Übungsaufgaben zur Vorlesung Strömungsmechanik II

Prof. Dr. Ch. Brücker

19. Oktober 2009

Gasdynamik

Bearbeitungsreihenfolge: 2 – 1 – 3 – 7 – 6

Beispielaufgabe 1 Gasdynamik

Aus einem Kessel strömt Kohlendioxid mit den Ruhegrößen $p_R = 1\,MPa$ und $T_R = 300\,K$ durch eine konvergente Mündung ins Freie, der Austrittquerschnitt hat die Fläche $A_M = 10\,cm^2$, der Außendruck betrage $p_b = 0,1\,MPa$.

- Welche Geschwindigkeit u_M ist maximal erreichbar?
- Welchem Druck p_M und welcher Temperatur T_M entspricht dieser Zustand?
- Wie groß ist der Massendurchsatz $\dot{m}$?

Lösung Beipielaufgabe 1 Gasdynamik

Die Aufgabe wird mit den in der Vorlesung angegebenen Formeln gelöst. Dabei muß beachtet werden, dass CO_2 ein dreiatomiges Gas ($\gamma = 1,33$) ist.

Die Mündung ist nur konvergent, also kann u_M maximal $u^* = a^*$ erreichen:

$$\begin{aligned}
u_M &= u^* = a^* \\
&= \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} R_{CO_2} T_R} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,33}{1,33+1} 189 \cdot 300} \\
u_M &= 254\ \frac{m}{s}
\end{aligned}$$

p_M und T_M sind dann p^* und T^*

$$\begin{aligned}
p_M &= p^* \\
&= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\ p_R \\
p_M &= 0,540\ MPa \\
T_M &= T^* \\
&= \frac{2}{\gamma+1} T_R \\
T_M &= 258\ K
\end{aligned}$$

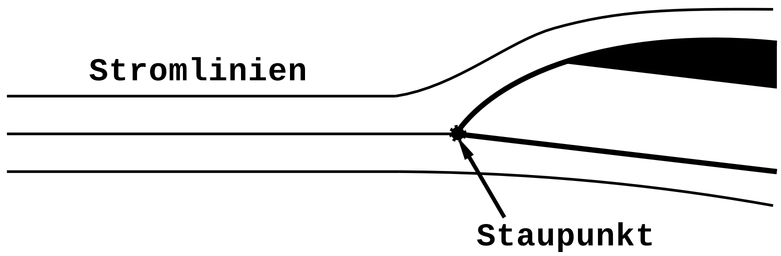
$\dot{m}$ aus Kontinuitäts-Gleichung in A_M

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \varrho_M \cdot u_M \cdot A_M \\
&= \frac{\varrho_M}{\varrho_R} \varrho_R \cdot u_M \cdot A_M \\
&= \left(\frac{p_M}{p_R}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{p_R}{R_{CO_2} T_R} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} R_{CO_2} T_R} \cdot A_M \\
&= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \cdot \frac{p_R}{\sqrt{R_{CO_2} T_R}} \cdot A_M \\
&= 0,630 \cdot 1,068 \cdot 4200 \cdot 10^{-3} \, \frac{kg}{s} \\
\dot{m} &= 2,826 \, \frac{kg}{s}
\end{aligned}$$

Beispielaufgabe 2 Gasdynamik

Aus den technischen Daten des Überschallflugzeuges CONCORDE kann entnommen werden, daß die maximale Reisegeschwindigkeit einer MACH-Zahl $Ma \simeq 2,05$ in einer Höhe $h_C = 51300\ ft = 15,6\ km$ entspricht (http://www.eava.org/concorde/daten.htm). In dieser Höhe beträgt die Temperatur der Luft $T_{h_C} = 217\ K$.

1. Wie groß ist dann die Temperatur T_S im vorderen Staupunkt?
2. Wie groß die Reisegeschwindigkeit u_C der CONCORDE?



Lösung Beispielaufgabe 2 Gasdynamik

Wird das Problem aus der Sicht der Piloten betrachtet, so entspricht T_S einer Ruhetemperatur T_R. Das Verhältnis von T_S zur Umgebungstemperatur T_{h_C} kann das aus der Wertetabelle des gasdynamischen Diagramms abgelesen werden:

$$\frac{T_{h_C}}{T_S} = \frac{T}{T_R}$$

$$\frac{T_{h_C}}{T_S} = 0,5463 \qquad \text{für } Ma = 2,05$$

$$T_S = \frac{T_{h_C}}{0,5463}$$

$$T_S = 397\ K$$

Um u_C zu bestimmen, muß zuerst die Schallgeschwindigkeit $a(h_C)$ berechnet werden:

$$a = \sqrt{\gamma\ R_L\ T_{h_C}}$$

$$= \sqrt{1,4 \cdot 287\ \frac{J}{kg\ K} \cdot 217\ K}$$

$$a = 295\ \frac{m}{s}$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
u_C &= Ma \cdot a \\
&= 2,05 \cdot 295 \ \frac{m}{s} \\
u_C &= 605 \ \frac{m}{s} = 2179 \ \frac{km}{h}
\end{aligned}
$$

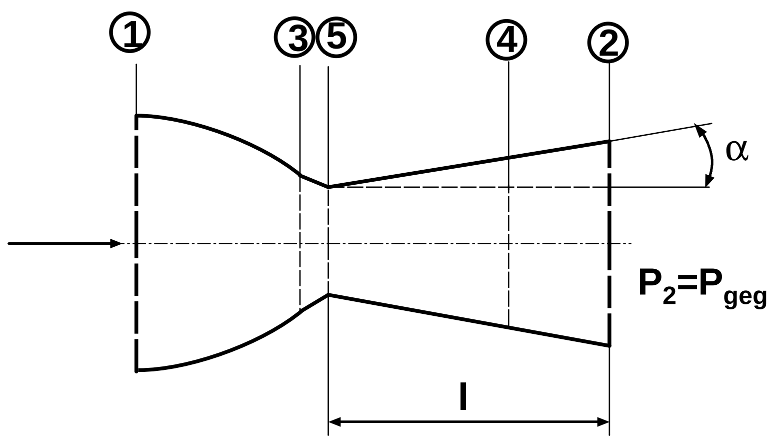
Gasdynamik 1

In einer rotationssymmetrischen LAVAL-Düse mit kegelförmigem Überschallteil wird Luft isentrop von p_R auf $p_2 = p_{geg.}$ entspannt.

Gegeben:
$\alpha = 5^o$
$p_R = 1\ MPa$
$T_R = 500\ K$
$p_2 = p_{geg.} = 0,1\ MPa$
$\dot{m} = 4\ kg \cdot s^{-1}$
$A_3 = A_4 = 1.464 \cdot A_5$
$A_5 = A^*$

Gesucht:

1. Berechnen Sie die Hauptabmessungen der Lavaldüse d_5, d_2, l!
2. Berechnen Sie in den Querschnitten 2, 3, 4 und 5: p, T, Ma, Ma^*, u.
   Skizzieren Sie den Verlauf des Druckes p und der Geschwindigkeit u längs des Strömungsweges!
   (Der Düsenquerschnitt 1 wird nicht betrachtet!)



Ergebnisse

$$d_5 = 53,1\ mm$$
$$d_2 = 73,8\ mm$$
$$l = 118,3\ mm$$

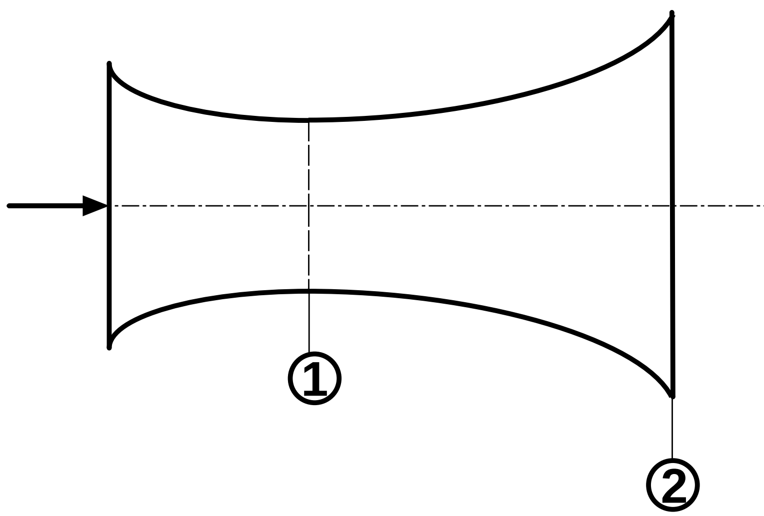
Gasdynamik 2

Für eine LAVAL-Düse mit dem engsten Querschnitt $A_1 = 100\ cm^2$ sind gegeben:

$T_R = 400\ K$
$p_R = 0,4\ MPa$
$p_2 = 0,1\ MPa$
Fluid: Luft

Gesucht:

1. Ma_2^*, A_2, T_2, $\dot{m}$?
2. Der Kesseldruck vor der Düse sinkt auf $0.12\ MPa$ ab. Wie groß sind dann Ma_2^*, Ma_1^*, $\dot{m}$? [T_R, p_2 wie bei 1.]



Ergebnisse

$$
\begin{aligned}
Ma_2^* &= 1,4 \\
A_2 &= 121,7\ cm^2 \\
T_2 &= 269\ K \\
\dot{m} &= 8,081\ \frac{kg}{s} \\
(Ma_2^*)' &= 0,55 \\
(Ma_1^*)' &= 0,75 \\
(\dot{m})' &= 2,25\ \frac{kg}{s}
\end{aligned}
$$

Gasdynamik 3

Eine rotationssymmetrische LAVAL-Düse, deren Kontur $r = f(x)$ mit nachstehenden Zahlenwerten festgelegt ist, beschleunigt Luft auf Überschallgeschwindigkeit.

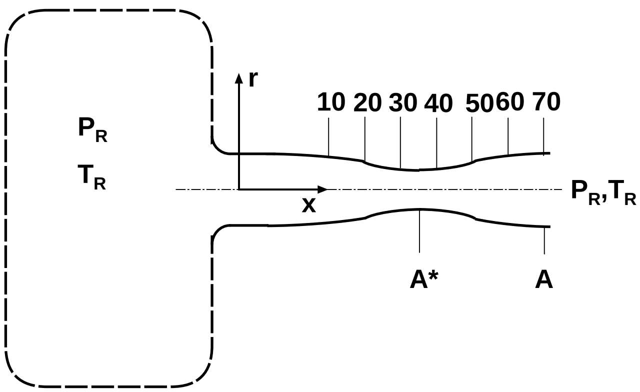
Gegeben (Angaben in mm!):

x	0	10	20	30	35	40	50	60	70
r	7,5	7,05	5,1	3,45	3,24	3,45	4,2	4,95	5,7

$T_R = 288$ K
$p_A = 9,81 \cdot\ 10^4$ Pa

Gesucht:

1. p_R, T_A, $\dot{m}$?
2. Der Verlauf von p, ρ, T, Ma, Ma^* längs der Düsenachse ist graphisch darzustellen!
3. Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit u und die Schallgeschwindigkeit a im Einlauf der Düse ($x = 0$), im engsten Querschnitt ($x = 35$mm) und im Auslauf der Düse ($x = 70$mm).



Ergebnisse

$$p_R = 2,18\ MPa$$
$$T_A = 119\ K$$
$$\dot{m} = 0,171\ \frac{kg}{s}$$

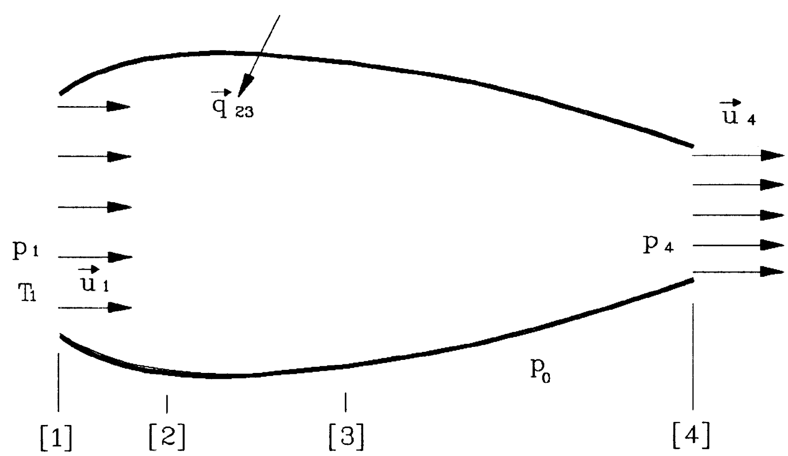
Gasdynamik 6

An der Stelle [1] eines Strahltriebwerkes im Unterschallflug tritt Luft über den Bereich S_1 mit der Geschwindigkeit u_1 (Druck p_1, Temperatur T_1) in das Triebwerk ein. Die luft (ideales Gas mit $\gamma = 1,4;\ R = 287\,J/(kg\,K)$) wird isentrop von [1] nach [2] auf den Druck p_2 komprimiert. Zwischen den Stellen [2] und [3] (Brennkammer) wird isobar die spezifische Wärme $q_{23} = 300\,kJ/kg$ zugeführt. Von der Stelle [3] bis zum Austrittsquerschnitt (Stelle [4]) ist die Strömung wieder isentrop.

Gegebene Werte: $u_1 = 300\,m/s$, $p_2 = 1,25\,bar$, $\gamma = 1,4$, $p_0 = 0,8\,bar$, $q_{23} = 300\,kJ/kg$, $R = 287\,J/(kg\,K)$, $T_1 = 273\,K$, $A_1 = 1\,m^2$

Die Drücke p_1 und p_4 können näherungsweise gleich dem Druck p_0 der Außenströmung gesetzt werden.

1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit u_2 vor der Brennkammer. Wie groß ist die Temperatur T_2 und die Dichte ρ_2 an dieser Stelle?
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit u_3 hinter der Brennkammer, sowie die Temperatur T_3 und die Dichte ρ_3.
3. Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit u_4 und die Dichte ρ_4, wenn der Druck $p_4 = p_0$ ist?
4. Berechnen Sie den Schub des Triebwerkes unter der Voraussetzung, dass die Strömung an den Stellen [1] und [4] ausgeglichen ist.



Gasdynamik 7

Ein Hochgeschwindigkeitszug fährt mit konstanter Geschwindigkeit in einen Tunnel ein. Im zugfesten Koordinatensystem wird die Vorderseite dabei mit der konstanten Geschwindigkei u_1 angeströmt. Dort löst die Strömung auch in der skizzierten Weise ab, die Einschnürung wird durch die Strahlkontraktionsziffer α beschrieben. Die Luftströmung ist kompressibel und es gilt das ideale Gasgesetz.

- Berechnen Sie an der Stelle 2 (engste Einschnürung) die beiden Zustandsgrößen p_2 und ρ_2 sowie die Geschwindigkeit u_2 bei isentroper Strömung von 1 nach 2.

Geg.: $u_1 = 100 m/s$, $p_1 = p_b$, $\rho_1 = 1,2\ kg/m^3$, $k = 0,85$, $\alpha = 0,75$, $\gamma = 1,4$