Reihe konvergiert, wenn $\{|a_k|\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Harmonische Reihe

Die Harmonische Reihe ist die Reihe basierend auf der Harmonischen Folge: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Sie ist divergent, obwohl die zugehörige Folge eine Nullfolge ist.
Die *alternierende Harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ hingegen ist konvergent.

Arithmetische Reihen

Für eine arithmetische Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ lautet die n–te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + (k-1)d) = na_0 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

Die zugehörige arithmetische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_0 + (k-1)d)$ ist stets bestimmt divergent (außer für den trivialen Fall $a_0 = d = 0$). Für $d > 0$ ist sie bestimmt divergent gegen $+\infty$, für $d < 0$ bestimmt divergent gegen $-\infty$. Für $d = 0$ resultiert eine konstante Folge und somit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_0$, die abhängig vom Vorzeichen von a_0 bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Geometrische Reihen

Für eine geometrische Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ lautet die n–te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(a_0 \cdot q^k\right) = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \qquad q \neq 1. \tag{5.2.2}$$

Die zugehörige geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_0 \cdot q^{k-1}\right)$ konvergiert für $|q| < 1$. Ihr Wert ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_0 \cdot q^k\right) = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}, \qquad q \neq 1.$$

Für $q \geq 1$ ist die Reihe bestimmt divergent gegen $+\infty$. Für $q \leq -1$ divergiert die Reihe unbestimmt.

Wie in Abschnitt 5.1.6 festgestellt, ist die Folge $\{Z_k\}_{k=0}^{n-1}$ eine geometrische. Daher ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_k = \sum_{k=0}^{n-1} r \cdot p^k$$

eine endliche geometrische Reihe, mit $p = q \neq 1$. Daher gilt für die Partialsumme s_{n-1} (beachte den abweichenden Endwert der Summe)

$$s_{n-1} \overset{(5.2.2)}{=} r \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}. \tag{5.2.3}$$

Gleichung (5.0.1), die aus dem Äquivalenzprinzip folgte

$$\begin{aligned} K_0 p^n &= r \cdot p^{n-1} + r \cdot p^{n-2} + \dots + r \cdot p^1 + r \\ &\overset{(5.2.3)}{=} r \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} \end{aligned}$$

muss nach r umgestellt werden, weil dies die gesucht Größe ist

$$r = K_0 \cdot p^n \cdot \frac{p-1}{p^n - 1}.$$

Mit den konkreten Daten $n = 25$, $p = 1{,}04$, $K_0 = 125\,000$ € ergibt sich

$$\begin{aligned} r &= 125\,0001{,}04^{25} \cdot \frac{0{,}04}{1{,}04^{25} - 1} \\ &= 8\,001{,}50 \end{aligned}$$

Es sind also jährlich nachschüssig 25 Raten in Höhe von $8\,001{,}50$ € zu zahlen, um die Schuld von $125\,000$ € zu tilgen.

5.3 Weitere Aufgaben

1. Über eine Bakterienkultur ist bekannt, dass die tägliche Wachstumsrate $6\,\%$ beträgt, jedoch sterben auch täglich 150 Bakterien durch Umwelteinflüsse. Zu Beginn bestand die Kultur aus $2\,000$ Bakterien. Wieviele Bakterien leben am n–ten Tag nach Start der Beobachtungen?

2. (a) Als Mr. Barnes starb, erhielt seine Witwe $2/3$ seines Vermögens, $1/4$ teilten sich seine Kinder und der Rest, $100\,000$ € ging an eine wohltätige Organisation. Wie groß war das Vermögen von Mr.Barnes?
   (b) Wenn die Witwe ihren Anteil zu $3\,\%$ Zinsen mit Zinseszins anlegt, wieviel Geld hat sie dann nach 10 Jahren?
   (c) Wann erfolgt eine Verdreifachung des eingezahlten Geldes?

3. Eine bestimmte Menge m_0 einer organische Substanz sei in Wasser gelöst und soll mit Benzen extrahiert werden. Nach Zugabe des Benzens ergibt sich im Gleichgewichtszustand der Verteilungskoeffizient $k = {}^{c_1}/_{c_2} = 0,653$ (c_1 Konzentration des Stoffes in Wasser, c_2 Konzentration in Benzen).

   (a) Wie oft muss man 200 ml der wässrigen Lösung mit jeweils 200 ml Benzen extrahieren, um $97\,\%$ der Substanz aus der wässrigen Lösung zu entfernen?

   (b) Wie oft müsste man mit jeweils 100 ml Benzen extrahieren, um dieselbe Abreicherung zu erhalten?

Lösungen

1.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1,06 \cdot a_n - 150, \qquad a_0 = 2\,000 \\ a_{n+1} &= 1,06^{n+1} \cdot 2\,000 - 150 \cdot (1 + 1,06 + \cdots + 1,06^n) \\ &= 1,06^{n+1} \cdot 2\,000 - 150 \cdot \frac{1,06^{n+1} - 1}{1,06 - 1} \end{aligned}$$

2. (a) Mr. Barnes hatte insgesamt $1\,200\,000$ €. Der Anteil der Witwe beträgt $800\,000$ € und der der Kinder $300\,000$ €.

   (b) Die Witwe erhält nach angegebenem Modell nach 10 Jahren $1\,075\,133,10$ €.

   (c) Die Verdreifachung erfolgt nach 38 Jahren.

3. (a) Es müssen $n = 4$ Extraktionen durchgeführt werden, weil

$$n \geq \frac{\ln 0,03}{\ln \alpha} = \frac{\ln 0,03}{\ln 0,395\,039} = 3,775\,483.$$

   (b) Es müssen $n = 7$ Extraktionen durchgeführt werden, weil

$$n \geq \frac{\ln 0,03}{\ln \alpha} = \frac{\ln 0,03}{\ln 0,566\,348} = 6,209\,910.$$

6
Differentialrechnung

Abbildung 6.1 zeigt einen veränderlichen Verbraucherwiderstand R_a, der von einer Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i gespeist wird. Bei Kurzschluss ($R_a = 0$) und Leerlauf ($R_a \to \infty$) erfolgt keine Leistungsaufnahme. Dazwischen gibt es für den Verbraucherwiderstand R_a einen Wert, bei dem er die größtmögliche Energie aufnimmt, die sogenannte Leistungsanpassung. Bestimmen Sie diesen Extremwert.
Lösungshinweis: Stellen Sie zunächst die vom Verbraucherwiderstand R_a aufgenommene Leistung P als eine Funktion von R_a dar und bestimmen Sie dann das Maximum dieser Funktion.

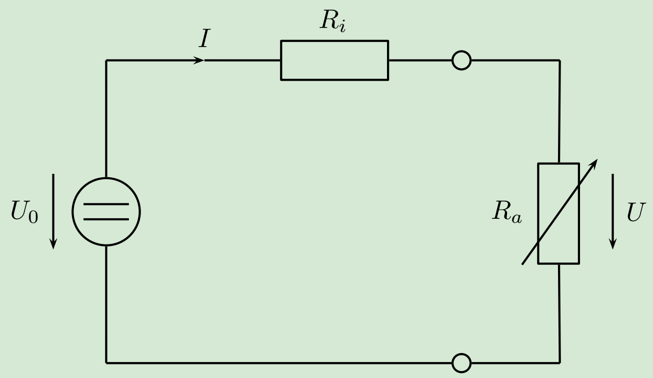


Abbildung 6.1: Verbraucherwiderstand

Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung ist die Summe der Teilwiderstände

$$R_{\mathrm{G}} = R_a + R_i.$$

Mit Hilfe des Ohm'schen Gesetz ($R_{\mathrm{G}} = {}^{U_0}/_{I}$) folgt

$$I = \frac{U_0}{R_a + R_i}. \tag{6.0.1}$$

Die Maschenregel besagt, dass die Gesamtspannung U_0 einer Reihenschaltung der Summe der Teilspannungen entspricht

$$U_0 = U + R_i \cdot I \qquad \Rightarrow \qquad U = U_0 - R_i \cdot I. \tag{6.0.2}$$

Somit folgt für die aufgenommene Leistung P am Verbraucherwiderstand R_a

$$\begin{aligned} P &= U \cdot I \\ &\overset{(6.0.1),(6.0.2)}{=} \left(U_0 - R_i \cdot \frac{U_0}{R_a + R_i}\right)\left(\frac{U_0}{R_a + R_i}\right) \\ &\overset{(C.4.2)}{=} \left(\frac{R_a U_0 + R_i U_0 - R_i U_0}{R_a + R_i}\right)\left(\frac{U_0}{R_a + R_i}\right) \\ &\overset{(C.4.3)}{=} \frac{U_0^2 R_a}{(R_a + R_i)^2} \end{aligned} \tag{6.0.3}$$

Die Quellspannung U_0, sowie der Innenwiderstands sind feste Größen. Damit hängt die Leistung nur noch vom Außenwiderstand R_a ab ($P = P(R_a)$).

6.1 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

6.1.1 Grenzwert

Grenzwert an einer endlichen Stelle x_0

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* der Funktion f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \neq x_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ mit dem Grenzwert x_0 die Folge der zugehörigen Funktionswerte $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ gegen den Wert a konvergiert.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+ = \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

Desweiteren werden auch sogenannte einseitige Grenzwerte betrachtet. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den *linksseitigen Grenzwert* a_l, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, die sich von links an x_0 annähert (d. h. $x_n < x_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$), die Folge der zugehörigen Funktionswerte den Grenzwert a_l hat: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a_l$.
Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den *rechtsseitigen Grenzwert* a_r, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, die sich von rechts an x_0 annähert (d. h. $x_n > x_0$, $\forall\, n$), die Folge der zugehörigen Funktionswerte den Grenzwert a_r hat: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a_r$.
Alternativ wird auch statt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x_0$ kurz $x \to x_0$ geschrieben.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} a_l &= \lim_{x\to x_0-} f(x) && \text{linksseitiger Grenzwert} \\ a_r &= \lim_{x\to x_0+} f(x) && \text{rechtsseitiger Grenzwert} \end{aligned}$$

Es existieren alternative Schreibweisen:

$$\begin{array}{ccccc} x \to x_0- & \hat{=} & x \uparrow x_0 & \hat{=} & x \nearrow x_0 \\ x \to x_0+ & \hat{=} & x \downarrow x_0 & \hat{=} & x \searrow x_0 \end{array}$$

Beispiel 6.1. Signumfunktion (vgl. Abb. 6.2):

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) & = & -1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) & = & +1 \\ \lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) & \neq \operatorname{sgn}(0) \neq & \lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) \end{array}$$

Grenzwert im Unendlichen

Die Funktion f konvergiert für unbeschränkt wachsende bzw. fallende Argumente x gegen einen Grenzwert a, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, die bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergiert, die zugehörige Folge der Funktionswerte gegen a konvergiert, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

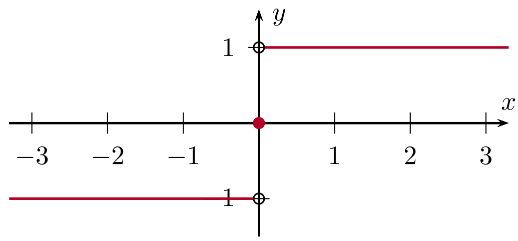


Abbildung 6.2: Einseitiger Grenzwert am Beispiel der Signumsfunktion (rot)

Schreibweise:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

Beispiel 6.2. vgl. Abschnitt 5.1.3

Für zwei Funktionen f und g gelte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Dann gelten folgende *Grenzwertsätze für Funktionen:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) &= c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \\
\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \\
\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \\
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \qquad \text{falls } g(x) \neq 0,\ \forall x,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = b \neq 0
\end{aligned}$$

Analoge Aussagen gelten auch für einseitige Grenzwerte und das Verhalten im Unendlichen. Dazu setzt man $x_0 = \pm\infty$.
Besondere Bedeutung haben solche Betrachtungen für Polstellen und Lücken, also an Stellen an denen die Funktion nicht definiert ist.

Beispiel 6.3. Berechnung von Grenzwerten bei Funktionen.

1. $\lim\limits_{x \to 1} (-0.5x + 1.5) = 1$, vgl. Abb. 6.3 – blau
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 1$
   Diese Funktion ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert, der Grenzwert ist jedoch berechenbar. Betrachtet wird dazu eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, die gegen 2 konvergiert und für die $x_n \neq 2$ gilt. Die zugehörige Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ heißt dann $f(x_n) = \frac{x_n^2 - 4x_n + 4}{x_n - 2} + 1 = \frac{(x_n - 2)^2}{x_n - 2} + 1 = (x_n - 2) + 1 = x_n - 1$, ihr Grenzwert ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n - 1) = 2 - 1 = 1$ (vgl. Abb. 6.3 – rot).

6.1.2 Stetigkeit

Eine Funktion heißt *im Punkt x_0 stetig*, wenn die Funktion f im Punkt x_0 definiert ist und der Grenzwert in diesem Punkt mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

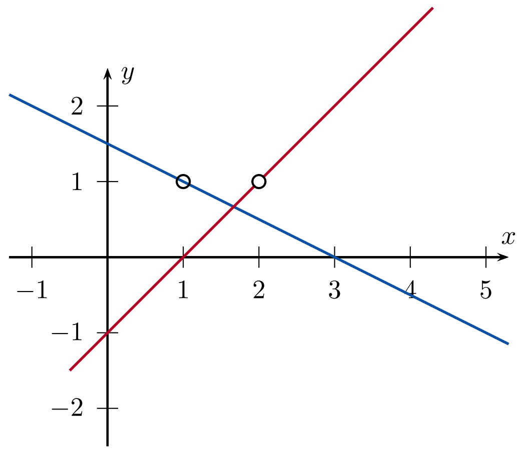


Abbildung 6.3: Beispiele für Grenzwerte bei Funktionen

Ist die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig, so heißt sie *stetig*.
Sind zwei Funktionen f und g im Punkt x_0 stetig, dann sind auch die folgenden Funktionen in x_0 stetig ($c \in \mathbb{R}$):

$$c \cdot f, \qquad f+g, \qquad f-g, \qquad fg, \qquad \frac{f}{g}, \quad \text{falls } g(x_0) \neq 0.$$

Anschaulich gesprochen: Funktionen die gezeichnet werden können, ohne den Stift abzusetzen, werden als stetig bezeichnet.

Beispiel 6.4. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left({}^1\!/\!_x\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig. Allerdings kann diese Funktion wegen der Oszillationen und der unendlich langen Kurve nahe Null nicht durchgezeichnet werden. Im Intervall $[-1, 1]$ wird unendlich viel Tinte benötigt.

Beispiel 6.5. Stetige Funktionen:

- Potenzfunktionen (vgl. Abschnitt 2.3.5): $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, stetig auf $\mathbb{R}$, folglich auch Polynome stetig
- Exponentialfunktionen (vgl. Abschnitt 2.3.6): $f(x) = a^x, a > 0$ stetig auf $\mathbb{R}^+$
- Logarithmusfunktionen (vgl. Abschnitt 2.3.6): $f(x) = \log_a x, a > 0$ stetig auf $\mathbb{R}$
- Betragsfunktion (vgl. Abschnitt 2.4.3): $f(x) = |x|$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$

Funktionen, die nicht in allen Stellen ihres Definitionsbereiches stetig sind, heißen unstetig. Die entsprechenden Punkte *Unstetigkeitsstellen*.

Beispiel 6.6. Signumfunktion aus Abschnitt 6.1.1, Abb. 6.2

6.2 Ableitungen

Seien (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zwei Punkte auf dem Graphen der Funktion f. Der *Differenzenquotient*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6.2.1}$$

ist der Quotient aus der Differenz der y–Werte $\Delta y = y_1 - y_0$ zu der Differenz der x–Werte $\Delta x = x_1 - x_0$. Er gibt den Anstieg der Sekanten zwischen den beiden Punktpaaren $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ und $(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1))$ an (Vergleiche dazu Abb. 6.4).

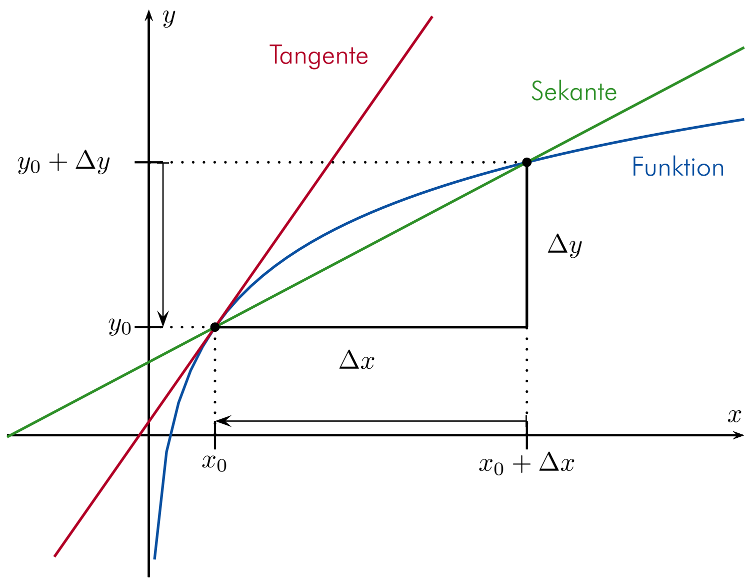


Abbildung 6.4: Zusammenhang von Tangente (rot), Sekante (grün) und Funktion f (blau). Durch Verkleinern des Abstands $\Delta x \to 0$ wird aus der Sekante eine Tangente, die den Anstieg der Funktion f im Punkt x_0 beschreibt.

Soll der Anstieg von f in einem bestimmten Punkt (x_0, y_0) betrachtet werden, dann wird geometrisch die Tangente in diesem Punkt an den Graphen der Funktion benötigt. Anschaulich wird der Abstand der beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) so nah zusammengeführt, bis sie fast miteinander verschmelzen. Mathematisch wird also der Grenzwert $\Delta x \to 0$ des Differenzenquotienten (6.2.1) gebildet (vgl. Abb. 6.4)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6.2.2}$$

gebildet werden. Existiert der Grenzwert, so heißt Gleichung (6.2.2) *Differentialquotient* oder auch *erste Ableitung* der Funktion f an der Stelle x_0. Die Funktion f heißt dann *differenzierbar an der Stelle* x_0.

Schreibweise:

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Für lineare Funktionen (vgl. Abschnitt 2.3.1) sind Sekante und Tangente in jedem Punkt identisch und es gilt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = b$.
Ist die Funktion f an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar, so heißt die Funktion *differenzierbar*. Es entsteht eine Ableitungsfunktion f'. Ist diese Funktion wiederum differenzierbar, resultiert die zweiten Ableitung von f. Fortführend können so bei vorliegender Differenzierbarkeit *höhere Ableitungen* vom Grad n gebildet werden.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} && \text{zweite Ableitung} \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} && n\text{-te Ableitung} \end{aligned}$$

Beispiel 6.7. Differenzierbare Funktionen

- konstante Funktionen: Für jede konstante Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

- lineare Funktionen: Für jede lineare Funktion (vgl. Abschnitt 2.3.1) $f(x) = a + bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a + bx - a - bx_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{b(x - x_0)}{x - x_0} = b$$

- Exponentialfunktionen: für jede Exponentialfunktion (vgl. Abschnitt 2.3.6) $f(x) = a^x$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gilt $f'(x) = a^x \ln(a)$,
  Spezialfall: $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$

Eine Funktion heißt an einer Stelle x_0 *nicht differenzierbar*, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht existiert. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert verschieden sind.

Beispiel 6.8. Nicht–differenzierbare Funktionen (visuell erkennbar am „Knick"):

1. Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ (vgl. Abschnitt 2.3.2 und Abb. 2.7) ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und überall differenzierbar, außer im Nullpunkt $x_0 = 0$.

2. Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 2x + 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Jede differenzierbare Funktion ist stetig, aber nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar (siehe dazu die Betragsfunktion).

Ableitungsregeln

Für viele Funktionstypen vereinfacht sich die Bildung der ersten Ableitung durch die Formeln aus Tab. 6.1.

Zusammenhänge:

- Jede konstante Funktion kann als $f(x) = c = c \cdot x^0$ aufgefasst werden. Jede lineare Funktion als $f(x) = a + bx = ax^0 + bx^1$. Zum Ableiten kann dann die Formel für Potenzfunktionen verwendet werden.

- Wurzelfunktionen sind Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten. Es empfiehlt sich für die Übersichtlichkeit vor dem Ableiten Wurzelfunktionen als Potenz zu schreiben und dann abzuleiten, vgl. Abschnitt 2.3.5.

Sind die Funktionen $f = f(x)$ und $g = g(x)$ differenzierbar, so gelten folgende *Differentiationsregeln*:

Faktorregel:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \tag{6.2.3}$$

Tabelle 6.1: Ableitungsregeln ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$)

Funktionstyp	$f(x)$	$f'(x)$	Bedingungen
Konstante Funktionen	k	0	$k \in \mathbb{R}$, fest
Potenzfunktionen	x^a	ax^{a-1}	
Exponentialfunktionen	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$a > 0, a \neq 1$
Logarithmusfunktionen	$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$a > 0, a \neq 1$
Sinusfunktion	$\sin(x)$	$\cos(x)$	
Kosinusfunktion	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
Tangensfunktion	$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \neq (2n+1)\pi/2$
Kotangensfunktion	$\cot(x)$	$-\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \cot^2(x)\right)$	$x \neq n\pi$
	$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
	$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
	$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	

Summenregel:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{6.2.4}$$

Produktregel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{6.2.5}$$

Quotientenregel: $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{6.2.6}$$

Kettenregel: Sei $h(x) = g(f(x))$, dann gilt

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{6.2.7}$$

(„äußere Ableitung mal innere Ableitung“)

Beispiel 6.9. Ableitungen von Funktionen

1. $f_1(x) = 3x + 5,\ f_1'(x) = 3$
   (Potenzfunktion Abschnitt 2.3.5, Faktor- und Summenregel)
2. $f_2(x) = 4x^3 - 2x,\ f_2'(x) = 12x^2 - 2$
   (Potenzfunktion Abschnitt 2.3.5, Faktor- und Summenregel)
3. $f_3(x) = (2 + x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e},\ f_3'(x) = \mathrm{e}^x + (2 + x)\mathrm{e}^x$
   (Potenz- und Exponentialfunktion Abschnitt 2.3.5 und 2.3.6, Produkt- und Summenregel)
4. $f_4(x) = x^{2k},\ f_4'(x) = 2kx^{2k-1},\ k \in \mathbb{N}$
   (Potenzfunktion Abschnitt 2.3.5)

5. $f_5(x) = \frac{1}{(x^2+3)^3}$, $f_5'(x) = \frac{-6x}{(x^2+3)^4}$
(Potenzfunktion 2.3.6, Kettenregel oder Quotientenregel)

6. $f_6(x) = \sqrt[3]{4x+1}$, $f_6'(x) = {}^1\!/\!_3 \cdot (4x+1)^{-2/3} \cdot 4 = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{(4x+1)^2}}$
(Wurzel- bzw. Potenzfunktion Abschnitt 2.3.5, Summen- und Kettenregel)

7. $f_7(x) = \log_4 x^2 = 2\log_4 x$, $f_7'(x) = \frac{2}{x\ln(4)}$
(Logarithmusfunktion Abschnitt 2.3.6 und Faktorregel)

Oftmals sind Kombinationen mehrerer Regeln nötig. Teils lassen sich auch verschiedene Regeln verwenden.

Fehlerwarnung: Für $f(x) = x$ ist die erste Ableitung $f'(x) = 1$ und *nicht* $f'(x) = 0$.

Viele Fehler beim Ableiten entstehen nur durch falsches Umstellen, Weglassen von Klammern, Kürzen oder Zusammenfassen (vgl. Anhang C)!

Fehlerwarnung: Beachte, wonach abgeleitet wird! Es gibt auch Funktionen mit mehr als einer Variablen oder mit freien Paramtern.
Für $f(x) = 3y + 4z + 6$ ist die Ableitung $f'(x) = 0$ und nicht 3 oder 4! Die Symbole y und z sind hier als Konstanten zu betrachten.

6.3 Kurvendiskussion

6.3.1 Definitionsbereich, Wertebereich und Nullstellen

Die Definitionen für Definitions- und Wertebereich finden sich in Abschnitt 2.1.1.

Definitionsbereich:
Widerstände haben stets einen nichtnegativen Wert, dies gilt auch für R_a. Der Widerstand ist nicht definiert, falls der Nenner $(R_a + R_i)^2$ verschwindet. Daher muss gelten

$$(R_a + R_i)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (R_a + R_i) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad R_a \neq -R_i,$$

Da aber alle Widerstände nicht kleiner als Null sein sollen, ist diese Bedingung stets erfüllt.

$$\text{DB}(P) = \mathbb{R}_0^+ = \{R_a \,:\, R_a \in \mathbb{R}, R_a \geq 0\} = [0, \infty).$$

Für P auf $[0, \infty)$ gilt

$$P(R_a) = \underbrace{U_0^2}_{\geq 0} \cdot \frac{\overbrace{R_a}^{\geq 0}}{\underbrace{(R_a + R_i)^2}_{\geq 0}} \geq 0.$$

Also gilt für den Wertebereich

$$\text{WB}(P) = \mathbb{R}_0^+,$$

dieser Bereich ist nach oben nicht scharf.

Die *Nullstellen* einer Funktion $f = f(x)$ sind jene Stellen x, für die gilt $f(x) = 0$.

Nullstellen:

$$\begin{aligned} P(R_a) = 0 &= U_0^2 \frac{R_a}{(R_a+R_i)^2} \\ &= U_0^2 \cdot R_a \\ &\Rightarrow U_0 = 0 \quad \text{oder} \quad R_a = 0 \end{aligned}$$

6.3.2 Minima, Maxima und Monotonie

Eine typische Anwendung der Differentialrechnung findet sich in sogenannten Extremwertaufgaben. Dabei werden Funktionen auf *Minima* (Punkte mit kleinstem Funktionswert) und *Maxima* (Punkte mit größtem Funktionswert) untersucht. Ein Sammelbegriff für Minima und Maxima ist *Extremum* oder *Extremalstelle*. Diese Extrema können lokal oder global sein.
Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein *lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung von x_0 gibt, in der kein Funktionswert kleiner ist als der Funktionswert im Punkt x_0:

$$\exists\, \varepsilon > 0: \qquad f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall\, x \in D_f \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Eine Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung von x_0 gibt, in der kein Funktionswert größer ist als der im Punkt x_0:

$$\exists\, \varepsilon > 0: \qquad f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall\, x \in D_f \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Gilt diese Bedingung für den gesamten Definitionsbereich, kann also $\varepsilon = \infty$ gewählt werden, dann ist von einem *globalen Minimum bzw. Maximum* die Rede.

Notwendiges Kriterium für Extrema
Ist die Stelle x_0 ein lokales Extremum der differenzierbaren Funktion f, dann verschwindet die erste Ableitung der Funktion an dieser Stelle

$$x_0 \text{ ist Extremum} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x_0) = 0. \tag{6.3.1}$$

Die Umkehrung der vorhergehenden Aussage ist falsch

$$f'(x_0) = 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad x_0 \text{ ist Extremum}.$$

Bestimmung der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} P'(R_a) &\overset{(6.2.3)}{=} U_0^2 \cdot \left(\frac{R_a}{(R_a+R_i)^2} \right)' \\ &\overset{(6.2.6)}{=} U_0^2 \cdot \frac{1 \cdot (R_a+R_i)^2 - R_a \cdot 2 \cdot (R_a+R_i)}{(R_a+R_i)^4} \\ &= U_0^2 \cdot \frac{(R_a+R_i)\left((R_a+R_i) - 2 \cdot R_a\right)}{(R_a+R_i)^4} \\ &= U_0^2 \cdot \frac{R_a - R_i}{(R_a+R_i)^3} \end{aligned}$$

Nullsetzen (notwendiges Kriterium):

$$\begin{aligned}
0 &= P'(R_a) \\
&= U_0^2 \cdot \frac{R_a - R_i}{(R_a + R_i)^3} \\
&= U_0^2 \cdot (R_i - R_a) \\
&\Rightarrow U_0 = 0 \quad \text{oder} \quad R_a = R_i
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Da es in dieser Aufgabe um die Anhängigkeit der Leistung P vom Außenwiderstand geht, ist nur $R_a = R_i$ von Interesse.

Allerdings ist nicht jede Stelle x mit der Eigenschaft $f'(x) = 0$ ein Minimum oder Maximum (vgl. Abschnitt 6.3.3). Die Bedingung ist daher notwendig, aber nicht hinreichend.
Abhängig von der zweiten Ableitung der Funktion (falls die entstandene Ableitungsfunktion ebenfalls differenzierbar ist) lässt sich bestimmen, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt.

Hinreichendes Kriterium
Es sei $f'(x_0) = 0$.

- f hat an der Stelle x_0 ein lokales *Maximum*, falls $f''(x_0) < 0$
- f hat an der Stelle x_0 ein lokales *Minimum*, falls $f''(x_0) > 0$

Bestimmung der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
P''(R_a) &\overset{(6.2.3)}{=} U_0^2 \cdot \left(\frac{R_i - R_a}{(R_a + R_i)^3} \right)' \\
&\overset{(6.2.6)}{=} U_0^2 \cdot \frac{(-1) \cdot (R_a + R_i)^3 - (R_i - R_a) \cdot 3 \cdot (R_a + R_i)^2}{(R_a + R_i)^6} \\
&= U_0^2 \cdot \frac{(R_a + R_i)^2 \cdot (-(R_a + R_i) - 3 \cdot (R_i - R_a))}{(R_a + R_i)^6} \\
&= U_0^2 \cdot \frac{-R_a - R_i - 3R_i + 3R_a}{(R_a + R_i)^4} \\
&= 2U_0^2 \cdot \frac{R_a - 2R_i}{(R_a + R_i)^4}
\end{aligned}$$

Einsetzten der kritischen Stelle aus (6.3.2):

$$\begin{aligned}
P''(R_a = R_i) &= 2U_0^2 \cdot \frac{R_i - 2R_i}{(R_i + R_i)^4} \\
&= 2U_0^2 \cdot \frac{-R_i}{(2R_i)^4} \\
&= -2U_0^2 \frac{R_i}{16R_i^4} \\
&= -U_0^2 \frac{1}{8R_i^3} < 0
\end{aligned}$$

Wegen $P''(R_i) < 0$ besitzt P an der Stelle R_i ein lokales Maximum.

Minima und Maxima einer Funktion sind manchmal nicht eindeutig bestimmt, d. h. eine Funktion kann beliebig viele lokale aber auch globale Minima und Maxima besitzen. Beispielsweise besitzt die Sinus–Funktion unendlich viele globale Minima und Maxima.

Beispiel 6.10. Es sei die Funktion $f(x) = {}^2\!/_3 \cdot x^3 - 4x$ auf Extremalstellen zu untersuchen.

Schritt 1: Bestimmung möglicher Extrema mittels erster Ableitung:
Bestimmung von $f'(x)$ und Nullsetzen (Nullstellenberechnung der ersten Ableitung).

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) = 2x^2 - 4 && \mid +4 \\ 4 &= 2x^2 && \mid :2 \\ 2 &= x^2 && \mid \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Schritt 2: Untersuchung der zweiten Ableitung möglichen Extremalstellen: $f''(x) = 4x$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''\left(\sqrt{2}\right) = 4 \cdot \sqrt{2} && > 0 \\ f''(x_2) &= f''\left(-\sqrt{2}\right) = -4 \cdot \sqrt{2} && < 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f hat somit an der Stelle $x_1 = \sqrt{2}$ ein lokales *Minimum* und an der Stelle $x_2 = -\sqrt{2}$ ein lokales Maximum. In Abb. 6.5 ist erkennbar, dass es sich tatsächlich nur um lokale, nicht aber um globale Extrema handelt. Globale Extrema existieren in diesem Falle nicht.

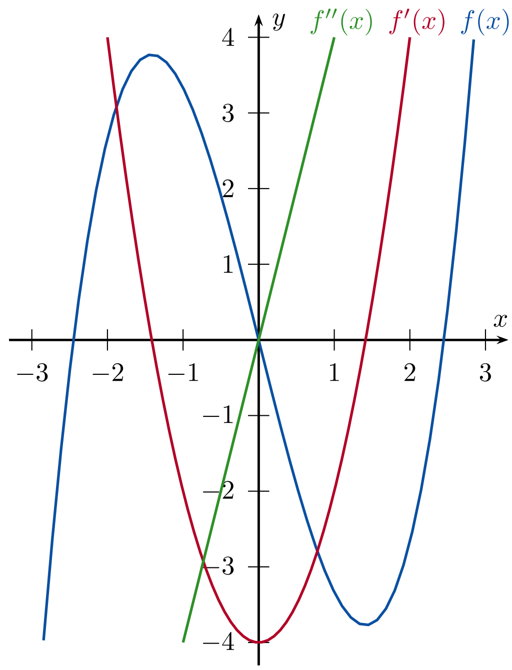


Abbildung 6.5: Die Funktion $f(x) = {}^2\!/_3 \cdot x^3 - 4x$ (blau) mit der zugehörigen ersten (rot) und zweiten (grün) Ableitung

Extremstellen markieren die Änderung der *Monotonie* der Funktion (vgl. Abschnitt 5.1.5). Mit Hilfe der ersten Ableitung können ebenfalls Aussagen über die Monotonie getroffen werden.

Eine Funktion f heißt in einem Intervall I

- monoton wachsend, falls $f'(x) \geq 0,\ \forall\, x \in I$,
- monoton fallend, falls $f'(x) \leq 0,\ \forall\, x \in I$.

6.3.3 Konvexität, Konkavität und Wendepunkte

Ein Punkt (x_w, y_w) wird *Wendepunkt* (WP) genannt, wenn die Krümmung des Funktionsgraphen ihr Vorzeichen wechselt.

Notwenidges Kriterium
Ist der Punkt (x_w, y_w) ein Wendepunkt der zweimal differenzierbaren Funktion f, dann gilt für die zweite Ableitung

$$f''(x_w) = 0.$$

Nullsetzen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 = P(R_a) &= 2U_0^2 \cdot \frac{R_a - 2R_i}{(R_a + R_i)^4} \\ &= R_a - 2R_i \\ R_a &= 2R_i \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Hinreichendes Kriterium
Sei $f''(x_w) = 0$.

- f hat an der Stelle x_0 einen Links–rechts–Wendepunkt, falls $f'''(x_w) < 0$
- f hat an der Stelle x_0 einen Rechts–links–Wendepunkt, falls $f'''(x_w) > 0$

Bestimmung der dritten Ableitung:

$$\begin{aligned} P'''(R_a) &= 2U_0^2 \cdot \frac{1 \cdot (R_a + R_i)^4 - (R_a - 2R_i) \cdot 4 \cdot (R_a + R_i)^3}{(R_a + R_i)^8} \\ &= 2U_0^2 \cdot \frac{(R_a + R_i)^3 \, (R_a + R_i - 4 \cdot (R_a - 2R_i))}{(R_a + R_i)^8} \\ &= 2U_0^2 \cdot \frac{9R_i - 3R_a}{(R_a + R_i)^5} \\ &= 6U_0^2 \cdot \frac{3R_i - R_a}{(R_a + R_i)^5} \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Einsetzen von (6.3.3) in (6.3.4)

$$\begin{aligned} P'''(R_a = 2R_i) &= 6U_0^2 \cdot \frac{3R_i - 2R_i}{(2R_i + R_i)^5} \\ &= 6U_0^2 \cdot \frac{R_i}{(3R_i)^5} \\ &= U_0^2 \cdot \frac{2}{81R_i^4} > 0 \end{aligned}$$

Wegen $P'''(2R_i) \neq 0$ liegt an der Stelle $2R_i$ ein Rechts–links–Wendepunkt vor.

Eine zweimal differenzierbare Funktion f heißt in einem Bereich *konkav*, falls

$$f''(x) \leq 0.$$

Gilt jedoch

$$f''(x) \geq 0,$$

dann ist sie *konvex*.

Prüfen von P auf Konvexität

$$0 \leq P''(R_a) = 2U_0^2 \cdot \frac{R_a - 2R_i}{(R_a + R_i)^4}$$
$$0 \leq R_a - 2R_i$$
$$R_a \geq 2R_i$$

6.3.4 Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f mit Definitionsbereich X heißt

gerade genau dann, wenn $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in X$
$\Rightarrow$ Achssymmetrie

ungerade genau dann, wenn $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$
$\Rightarrow$ Punktsymmetrie

Eigenschaften gerader und ungerader Funktionen:

- Die Summe zweier gerader (ungerader) Funktionen ist wieder gerade.
- Das Produkt zweier gerader (ungerader) Funktionen ist wieder gerade.
- Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade, die Ableitung einer ungeraden Funktion ist gerade (vgl. Abschnitt 6.2).
- Jede Funktion g einer geraden Funktion f ist gerade, denn es gilt $g\left(f(-x)\right) = g\left(f(x)\right)$.

Nicht alle Funktionen sind gerade oder ungerade. Es gibt auch viele, die keines von beiden sind.

Beispiel 6.11. Gerade Funktionen:

1. $f_1(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $f_2(x) = x^4 + x^2$
3. $f_3(x) = \cos(x)$
4. $f_4(x) = |x|$

Beispiel 6.12. Ungerade Funktionen:

1. $g_1(x) = x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $g_2(x) = x^3 + x$
3. $f_3(x) = \sin(x)$
4. $f_4(x) = x^5 + \tan(x)$

6.4 Weitere Aufgaben

1. Beim Elektronenstrahl–Oszilloskop werden die von einer Glühkathode ausgesandten Elektronen zunächst auf eine konstante Geschwindigkeit v_0 beschleunigt und treten dann senkrecht zu den elektrischen Feldlinien in einen auf die Spannung U aufgeladenen Plattendetektor ein, wo sie aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden (vgl. Abb. 6.6). Die Kondensatorplatten stehen im Abstand d zueinander und besitzen die Länge l. Die Elektronen besitzen die Elementarladung e und eine Ruhemasse m_0.

(a) Unter welchem Ablenkwinkel α (gegenüber der Eintrittsrichtung gemessen) verlassen die Elektronen den Kondensator?

(b) Im Abstand s hinter dem Kondensator befindet sich ein Auffangschirm für die Elektronen. Wie groß ist die seitliche Ablenkung b der Elektronen auf diesem Schirm, gemessen gegenüber der ursprünglichen Flugbahn?

Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst die Bahnkurve der Elektronen im Plattenkondensator.

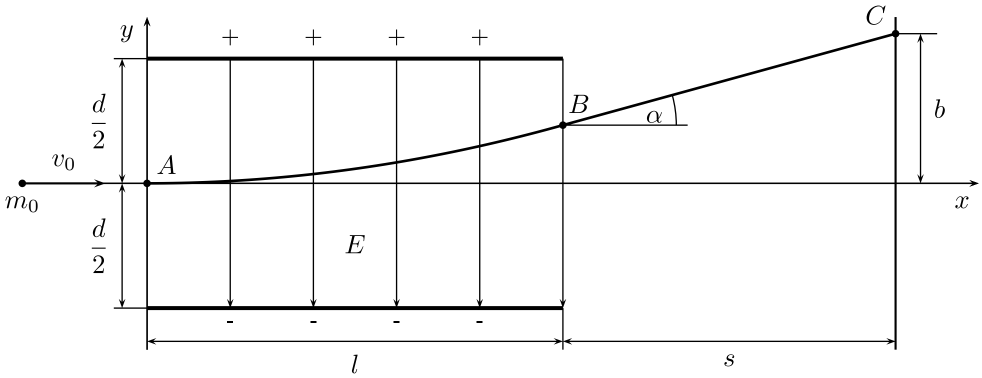


Abbildung 6.6: Elektronenstrahl–Oszilloskop

2. Abbildung 6.7 zeigt einen bis zur Höhe H mit Wasser gefüllten Zylinder. In der Tiefe h (von der als unveränderlich angenommenen Wasseroberfläche aus gerechnet) befindet sich eine seitliche Öffnung, aus der das Wasser in waagerechter Richtung mit der nach der Formel

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

berechneten Geschwindigkeit austritt. An welcher Stelle A des Gefäßes muss man dies Öffnung anbringen, damit der seitlich austretende Wasserstrahl den Boden an einer möglichst weit entfernten Stelle B (in horizontaler Richtung gemessen) trifft?

Lösungshinweis: Die Bewegung des Wasserstrahls kann in guter Näherung als ein waagerecher Wurf im luftleeren Raum betrachtet werden.

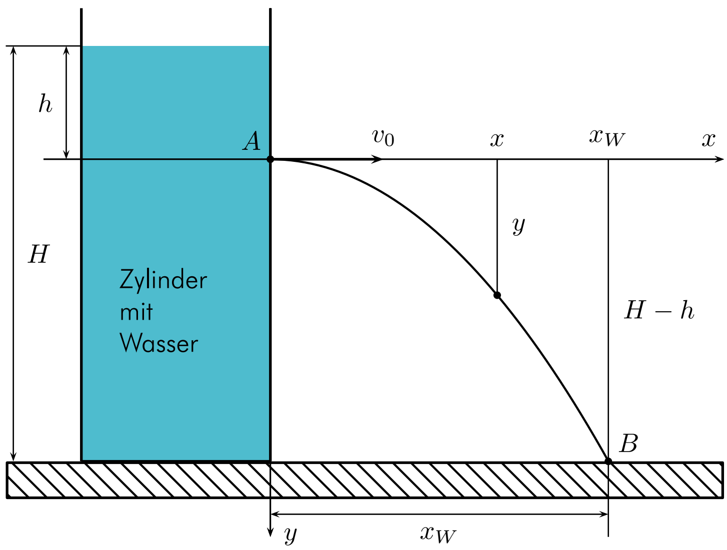


Abbildung 6.7: Parabel eines Wasserstrahls

3. Ein Unternehmen produziert in einer Zeitperiode x Einheiten einer Ware. Der Gewinn der Produktion $\pi(x)$ ist die Differenz aus dem Ertrag $R(x)$ und den Produktionskosten $C(x)$.

   Die *Grenzkosten* sind definiert als die Ableitung der Kosten $C(x)$. Sie geben die Kosten an, die durch die Produktion einer zusätzlichen Einheit eines Produktes entstehen. Analog ist der *Grenzertrag* ist die Ableitung des Ertrags $R(x)$, er beschreibt den Ertragszuwachs bei Verkauf einer weiteren Produktionseinehit. Der *Grenzgewinn* ist natürlich die Ableitung des Gewinns $\pi(x)$. Er gibt den erwarteten Gewinn für eine (infinitesimal kleine) weitere produzierte Einheit eines Produktes an und kann Aufschluss darüber geben, wieviele Einheiten produziert werden müssen, um *Gewinnschwelle* zu erreichen.

   Bestimmen Sie den Grenzertrag, die Grenzkosten und den Grenzgewinn sowie einen Wert x, so dass der Grenzgewinn Null ist, für

   (a) $R(x) = ax$, $C(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$,

   (b) $R(x) = ax - bx^2$, $C(x) = a_1x + b_1$.

Lösungen

1. (a) Die Koordinaten eines Elektrons zu Zeit t lautet

$$x = v_0t, \qquad y = \frac{1}{2}at^2,$$

mit der Beschleunigung $a = (eU)/(m_0d)$, es folgt

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{eU}{2m_0d}t^2.$$

Nach Eliminierung von t

$$f(x) = \frac{eU}{2m_0d}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.$$

Im Punkt B verlassen die Elektronen den Kondensator und bewegen sich geradlinig auf der Bahntangenten weiter auf den Schirm zu. Es gilt:

$$f'(x) = \tan\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arctan\frac{eUl}{m_0dv_0^2}.$$

(b) Im Auftreffpunkt $C = (l + s, b)$ beträgt die Auslenkung

$$b = \frac{eUl(l + 2s)}{2m_0dv_0^2}.$$

2. Die Wasserbewegung besteht aus zwei unabhängigen Teilen: Die Bewegung in x–Richtung besitzt die konstante Geschwindigkeit $x = v_0t$. In y–Richtung geschieht eine Beschleunigung aufgrund der Gravitation mit der Beschleunigung g, es folgt

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Durch Substitution von t folgt

$$y = \frac{x^2}{4h}.$$

Einsetzten des Auftreffpunktes $B = (x_W, H - h)$ und Auflösen nach x_W

$$x_W = 2\sqrt{Hh - h^2}.$$

Diese Größe soll maximiert werden, es genügt hierfür

$$z(h) = Hh - h^2$$

zu maximieren. Der Austrittspunkt A sollte in der Höhe $h = {}^{H}\!/{}_{2}$ liegen, dann ist $x_{W,\text{max}} = H$.

3. Der Grenzertrag, die Grenzkosten und den Grenzgewinn für die gegebenen Werte lauten

   (a) $\pi(x) = -a_1x^2 + (a - b_1)x - c_1$,
   $R'(x) = a$,
   $C'(x) = 2a_1x + b_1$,
   $\pi'(x) = -2a_1x + a - b_1$,
   $\pi'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a - b_1}{2a_1}$

   (b) $\pi(x) = -bx^2 + (a - a_1)x - b_1$,
   $R'(x) = a - 2bx$,
   $C'(x) = a_1$,
   $\pi'(x) = -2bx + a - a_1$,
   $\pi'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a - a_1}{2b}$

7 Integralrechnung

Sei $K(t)$ der Kapitalbestand einer Volkswirtschaft zur Zeit t. Dann ist die mit $I(t)$ bezeichnete *Netto–Investition* zur Zeit t gegeben durch die Zuwachsrate $K'(t)$ von $K(t)$. Es sei $I(t) = 3t^2 + 2t + 5$, $t \geq 0$.

1. Wie hoch ist der gesamte Zuwachs im Kapitalbestand im Intervall $[0, 5]$?
2. Es sei $K(t_0) = K_0$. Finden Sie einen Ausdruck für den gesamten Zuwachs im Kapitalbestand im Zeitintervall $[t_0, T]$.

7.1 Unbestimmtes Integral

Im vorhergegangenen Kapitel haben wir uns mit dem Differenzieren beschäftigt. Hier betrachten wir nun den umgekehrten Vorgang.
Sei eine Funktion f gegeben. Sollen nun zu f alle Funktionen F bestimmt werden, so dass $F' = f$ gilt, dann ist von der *Integralrechnung* die Rede. Die Funktion f heißt *Integrand* und eine Funktion F, die die Voraussetzung erfüllt, heißt *Stammfunktion*. Die Menge aller Stammfunktionen wird als *unbestimmtes Integral bezeichnet* und wird als $\int f(x)\mathrm{d}x$ geschrieben.

In der vorliegenden Aufgabe soll gelten $I(t) = K'(t)$ bei gegebener Funktion I. Damit ist ein Integral von I gesucht.

Regeln (Konstanten $c, c_1, \dots, c_n$):

Linearität:

$$\int (c_1 f_1(x) + \cdots c_n f_n(x))\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\mathrm{d}x + \cdots + c_n \int f_n(x)\mathrm{d}x \tag{7.1.1}$$

Differentiation:

$$\int \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(x) + c, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$$

Allgemein gelten die Regeln aus Tab. 7.1 ($c, k \in \mathbb{R}$ konstant):

$$\begin{aligned}
\int I(t)\mathrm{d}t &= \int 3t^2 + 2t + 5\mathrm{d}t \\
&\overset{(7.1.1)}{=} 3 \cdot \int t^2\mathrm{d}t + 2 \cdot \int t\mathrm{d}t + 5 \cdot \int 1\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Potenzfkt.}}{=} 3 \cdot \frac{1}{2+1} \cdot t^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{1+1} \cdot t^{1+1} + 5 \cdot \frac{1}{0+1} \cdot t^{0+1} + c \\
&= t^3 + t^2 + 5t + c
\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Tabelle 7.1: Regeln der Integralrechnung ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, beliebige Konstanten c_1, c_2)

Funktionstyp	$f(x)$	$F(x)$	Bedingungen
Konstante Funktion	k	$kx + c_1$	$k \in \mathbb{R}$, fest
Potenzfunktionen	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + c_1$	$x > 0, a \neq 1$
Exponentialfunktionen	a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + c_1$	$a > 0, a \neq 1$
Sinusfunktion	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c_1$	
Kosinusfunktion	$\cos(x)$	$\sin(x) + c_1$	
	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + c_1$	$x \neq n\pi$
	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c_1$	$x \neq \pi/2 + n\pi$
	$\frac{1}{a+x^2}$	$\arctan(x) + c_1 = -\text{arccot}(x) + c_2$	
	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c_1 = -\arccos(x) + c_2$	$\|x\| < 1$

7.2 Bestimmtes Integral

Neben dem unbestimmten gibt es auch das *bestimmte Integral*, bei dem nur über ein Intervall $[a, b]$ integriert wird, dieses Intervall kann auch offen oder halboffen sein, vgl. Abb. 7.1. Es wird, wie gewohnt, die Stammfunktion F bestimmt, dann werden die Integrationsgrenzen eingesetzt und die Differenz gebildet:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{7.2.1}$$

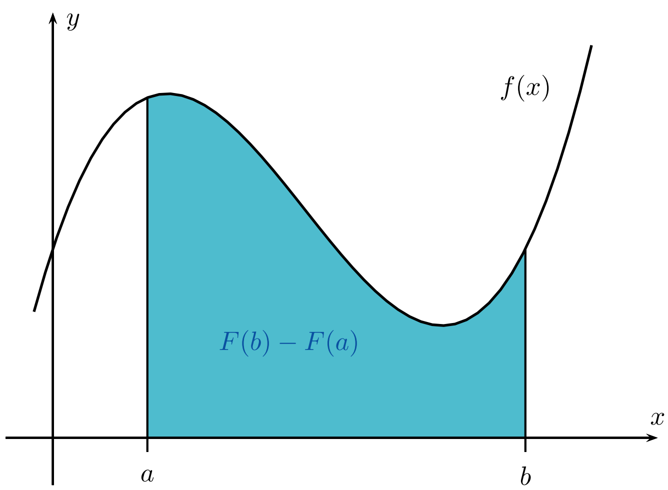


Abbildung 7.1: Bestimmtes Integral von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$

In der vorliegenden Aufgabe soll der Zuwachs des Kapitalbestands in einem Zeitinvervall bestimmt werden. Das bedeutet, dass das bestimmte Integral von I gesucht wird.

1. Intervall $I = [0, 5]$

$$\begin{aligned}\int_0^5 I(t) &\overset{(7.2.1),(7.1.2)}{=} \left[t^3 + t^2 + 5t + c\right]_0^5 \\ &\overset{(7.2.1)}{=} \left(5^3 + 5^2 + 5 \cdot 5 + c\right) - \left(0^3 + 0^2 + 5 \cdot 0 + c\right) \\ &= 125 + 25 + 25 + c - c \\ &= 175\end{aligned}$$

   Der gesamte Zuwachs beträgt 175 Einheiten.

   Mit rot markiert ist die Konstante, die beim unbestimmten Integral vermekrt werden musste. Bei der Berechnung des bestimmten Integrals wird diese Konstante jedoch stets gekürzt und muss daher nicht angegeben werden.

2. Die Berechnung erfolgt analog zum ersten Teil, die Randbedingungen sind nur etwas allgemeiner gefasst (Intervall $I = [t_0, T]$).

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^T I(t) &\overset{(7.2.1)}{=} \left(T^3 + T^2 + 5 \cdot T\right) - \left(t_0^3 + t_0^2 + 5 \cdot t_0\right) \\ &= (T^3 - t_0^3) + (T^2 - t_0^2) + 5(T - t_0)\end{aligned}$$

Das bestimmte Integral zwischen einer Funktion $f(x)$ und der x–Achse auf einem Intervall $[a, b]$ kann mit dem Riemann–Integral anschaulich beschrieben werden. Dafür wird das Intervall in n Bereiche der Breite unterteilt. Es ergibt sich eine Zerlegung Z von $[a, b]$ $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. Anschließend werden n Rechtecke gezeichnet, mit einer Breite $d_k = x_k - x_{k-1}$ und einer Höhe $h_k = \max\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $k = 1, \ldots, n$. Die *Obersumme* (vgl. Ab. 7.2) ergibt sich als

$$\begin{aligned}O_f(Z) &:= \sum_{k=1}^{n} \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot d_k\end{aligned}$$

Analog dazu kann die *Untersumme* (vgl. Ab. 7.2) definiert werden

$$U_f(Z) := \sum_{k=1}^{n} \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Je größer n gewählt wird, umso besser passen sich die Rechtecke an die Funktion an, das Resultat wird genauer. Für $n \to \infty$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} U_f(Z) = \lim_{n \to \infty} O_f(Z) = \int f(x) \mathrm{d}x.$$

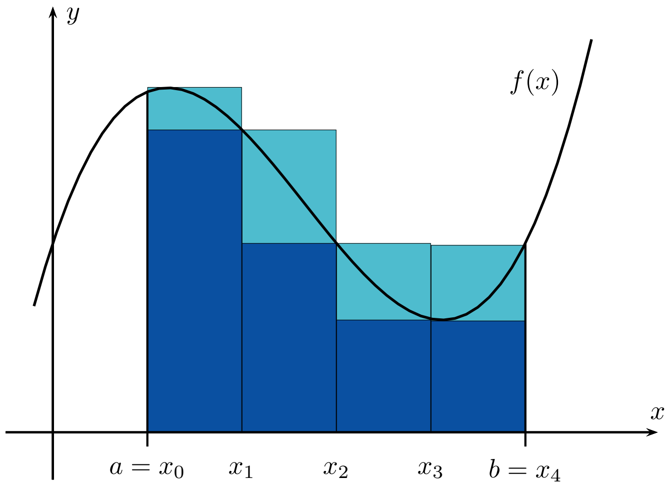


Abbildung 7.2: Veranschaulichung der Ober- (cyan) und Untersummen (blau) einer Funktion $f(x)$

Anschaulich: die Intervalle b_k ziehen sich mit wachsendem n auf einen Punkt x_k zusammen mit einer infinitesemalen (unendlich kleinen) Breite d_k. An dieser Stelle hat die Funktion den Wert $f(x_k)$. Über alle Punkte x_k wird aufsummiert. Das Symbol für das Integral kann als stilisierte S für Summe betrachtet werden.
Es ergeben sich ein paar neue Regeln und die oben genannten Regeln gelten auch für diese Form des Integrals, nur die Schreibweise wird etwas abgewandelt:

Addition:

$$\int\limits_a^b (c_1 f_1(x) + \cdots c_n f_n(x))\mathrm{d}x = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \cdots + c_n \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

Differentiation:

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(x) + c, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(x)$$

Aufspaltung:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad d \in (a,b)$$

partielle Integration:

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f\left(\varphi(s)\right)\varphi'(s)\mathrm{d}s$$

7.3 Flächenberechnung mit Integralen

Der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ kann mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt werden.

Seien $f(x), g(x)$ zwei Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, dann kann der Flächeninhalt A zwischen beiden Funktionen auf $[a, b]$ bestimmt werden durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.3.1}$$

Beispiel 7.1. Sei $f(x) = -x^2 + 5x - 2$ und $g(x) = 2x^2 - 7x + 7$. Berechne den Flächeninhalt, der von beiden Kurven eingeschlossen wird, vgl. Abb. 7.3.
Zunächst müssen die beiden Schnittpunkte der Funktionen bestimmt werden

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -x^2 + 5x - 2 &= 2x^2 - 7x + 7 \\ 0 &= 3x^2 - 12x + 9 \\ 0 &= x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \\ x_1 = 1, &\qquad x_2 = 3 \end{aligned}$$

Nun kann Gl. 7.3.1 genutzt werden. Dafür muss geprüft werden, ob $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [x_1, x_2]$ gilt. Dies ist tatsächlich der Fall. Sonst müsste umdefiniert werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 -x^2 + 5x - 2 - \left(2x^2 - 7x + 7\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 -3x^2 + 12x - 9\mathrm{d}x \\ &= \left[-3 \cdot {}^1\!/_3 \cdot x^3 + 12 \cdot {}^1\!/_2 \cdot x^2 - 9x\right]_1^3 \\ &= \left[-x^3 + 6x^2 - 9x\right]_1^3 \\ &= -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - \left(-1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

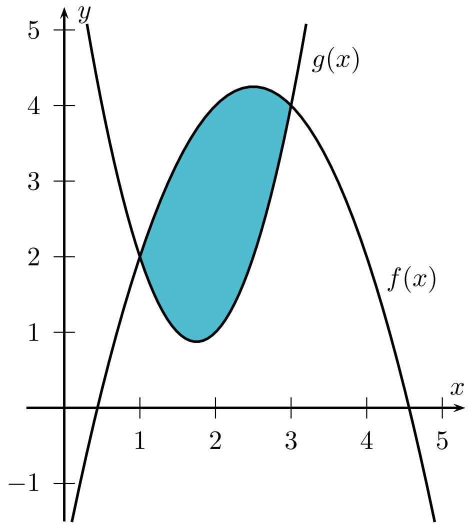


Abbildung 7.3: Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = -x^2 + 5x - 2$ und $g(x) = 2x^2 - 7x + 7$

7.4 Volumenberechnung von Rotationskörpern

Rotationskörper entstehen durch Rotation einer Kurve um die x- bzw. y–Achse. Im Weiteren soll die Kurve durch eine Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ erzeugt werden.

Rotation der Funktion f um die x–Achse, begrenzt von $x = a$ und $x = b$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

Rotation der Funktion f um die y–Achse, begrenzt von $y = f(a)$ und $y = f(b)$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\min(f(a),f(b))}^{\max(f(a),f(b))} \left(f^{-1}(y)\right)^2 \mathrm{d}y \qquad (7.4.1) \\ &= \pi \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Voraussetzung ist die Existenz der Umkehrfunktion f^{-1}, dies ist der Fall, wenn f stetig und streng monoton ist (vgl. Abschnitt 6.1.2 und Abschnitt 2.2).

Rotation der Funktion f um die y–Achse, begrenzt von $x = a$ und $x = b$, sowie der x–Achse:

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

7.5 Weitere Aufgaben

1. Abbildung 7.4 zeigt einen homogenen Rotationskörper mit elliptischem Querschnitt. Er entsteht durch Drehung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b um die y–Achse.

   (a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_y dieses Körpers bezüglich der Rotationsachse in Abhängigkeit vom Parameter h ($2h$ ist die Höhe des Rotationskörpers; $0 \leq h \leq b$). Wie groß ist das Volumen dieses Körpers?

   (b) Welche Werte ergeben sich aus dem ersten Teil für die Massenträgheitsmomente eines Rotationsellipsoids und einer Kugel vom Radius R? Wie groß sind die Volumina dieser Körper?

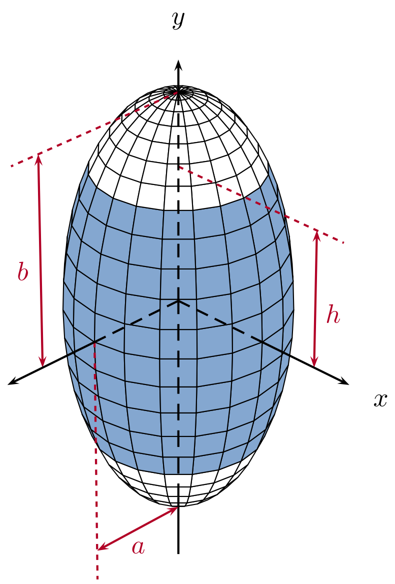


Abbildung 7.4: Rotationsellipsoid

2. Eine *Nachfragefunktion* $P = f(Q)$ beschreibt den Zusammenhang von nachgefragter Menge Q und Preis P. Eine *Angebotsfunktion* $P = g(Q)$ stellt die Beziehung von angebotener Menge Q

und Preis P dar. Wenn Angebot und Nachfrage gleich sind, wird von einem *Gleichgewichtspreis* P^* gesprochen. Er tritt bei einer Menge Q^* ein. Mit *Konsumentenrente* CS wird der Betrag bezeichnet, der insgesamt von allen Konsumenten eingespart wird, wenn sie das Gut zu einem Preis kaufen, der unter dem Preis liegt, den sie maximal zu zahlen bereit sind

$$\mathrm{CS} = \int_0^{Q^*} f(Q) - P^* \mathrm{d}Q.$$

Die *Produzentenrente* PS ist der Gesamtbetrag aller Produzenten, die einen höheren Preis erzielen, als der minimale Preis, zu dem sie ihr Gut verkaufen würden

$$\mathrm{PS} = \int_0^{Q^*} P^* - g(Q) \mathrm{d}Q.$$

Gegeben seien eine Nachfragefunktion $f(Q) = 200 - 0,2 \cdot Q$ sowie eine Angebotsfunktion $g(Q) = 20 + 0,1 \cdot Q$. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und berechnen Sie die Konsumenten- und Produzentenrente.

Lösungen

1. (a) Das Massenträgheitsmoment ist definiert als

$$J = \int_V r_\perp^2 \rho(r) \mathrm{d}V.$$

Dieses Integral ist in diesem Rahmen zu schwer zu lösen. In Tafelwerken ist jedoch die einfache Formel für das Trägheitsmoment eines Zylinders mit Radius R und Masse m, bzw. Volumen V

$$J_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} m R^2 \overset{\rho \equiv 1}{=} \frac{1}{2} V R^2$$

zu finden. Diese Formel kann genutzt werden, wenn der Rotationskörper in Zylinderscheiben zerteilt wird, die senkrecht zur y–Achse stehen. Der Radius der Scheiben ist die x–Auslenkung der begrenzenden Funktion $R = x = g(y)$. Die Zahl der Scheiben wird vergrößert, sodass sich deren Höhe $H = y$ und damit auch das Volumen V auf infinitesemale Größe verringert ($\mathrm{d}y$ bzw. $\mathrm{d}V$)

$$V = \pi R^2 y \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}V = \pi R^2 \mathrm{d}y.$$

Es folgt für einen einzelnen Zylinder

$$J_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \pi R^4 \mathrm{d}y.$$

Für den gesamten Rotationskörper wird nun über alle unendlich dünnen Zylinder summiert, es findet eine Integration im Intervall $[-h, h]$ statt

$$J_y := \int_{-h}^{h} J_{\text{Zylinder}} = \int_{-h}^{h} \frac{1}{2} \pi R^4 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_{-h}^{h} R^4 \mathrm{d}y.$$

Der Körper ist symmetrisch zur x, z–Ebene, d. h. es genügt eine Hälfte des Körpers zu berechnen ($0 \leq y \leq h$ statt $-h \leq y \leq h$) und den errechneten Wert dann zu verdoppeln

$$J_y = \pi \rho \cdot \int_0^h x^4 \mathrm{d}y.$$

Die Formel für $x = g(y)$ resultiert aus der Ellipsengleichung

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad \Big| - \frac{y^2}{b^2}, \cdot a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right) \tag{7.5.1}$$

Es folgt für das Massenträgheitsmoment

$$J_y = \pi\rho \cdot \int\limits_0^h \left(x^2\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi\rho \cdot a^4}{b^4} \cdot \left(b^4 h - \frac{2}{3} b^2 h^3 + \frac{1}{5} h^5\right)$$

Das Volumen wird mit Hilfe von Gl. (7.4.1) gelöst, die Funktion $x = g(y)$ wird dabei von $y = -h$ und $y = h$ begrenzt

$$V = \pi \int\limits_{-h}^{h} x^2 \mathrm{d}y \qquad = \pi \frac{a^2}{b^2}\left(2b^2 h - \frac{2}{3} h^3\right)$$

(b) Rotationsellipsoids ($h = b$):

$$J_{\text{Ellipse}} = \frac{8}{15}\pi\rho a^4 b \qquad V_{\text{Ellipse}} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Kugel mit Radius R ($a = b = R$):

$$J_{\text{Kugel}} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 \qquad V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. Gleichgewichtspreis:

$$\begin{aligned} f(Q) &= g(Q) \\ 200 - 0,2 \cdot Q &= 20 + 0,1 \cdot Q \\ Q^* &= 600 \\ f(600) = P^* &= 80 \end{aligned}$$

Konsumentenrente

$$\mathrm{CS} = \int\limits_0^{600} 200 - 0,2 - 80 \cdot Q \mathrm{d}Q$$
$$= 36\,000$$

Produzentenrente

$$\mathrm{PS} = \int\limits_0^{600} 80 - 20 - 0,1 \cdot Q \mathrm{d}Q$$
$$= 18\,000$$

A
Mengen

A.1 Definition

In der Mathematik wird jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten zu einer Gesamtheit eine *Menge*, genannt. Die Bezeichnung erfolgt mit Großbuchstaben, z. B. A. Eine Menge ist definiert, wenn feststeht, welche Objekte zu dieser Menge gehören ($a \in A$) und welche nicht ($b \notin A$). Die zur Menge gehörenden Objekte heißen ihre *Elemente*.

Nur die *leere Menge* $\emptyset$ enthält kein Element.

Mengen werden meistens mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet und die Elemente mit kleinen Buchstaben. Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren:

- Durch *Aufzählen* ihrer Elemente, die in beliebiger Reihenfolge zwischen geschweiften Klammern (Mengenklammern) gesetzt sind und durch Kommata getrennt werden.

  Schreibweise: {Element 1, . . . , Element n}

  Beispiel A.1.

  - $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$ – lateinisches Alphabet
  - $B = \{1, 2, 3\}$ – die ersten drei natürlichen Zahlen

- Durch Angabe einer die Elemente *charakterisierenden Eigenschaft*

  Schreibweise: $\{x \,|\, x$ erfüllt Eigenschaft$\}$,

  Beispiel A.2. $L = \left\{ \dfrac{n^2+1}{n^2+n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \{1, {}^5/_6, {}^{10}/_{12}, \ldots\}$

Einige der Zahlenbereiche werden häufig in Mengenschreibweise dargestellt:

natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Beispiel A.3. $7 \in \mathbb{N}$, $10\,000 \in \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{N}$, $-10 \notin \mathbb{N}$, $3.15 \notin \mathbb{N}$

Die natürlichen Zahlen dienen oft zum Abzählen oder Nummerieren.

ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Beispiel A.4. $-17 \in \mathbb{Z}$, $7 \in \mathbb{Z}$, $-15.9 \notin \mathbb{Z}$, $10.34 \notin \mathbb{Z}$

Mit den ganzen Zahlen können Differenzen angegeben werden,

rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{{}^m/_n \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

Beispiel A.5. $-2 = {}^{-2}/_1 \in \mathbb{Q}$, ${}^{17}/_{10} \in \mathbb{Q}$, ${}^{-17}/_{10} \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$ (weil ${}^0/_1 \in \mathbb{Q}$)

Mit den rationalen Zahlen können Anteile einer Menge von einer Obermenge angegeben werden.

reelle Zahlen: $\mathbb{R}$

Beispiel A.6. $-4 \in \mathbb{R}$, ${}^7/_{10} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

Wenn jedes Element einer Menge N auch Element einer Menge M ist, so wird N *Teilmenge* von M genannt und es wird geschrieben $N \subseteq M$ (siehe Abb. A.1). Nach dieser Definition ist jede Menge Teilmenge von sich selbst. Die Menge M ist in diesem Fall eine Obermenge von N. Wenn M zudem weitere Elemente enthält, die nicht in N enthalten sind, so heißt N eine *echte Teilmenge* von M und M eine *echte Obermenge* von N ($N \subset M$).

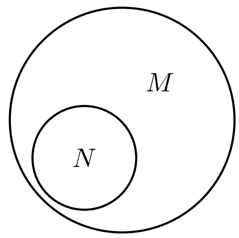


Abbildung A.1: N ist Teilmenge von M

Beispiel A.7. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Notation $Q \neq I$ bedeutet nicht, dass $I \subset Q$. $Q = I$ bedeutet nicht, dass $I \subset Q$ und $Q \subset I$.

Beispiel A.8.

1. $A = \{x \,|\, x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dann $A = B$.
2. $C = \{1, 2, 4, 3\}$, $D = \{3, 2, 1, 4\}$. Dann $C = D$.
3. $C = \{1, 2, 4\}$, $D = \{3, 2, 1\}$. Dann $C \neq D$.

Bezeichnungen:

Allquantor: $\forall$ – „für alle“, „für jedes“.

Existenzquantor: $\exists$ – „es gibt ein“, "für mindestens ein".

Beispiel A.9.

1. Jeder Mensch hat einen Kopf.
   ($\forall$ Menschen $\exists$ Kopf)
2. Falls $M \subseteq N$ gilt: $\forall x \in M$ gilt $x \in N$
3. $\forall x \in \mathbb{N}$ gilt $x \in \mathbb{Z}$
4. $\forall x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \in \mathbb{Q}$
5. $\forall x \in \mathbb{Q}$ gilt $x \in \mathbb{R}$
6. $\forall x \in [0, 1]$ gilt $x \in \mathbb{R}$. $\forall x \in [0, 1]$ gilt nicht $x \in \mathbb{N}$, aber $\exists x \in [0, 1] : x \in \mathbb{N}$

A.2 Mengenoperationen

Die *Vereinigung* $C = A \cup B$ zweier Mengen A und B besteht aus denjenigen Elementen, die in A oder B, also in mindestens einer der beiden Mengen A, B enthalten sind (Abb. A.2):

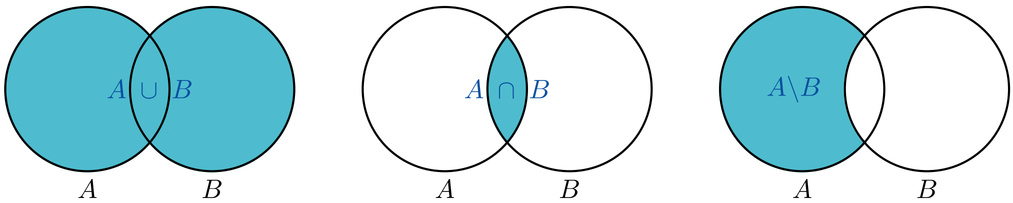
Für die Menge $C = A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\}$ gilt:
$\forall x \in C$ ist $x \in A$ oder $x \in B$. Damit ist $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$.

Der *Durchschnitt* $D = A \cap B$ zweier Mengen A und B besteht aus denjenigen Elementen, die sowohl in A als auch in B, also gleichzeitig in beiden Mengen A, B enthalten sind (Abb. A.2):

Für die Menge $D = A \cap B = \{x \,|\, x \in A$ und $x \in B\}$ gilt:
$\forall x \in D$ ist $x \in A$ und $x \in B$. Damit ist $D \subseteq A$ und $D \subseteq B$.

Die *Differenz* $E = A \backslash B$ besteht aus allen Elementen $x \in A$, die nicht in B liegen ($x \notin B$).

Für die *Differenzmenge* $E = A \backslash B = \{x \,|\, x \in A$ und $x \notin B\}$ gilt:
$\forall x \in E$ ist $x \in A$ und $x \notin B$ (Abb. A.2).



(a) Vereinigung $A \cup B$ (b) Durchschnitt $A \cap B$ (c) Differenzmenge $A \backslash B$

Abbildung A.2: Mengenoperationen, die zugehörigen Mengen sind blau hervorgehoben

Beispiel A.10. Seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 5) und $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 9).

1. Dann ist die Vereinigung $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$,
2. Dann ist der Durchschnitt $D = A \cap B = \{1, 3, 5\}$,
3. Dann ist die Differenzmenge $E = A \backslash B = \{2, 4\}$.

B
Intervalle

Es seien a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$. Die Menge aller reeller Zahlen x, die die Ungleichung $a < x < b$ ($a \leq x \leq b$) erfüllen, heißt *Intervall* (*Zahlenintervall*) mit den *Endpunkten* (*Randpunkten*) a und b.
Gehört ein Randpunkt selbst nicht zum Intervall, so ist von einem *offenen Intervallende* die Rede, im entgegengesetzten Fall von einem *abgeschlossenen Intervallende*. Die Angabe eines Intervalls erfolgt durch seine Randpunkte a und b, indem diese in Klammern gesetzt werden. Eine eckige Klammer steht für ein abgeschlossenes Intervallende, eine runde für ein offenes Intervallende.

Gehören beide Randpunkte zu dem Intervall, so heißt es *abgeschlossen*: $[a, b]$.
Gehört nur einer der Randpunkte (also entweder a oder b) zum Intervall, so heißt es *halboffen*: $[a, b)$ oder $(a, b]$.
Gehört keiner der Randpunkte zum Intervall, so heißt es *offen*: (a, b).

Intervalle dienen der Beschreibung von Zahlenmengen. Man unterscheidet beschränkte und nicht beschränkte Intervalle. Bei einem *beschränkten* Intervall sind die Intervallgrenzen a und b reelle Zahlen.
Das Symbol mit der Schreibweise ∞ heißt *unendlich* und steht für "beliebig groß". Das Symbol $-\infty$ heißt entsprechend *minus unendlich* und steht für "beliebig klein". Die Symbole ∞ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen; $-\infty$ ist kleiner als jede reelle Zahl, ∞ ist größer als jede reelle Zahl. Bei einem *unbeschränkten* Intervall ist mindestens eine der Intervallgrenzen $-\infty$ oder ∞. Solche Intervalle können durch eine Ungleichung beschrieben werden:

- halboffenes Intervall, nach rechts unbeschränkt: $[a, \infty) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$
- offenes Intervall, nach rechts unbeschränkt: $(a, \infty) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ a < x\}$
- halboffenes Intervall, nach links unbeschränkt:] $(-\infty, b] = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$
- offenes Intervall, nach links unbeschränkt: $(-\infty, b) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x < b\}$
- offenes Intervall, nach links und rechts unbeschränkt: $(-\infty, \infty) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

Beispiel B.1.

- $I_1 = [0, 10], I_2 = (-5, 2)$, I_1 beschränkt, abgeschlossen und I_2 beschränkt, offen
  - $I_1 \cap I_2 = [0, 2)$ ist ein beschränktes halboffenes Intervall,
  - $I_1 \cup I_2 = (-5, 10]$ ist ein beschränktes halboffenes Intervall,
  - $I_1 \backslash I_2 = [2, 10]$ ist ein beschränktes abgeschlossenes Intervall.
- $I_1 = (-\infty, {}^2\!/\!_5], I_2 = [0, 1)$, I_1 halboffen, nach links unbeschränkt, I_2 beschränkt halboffen
  - $I_1 \cap I_2 = [0, {}^2\!/\!_5]$ ist ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,
  - $I_1 \cup I_2 = (-\infty, 1)$ ist ein offenes Intervall, nach links unbeschränkt,
  - $I_1 \backslash I_2 = (-\infty, 0)$ ist ein offenes Intervall, nach links unbeschränkt.

C
Grundlegende Rechenregeln

Wird eine mathematische Aussage formuliert, die nicht nur für eine bestimmte Zahl, sondern für einen ganzen Zahlenbereich oder sogar für alle Zahlen gilt, dann wird statt einer Zahl ein Buchstabe benutzt. Der Buchstabe heißt unbestimmte *Zahl* oder *Variable*.

Beispiel C.1.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (*Binomische Formel*, gilt für alle reellen Zahlen a, b, vgl. Gl. (1.2.10) bis (1.2.12))
2. $(ab)c = a(bc) = abc$ (*Assoziativgesetz* bezüglich der Multiplikation, gilt für alle reellen Zahlen a, b und c). Beachten Sie, dass wir hier eine Vereinbarung machen. Der Multiplikationspunkt (Malpunkt) kann zwischen zwei Variablen, zwischen einer Zahl und einer Variablen, zwischen einer Zahl und einer Klammer, zwischen einer Variablen und einer Klammer sowie zwischen zwei Klammern weggelassen werden (vgl. Abschnitt C.2.2).
3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $a, b \geq 0$

C.1 Teilbarkeitsregeln

Der *Kehrwert* oder *reziproker Wert* einer Zahl $a \neq 0$ ist die Zahl $1/a$.

Beispiel C.2. Der Kehrwert von 5 ist $1/5$, der Kehrwert von -10 ist $-1/10$, der Kehrwert von $1/4$ ist 4, der Kehrwert von $1/3$ ist $1 : 1/3 = 3$.

Die *Quersumme* einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

Beispiel C.3. Die Quersumme der Zahl $357\,129$ ist $3+5+7+1+2+9 = 27$. Dies lässt sich weiter zusammenfassen zu $2+7 = 9$.

Die einzelnen Zeichen einer Zahl sind ihre Ziffern. Aus Eigenschaften der Ziffern lassen sich Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen ableiten.

Eine ganze Zahl ist teilbar durch

- 2, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.
- 3, wenn die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist.
- 5, wenn die letzte Ziffer durch 5 teilbar ist (also 0 oder 5 ist).
- $6(= 2 \cdot 3)$, wenn die letzte Ziffer durch 2 und die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist.
- 11, wenn die alternierende Quersumme der Zahl (also die Summe der Ziffern, die abwechselnd positives und negatives Vorzeichen erhalten) durch 11 teilbar ist.

C.2 Grundgesetze der Addition und Multiplikation

C.2.1 Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

Für reelle Zahlen gilt bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation das

Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a \qquad\qquad ab = ba,$$

dabei können a, b und c positiv oder negativ sein!

C.2.2 Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz)

Für reelle Zahlen gilt bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation das

Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \qquad\qquad (ab)c = a(bc) = abc$$

Fehlerwarnung: $(ab)c \neq ac \cdot bc$.

C.2.3 Distributivgesetze (Zerlegungsgesetze)

Für reelle Zahlen a, b, c gelten die

Distributivgesetze:

$$(a + b)c = ac + bc, \qquad\qquad a(b + c) = ab + ac$$

Beispiel C.4.

1. $2 + 3 = 3 + 2 = 5$ und $2 - 3 \neq 3 + 2$
2. $(2 + 3) + 7 = 2 + (3 + 7) = 12$
3. $(2 + 3) \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 35$
4. $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$ und $2 : 3 \neq 3 : 2$
5. $(-1 \cdot 3) \cdot 2 = -(3 \cdot 2) = -6$
6. $-(2 + 3) = -1 \cdot (2 + 3) = -2 - 3 = -5$

C.3 Konventionen

Um eine übersichtliche Schreibweise ohne allzu viele Klammern ermöglichen zu können, werden einige Konventionen hinsichtlich der Reihenfolge der Rechenoperationen verwendet:

K1 Klammern haben absoluten Vorrang (werden also stets zuerst berechnet).

K2 Danach werden alle Potenzen (a^x bzw. x^n) berechnet und zwar bei fehlenden Klammern von oben nach unten. Dasselbe gilt für die Auswertung von anderen Funktionstermen wie z. B. $\log_a$.

K3 Danach werden alle Punktoperationen (Multiplikation „·“ und Division „:“) durchgeführt, und zwar von links nach rechts, falls keine Klammern stehen.

K4 Danach werden alle Strichoperationen (Addition „+“ und Subtraktion „−“) durchgeführt (bei fehlenden Klammern ebenfalls von links nach rechts).

Das heißt, die Rechenzeichen „·“ und „:“ binden stärker als „+“ und „−“, d. h. Multiplikation und Division müssen vor Addition und Substraktion ausgeführt werden. Potenzieren bindet stärker als Multiplizieren und Dividieren,.

$$a + bc = a + (bc), \qquad a - b : c = a - (b : c), \qquad ab^2 = a(b^2)$$

Fehlerwarnung: Es gilt im Allgemeinen:

$$ab^2 \neq (ab)^2, \qquad -ab = -(ab).$$

Merkregel: Klammern vor Potenz vor Punkt vor Strich.

Beispiel C.5.

1. $4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^9 = 262144$ (K2: von oben nach unten),
   aber: $(4^3)^2 = 64^2 = 4096$ (K1: Klammern zuerst)
2. $48 : 3 : 4 \cdot 2 = 16 : 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$ (K3: von links nach rechts),
   aber: $48 : 3 : (4 \cdot 2) = 48 : 3 : 8 = 16 : 8 = 2$ (K1: Klammern zuerst)
3. $120 - 50 - 20 = 70 - 20 = 50$ (K3: von links nach rechts),
   aber: $120 - (50 - 20) = 120 - 30 = 90$ (K1: Klammern zuerst).

Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Fehlerwarnung: im Allgemeinen gilt:
$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, sondern $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (das erste Binom).

C.4 Bruchrechnung

Ein *Bruch* ist eine Zahl, die durch einen Ausdruck m/n ($m : n$, d. h. m geteilt durch n) dargestellt wird. Es gilt dabei $n \neq 0$, denn die Division durch Null ist nicht definiert.

Die Division von Null durch eine von Null verschiedenen Zahl ergibt Null: $0/n = 0$.
Die Division einer von Null verschiedenen Zahl durch Null $m/0$, sowie Null durch Null $0/0$ ist nicht definiert.

Ein Bruch ist ein *Quotient*, der Zähler m heißt *Dividend* und der Nenner n *Divisor*. Brüche, deren Zähler kleiner ist als der Nenner ($m < n$), heißen *echte Brüche*.

Beispiel C.6. $7/9, 1/2, 10/13$

Brüche, bei denen der Zähler größer ist als der Nenner ($m > n$), heißen *unechte Brüche*.

Beispiel C.7. $9/7, 2/1, 13/10$

Ganzzahlige Anteile von Brüchen können vorgezogen werden.

Beispiel C.8. $9/7 = 1\,2/7, 13/10 = 1\,3/10$

Fehlerwarnung: $1^2\!/_7 \neq 1 \cdot {}^2\!/_7$, sondern $1^2\!/_7 = 1 + {}^2\!/_7 = {}^9\!/_7$.

Der *Kehrwert* eines Bruches ${}^p\!/_q$ ist der Bruch ${}^q\!/_p$, also der Bruch, bei dem Zähler und Nenner vertauscht sind, denn $1 : {}^p\!/_q = {}^q\!/_p$.

Es ist wichtig zu wissen ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$):

$$\frac{a}{1} = a, \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

C.4.1 Erweitern und Kürzen

Die Ausdrücke ${}^1\!/_2$, ${}^3\!/_6$, ${}^{-4}\!/_{-8}$ sind verschiedene Schreibweisen desselben Bruchs. Der Übergang von einer Schreibweise zur anderen erfolgt durch Erweitern und Kürzen.
Erweitern heißt, Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben, von Null verschiedenen Zahl zu multiplizieren. Der Wert des Bruches bleibt durch Erweitern unverändert:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \qquad b, d \neq 0.$$

Die Erweiterung von Brüchen ist fast immer dann notwendig, wenn zwei Brüche addiert werden sollen. Beim Lösen von Bruchgleichungen ist meist ebenfalls eine Erweiterung (und zwar mit Termen) notwendig.

Es ist darauf zu achten, dass nur mit solchen Termen erweitert wird, die nicht Null werden dürfen. Wird dies nicht beachtet, können Lösungen erreicht werden, die die Ausgangsgleichung nicht erfüllen!

Kürzen heißt, Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl zu dividieren. Dabei bleibt der Wert des Bruches unverändert.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \qquad b, c \neq 0.$$

Wird die Kürzungsregel nur schematisch durchgeführt, kann es zu unsinnigen Ausdrücken kommen

$$\frac{a}{3a} = \frac{\cancel{a}}{3\,\cancel{a}} = ?, \qquad a \neq 0.$$

Es ist ratsam das korrekte Divisionsergebnis (häufig „1“) zu vermerken

$$\frac{a}{3a} = \frac{\cancel{a}^1}{3\,\cancel{a}_1} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}, \qquad a \neq 0.$$

Beispiel C.9.

1. $\dfrac{x^2 - 49}{2x + 14} = \dfrac{(x-7)(x+7)}{2(x+7)} = \dfrac{1}{2}(x-7)$, dabei $x + 7 \neq 0$, d. h. $x \neq -7$
2. $\dfrac{ab^2 - b^2}{a^2b - ab} = \dfrac{b^2(a-1)}{ab(a-1)} = \dfrac{b}{a}$, dabei $ab(a-1) \neq 0$, d. h. $a, b \neq 0$ und $a \neq 1$.

Fehlerwarnung: Unterschiede Kürzen und Dividieren, im Allgemeinen gilt:

$$\frac{a+1}{b+1} \neq \frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$$

C.4.2 Addieren und Subtrahieren

Gleichnamige Brüche (Brüche mit dem gleichen Nenner) werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner beibehält:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad c \neq 0 \tag{C.4.1}$$

Beispiel C.10.

1. $1/9 + 7/9 = 8/9$
2. $\dfrac{2x+3y}{6} = \dfrac{2x}{6} + \dfrac{3y}{6} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}$
3. $\dfrac{x^2-6x}{2x^2} = \dfrac{x^2}{2x^2} - \dfrac{6x}{2x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{x}$, $x \neq 0$.

Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie auf den Hauptnenner bringt, also durch Erweitern gleichnamig macht. Der *Hauptnenner* ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd}, \qquad c, d \neq 0$$

Eine ganze Zahl a und ein Bruch b/c werden addiert, indem die Zahl a mit dem Nenner $c \neq 0$ erweitert wird (vgl. Abschnitt C.4.1) und die beiden Brüche nach Gl. (C.4.1) addiert werden

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}. \tag{C.4.2}$$

Beispiel C.11.

1. $\dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{9}{9} + \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{7}{7} = \dfrac{27}{63} + \dfrac{7}{63} = \dfrac{27+7}{63} = \dfrac{34}{63}$
2. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1-y}{y} = \dfrac{y}{xy} - \dfrac{(1-y)x}{xy} = \dfrac{y-x(1-y)}{xy} = \dfrac{y-x+xy}{xy}$

Fehlerwarnung: Der häufigste Fehler beim Addieren (Subtrahieren) von Brüchen besteht darin, sowohl Zähler als auch Nenner separat zu addieren (subtrahieren):

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \neq \frac{a}{b+c} \neq \frac{2a}{b+c}$$

sondern

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{ab+ac}{bc}$$

C.4.3 Multiplizieren und Dividieren

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{C.4.3}$$

Beispiel C.12.

1. $\dfrac{1}{a \cdot b} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$
2. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
3. $\dfrac{a}{b} c = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{1} = \dfrac{ac}{b}$

Vor dem Multiplizieren sollte gekürzt werden:

$$\frac{a}{bk}\frac{ck}{d} = \frac{ack}{bkd} = \frac{ac}{bd}.$$

Ein Bruchstrich ersetzt die separate Klammerung von Zähler und Nenner:

$$\frac{a+b}{c+d} = (a+b) : (c+d).$$

Zwar ist die separate Klammerung von Zähler und Nenner prinzipiell erlaubt, führt aber (insbesondere bei Mehrfachbrüchen) zu unübersichtlicher Darstellung.

Beispiel C.13.

1. $\dfrac{2+8}{2+3} \neq 2+8:2+3 = 9$, aber: $\dfrac{2+8}{2+3} = (2+8):(2+3) = 10:5 = 2$
2. $\dfrac{x-8}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot (x-8)$ (d. h. die Klammern müssen geschrieben werden, wenn der Bruchstrich entfällt).

Durch Brüche wird dividiert, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc}.$$

Im Doppelbruch D aus obiger Box deutet die Länge der Bruchstriche an, in welcher Weise die vorkommenden Brüche berechnet werden sollen, ohne dass eine Klammersetzung notwendig ist. Wären nämlich die vorkommenden Bruchstriche gleich lang, so muss eine (häufig unübersichtliche) Klammerung die Hierarchie der Berechnung verdeutlichen.

Fehlerwarnung: Unterschiede Erweitern und Multiplizieren:

Erweitern: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ad}{bd}, \quad (b, d \neq 0),$

z. B. $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \dfrac{6}{8}$

Multiplizieren: $\dfrac{a}{b} \cdot d = \dfrac{ad}{b}, \quad (b \neq 0),$

z. B. $3/4 \cdot 2 = 6/4$